

UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL

# ***Concreto Protendido***

## **Perdas de Protensão**

---

---

***Gustavo de Souza Veríssimo***

Professor Assistente  
M. Sc. Eng. de Estruturas, UFMG/1996

***Kléos M Lenz César Jr***

Professor Assistente  
M. Sc. Eng. Civil, UFF/1995

# CONTEÚDO

## **1. PERDAS DE PROTENSÃO**

<b>1.1 INTRODUÇÃO.....</b>	<b>1</b>
<b>1.2 PERDAS INSTANTÂNEAS .....</b>	<b>2</b>
1.2.1 Perdas por deformação imediata do concreto.....	2
1.2.1.1 <i>Caso de pré-tensão da armadura.....</i>	2
1.2.2 Perdas por atrito nos cabos.....	9
1.2.2.1 <i>Perda por atrito em curva.....</i>	11
1.2.2.2 <i>Perda por atrito parasita .....</i>	14
1.2.3 Perdas por acomodação da ancoragem.....	15
<b>1.3 PERDAS PROGRESSIVAS.....</b>	<b>16</b>
1.3.1 Efeito da retração e da fluência do concreto .....	16
1.3.2 Perdas devido à retração .....	16
1.3.3 Idade fictícia do concreto.....	18
1.3.4 Espessura fictícia da peça.....	18
1.3.5 Perdas devido à fluência do concreto.....	19
1.3.6 Perdas por relaxação do aço.....	23

## **2. PROGRAMA PARA O CÁLCULO DOS COEFICIENTES DE RETRAÇÃO E FLUÊNCIA DO CONCRETO**

<b>2.1 COMENTÁRIOS.....</b>	<b>25</b>
<b>2.2 LISTAGENS.....</b>	<b>26</b>
<b>2.3 FLUXOGRAMAS.....</b>	<b>30</b>
2.3.1 Entrada de dados .....	30
2.3.2 Fluxograma para o cálculo da idade fictícia do concreto .....	31
2.3.2 Fluxograma para o cálculo da retração do concreto.....	32
2.3.3 Fluxograma para o cálculo do coeficiente de fluência do concreto.....	34

## APRESENTAÇÃO

O objetivo primeiro desta publicação é dar suporte bibliográfico à disciplina CIV 457 - Concreto Protendido, do Curso de Engenharia Civil da UFV, complementando o escopo abordado nas apostilas *Concreto Protendido - Fundamentos Básicos* e *Concreto Protendido - Estados Limites*.

A estimativa das perdas de protensão é de fundamental importância para o projeto e dimensionamento econômico de estruturas protendidas. Neste trabalho, o estudo das perdas é abordado de maneira didática, visando demonstrar o efeito isolado de diversos fenômenos físicos e químicos que afetam a protensão nas estruturas de concreto. A formulação apresentada segue as precrições da norma brasileira para projeto de estruturas de concreto protendido, a NBR 7197 (ABNT, 1989).

Procuramos colecionar e avaliar, dentre a literatura existente, as proposições mais interessantes e consistentes, e discorrer sobre o tema de uma forma adequada à evolução da disciplina. Dessa forma intencionamos dar uma boa visão do comportamento do Concreto Protendido, seus mecanismos de resistência, bem como propiciar ao aluno o domínio dos métodos de verificação das estruturas.

Agradecemos antecipadamente quaisquer críticas, sugestões e comentários dos leitores, para que a partir deles possamos melhorar sempre este trabalho, no sentido de atender cada vez melhor aos alunos.

Gustavo de Souza Veríssimo  
Julho de 1997

# PERDAS DE PROTENSÃO

---

## 1.1 INTRODUÇÃO

A protensão introduz na peça uma força inicial  $P_o$  que está diretamente relacionada com o alongamento ocorrido na armadura ativa. O acionamento dos macacos, a liberação dos cabos e a transferência da força de protensão, entre outros fatores, originam uma série de efeitos que conduzem a uma diminuição da força de protensão. Dessa forma, tem-se as chamadas perdas de protensão.

Durante o cálculo de uma peça protendida, pode-se estimar as perdas de protensão. De posse dessa estimativa das perdas é possível determinar uma sobretensão que deve ser aplicada à peça, tal que, após as perdas, a força de protensão efetivamente atuante seja a força calculada, suficiente para neutralizar, em parte ou no todo, os esforços de tração provocados pelas cargas de utilização.

Dentre os diversos fatores que influem na força de protensão inicialmente aplicada, alguns são responsáveis por perdas de protensão imediatas e outros por perdas progressivas que se desenvolvem ao longo da vida útil da estrutura. Sob condições normais, as perdas tendem a se estabilizar ao cabo de um período de 2 a 3 anos. A partir desse período as perdas são consideradas desprezíveis.

Os fatores que provocam perdas instantâneas, isto é, que ocorrem durante a operação de protensão e imediatamente após a ancoragem no cabo são:

- deformação imediata (ou elástica) do concreto;
- atrito do cabo com a bainha;
- acomodação da ancoragem.

Os fatores que provocam perdas progressivas, isto é, os que ocorrem ao longo do tempo, após o término da operação de protensão, com o cabo já ancorado no concreto são:

- retração do concreto;
- fluência do concreto;
- relaxação do aço de protensão.

A experiência adquirida com a produção de peças protendidas geralmente conduz a estimativas muito boas das perdas de protensão. Todavia, na ausência de informações experimentais confiáveis, pode-se utilizar alguns processos aproximados para estimar as perdas. Nos próximos tópicos são fornecidas algumas recomendações para estimativas das perdas. Ressalta-se que os procedimentos para estimativa das perdas de protensão apresentados neste trabalho são genéricos e aproximados. Na prática, qualquer estrutura

protendida deve ser cuidadosamente analisada, a fim de se determinar se as recomendações sugeridas aqui são válidas para o caso em questão.

Segundo Hurst (1998), raramente se justifica a determinação das perdas com grande acurácia. Uma precisão de  $\pm 10\%$  é suficiente para a maioria das aplicações. A resistência última de uma peça de concreto protendido é pouco afetada pela força de protensão inicial. Há que se considerar também que a probabilidade de o carregamento de projeto ocorrer com seu valor total é pequena, além dos coeficientes de segurança embutidos no procedimento de dimensionamento. Esses fatores indicam claramente que uma peça de concreto protendido é capaz de tolerar pequenas variações da força de protensão.

## 1.2 PERDAS INSTANTÂNEAS

### 1.2.1 Perdas por deformação imediata do concreto

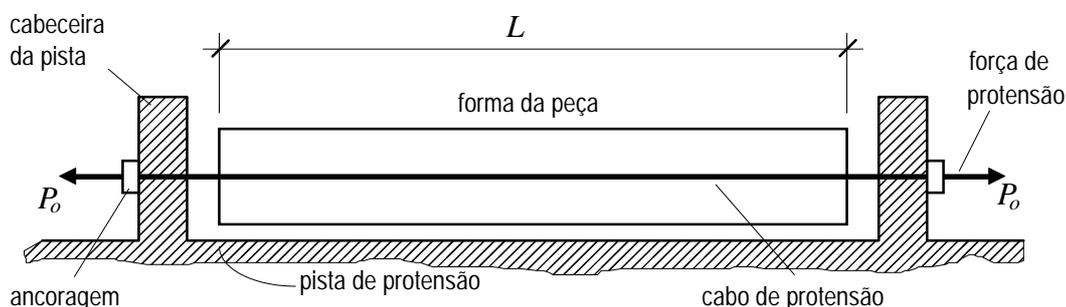
Ao receber a ação da força de protensão, a peça de concreto sofre uma deformação elástica imediata, encurtando-se. Concomitantemente ocorre um encurtamento da armadura de protensão. A este encurtamento da armadura protendida corresponde um alívio de tensão nos cabos, ocorrendo uma perda de protensão.

As perdas por deformação imediata do concreto são pequenas, às vezes desprezadas no cálculo. Uma descrição de processos para avaliar essas perdas é apresentada nos tópicos subsequentes.

$$\sigma_p = E_p \epsilon_p \rightarrow \text{como o módulo de deformação longitudinal do aço é constante, para uma diminuição do alongamento tem-se uma diminuição da tensão de protensão.}$$

#### 1.2.1.1 Caso de pré-tensão da armadura

No caso de protensão com aderência inicial, quando a armadura é liberada dos maciços de ancoragem, após a concretagem, a força de protensão é transferida para o concreto que se deforma (FIGURAS 1.1 e 1.3).



$$L = \text{comprimento original da peça e da armadura ativa aderida ao concreto}$$

FIGURA 1.1 - Peça pré-moldada de concreto protendida, antes da liberação dos cabos tracionados.

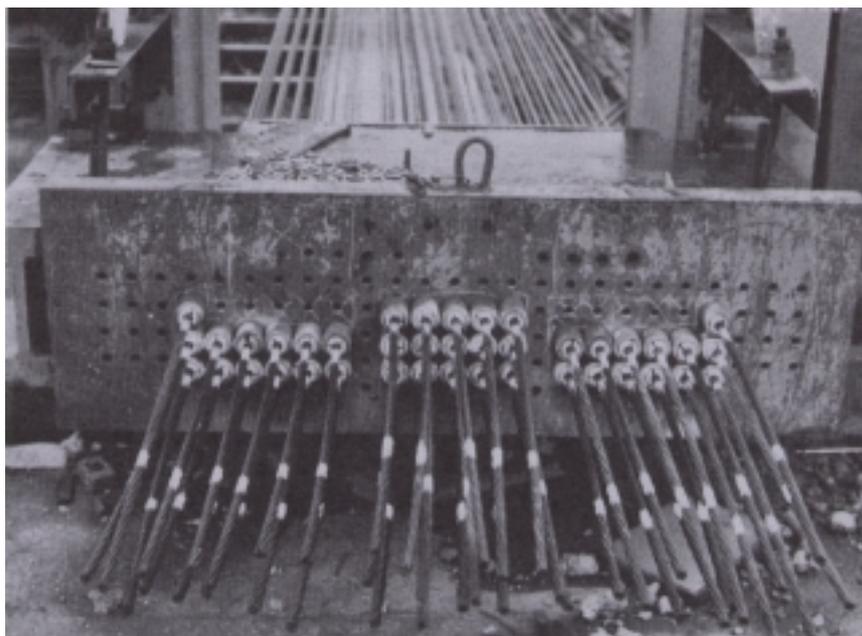


FIGURA 1.2 - Placa de ancoragem dos cabos na cabeceira de uma pista de protensão (Hurst, 1998).

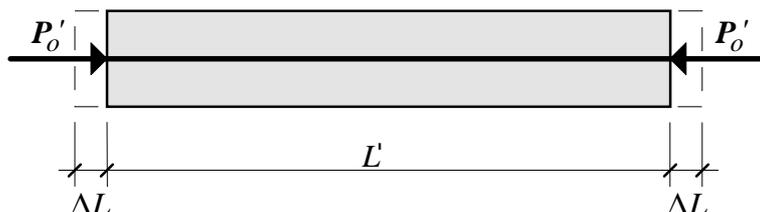


FIGURA 1.3 - Peça pré-moldada de concreto protendida, após a liberação dos cabos protendidos

A força existente  $P$  será absorvida pela seção de concreto e pela seção da armadura homogeneizadas.

#### 1.2.1.1.1 Caso de protensão centrada na seção de concreto

Admitindo a hipótese de que a armadura não escorrega em relação ao concreto, tem-se que a deformação do concreto é igual à do aço:

$$\epsilon_c = \epsilon_p \quad (1-1)$$

Desenvolvendo a eq. (1-1) chegamos a

$$\frac{\sigma_c}{E_c} = \frac{\Delta\sigma_p}{E_p} \quad (1-2)$$

A perda de protensão é portanto

$$\Delta\sigma_p = \frac{E_p}{E_c} \sigma_c = \alpha_e \sigma_c \quad (1-3)$$

onde  $\alpha_e$  é a relação entre os módulos de elasticidade do aço e do concreto.

Após as perdas imediatas, a força resistente equilibrará a força aplicada, donde podemos escrever que:

$$P_o - \Delta P_o = \sigma_c (A_c - A_p) \quad (1-4)$$

temos porém que  $\Delta P_o = \Delta\sigma_p \cdot A_p$ , portanto:

$$P_o = \sigma_c (A_c - A_p) + \Delta\sigma_p A_p = \sigma_c (A_c - A_p) + \alpha_e \sigma_c A_p \quad (1-5)$$

finalmente:

$$P_o = \sigma_c (A_c - A_p + \alpha_e A_p) = \sigma_c A_{ch} \quad (1-6)$$

onde  $A_{ch}$  é a área da seção homogeneizada:

$$A_{ch} = A_c + (\alpha_e - 1) A_p \quad (1-7)$$

A parcela  $\alpha_e A_p$  corresponde à deformação no aço de protensão, que implica na diminuição da força  $P$ . Em outras palavras, é a forma através da qual o decréscimo da força  $P$  é considerado. Ignorar a parcela  $\alpha_e A_p$  equivale a admitir que a força  $P$ , causadora do encurtamento da peça, é constante durante todo o processo de deformação elástica imediata do concreto. E na realidade não é. À medida que o concreto se deforma, devido ao efeito da força de protensão, ocorre o encurtamento concomitante do cabo de protensão e consequente diminuição da força  $P$ .

Como os dois materiais, aço e concreto, possuem módulos de elasticidade diferentes, transforma-se a área de aço numa área fictícia de concreto equivalente ( $A_{ch}$ ), denominada área homogeneizada. A tensão no concreto devido à protensão é dada por

$$\sigma_c = \frac{P_o}{A_{ch}} = \frac{P_o}{A_c + (\alpha_e - 1) A_p} \quad (1-8)$$

A perda de protensão será, portanto:

$$\Delta\sigma_p = \alpha \sigma_c = \frac{\alpha P_o}{A_{ch}} = \frac{\alpha \sigma_{P_o} A_p}{A_{ch}} \quad (1-9)$$

Aproximadamente, pode-se desprezar a influência da armadura no cálculo da área de concreto, fazendo  $A_{ch} = A_c$ . No cálculo de concreto armado essa simplificação é geralmente utilizada porque a área de aço é muito pequena em relação à área de concreto. Quando a área de aço numa seção composta por aço e concreto é significativa, a consideração da área da seção homogeneizada conduz a resultados mais precisos. É o que se verifica nas seções mistas de estruturas metálicas e em muitas situações para peças de concreto protendido.

### 1.2.1.1.2 Caso de protensão excêntrica na seção de concreto

No caso de protensão centrada, a peça trabalha à compressão simples de forma que a tensão num ponto genérico da seção é dada por:

$$\sigma = \frac{P_o}{A_c} \quad (1-10)$$

Com protensão excêntrica, tem-se um caso de flexo-compressão, ou seja, além do esforço normal atuante existe uma parcela de tensão oriunda do momento produzido pela resultante  $P_o$  excêntrica. Portanto, para essa situação:

$$\sigma_c = - \frac{P_o}{A_c} - \frac{P_o e_p}{I} y \quad (1-11)$$

As características da seção composta de concreto e aço são calculadas considerando a seção homogeneizada, obtendo-se a área  $A_{ch}$ , o momento de inércia  $I_h$  e as distâncias  $y_1$  e  $y_2$  do centro de gravidade (FIGURA 1.4).

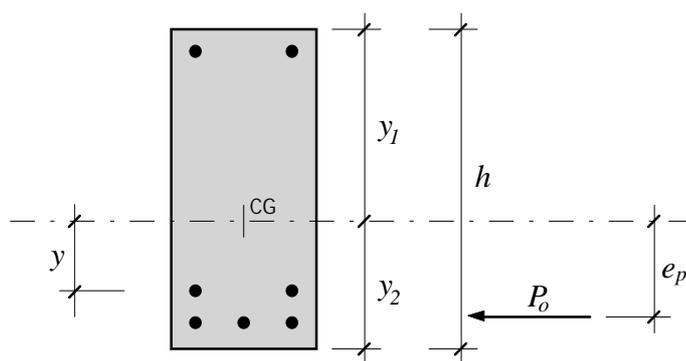


FIGURA 1.4 Protensão excêntrica na seção de concreto

Assumindo que  $e_p$  é a excentricidade da força de protensão  $P_o$  em relação ao centro de gravidade da seção homogeneizada, a tensão no concreto devido à protensão no nível  $y$  de uma armadura é dada pela equação (1-11).

Substituindo a eq. (1-11) na eq. (1-9) obtém-se a seguinte equação para a perda de protensão por deformação elástica imediata do concreto:

$$\Delta\sigma_p = \alpha_e \left[ -\frac{P_o}{A_c} - \frac{P_o e_p}{I} y \right] \quad (1-12)$$

### 1.2.1.2 Caso de pós-tensão da armadura

No caso de protensão com aderência posterior, normalmente o macaco de protensão trabalha apoiado na própria peça a ser protendida. Assim, à medida que se traciona a armadura, o concreto é comprimido simultaneamente. Ao final da protensão, o concreto já sofreu a deformação elástica, não havendo portanto queda de tensão por deformação imediata do concreto quando se tem apenas um cabo de protensão.

Outrossim, quando existem vários cabos na mesma peça, se eles forem tracionados um de cada vez, como é usual, a deformação do concreto provocada pela força no cabo que está sendo tracionado acarreta perda de tensão nos cabos já ancorados. Neste caso deve-se calcular um valor médio para o alongamento dos cabos ou então sobretensioná-los de modo que, após todas as operações de distensão, todos eles fiquem com a mesma força de protensão.

Na pós-tensão, após a protensão os cabos são ancorados mas não injetados, ou seja, não existe aderência inicial com o concreto. Sendo assim, não temos a igualdade:

$$\varepsilon_c = \varepsilon_p \quad (1-1)$$

É necessário então calcular o encurtamento do concreto  $\Delta L_c$  e igualá-lo a  $\Delta L_p$ , uma vez que não há deslizamento do cabo na ancoragem.

Para uma peça de concreto de comprimento  $L$ , o encurtamento  $\Delta L_c$  pode ser obtido fazendo

$$\Delta L_c = \int_0^L \varepsilon_c dL = \varepsilon_c L \quad (1-13)$$

onde

$$\varepsilon_c = \frac{\sigma_c}{E_c} \quad (1-14)$$

e

$$\sigma_c = \frac{P_o}{A_c} - \frac{P_o e_p}{I} e_p + \frac{M_g}{I} e_p \quad (1-15)$$

sendo  $M_g$  o momento devido ao peso próprio solicitado pela protensão.

Considerando, porém, que inicialmente a peça está sobre um escoramento, o peso próprio pode não ser mobilizado totalmente. Assim, não haverá influência dos momentos  $M_p = P_o \cdot e_p$  e  $M_g$  na deformação da peça, que ficará sob o efeito da força normal  $P_o$ .

Nesta fase, o encurtamento elástico do concreto será função somente da tensão no centro de gravidade da seção, dada por

$$\sigma_{cP_o} = - \frac{P_o}{A_c} \quad (1-16)$$

Uma vez solicitado todo o peso próprio, o encurtamento do concreto será calculado pela eq. (1-13).

Para a obtenção de uma expressão mais simples da perda de protensão devido à deformação elástica do concreto, adota-se algumas hipóteses simplificadoras:

- a) o efeito do atrito cabo-bainha é desprezado e o valor da força de protensão ao longo do cabo é considerado constante;
- b) considera-se o efeito da deformação imediata do concreto como proveniente somente da força normal  $P_o$  aplicada no centro de gravidade da seção. Isto equivale a admitir que o encurtamento do cabo é igual ao do eixo neutro da peça;
- c) admite-se que todos os cabos tenham o comprimento  $L$  da peça de concreto.

Estabelecidas as hipóteses, suponha-se que existam  $n$  cabos com comprimento  $L$  e força de protensão  $p_o$  individual, de tal modo que

$$P_o = n \cdot p_o \quad (1-17)$$

Admitindo que os cabos serão protendidos, um de cada vez, a seqüência de eventos é a seguinte:

- o primeiro cabo é ancorado após se obter o alongamento do mesmo compatível com a força  $p_{o,1}$ , e este cabo não sofre o efeito da deformação imediata do concreto;
- o segundo cabo, ao ser ancorado, produz uma deformação imediata no concreto e, portanto, um encurtamento no cabo anterior, já ancorado, sem contudo sofrer ele mesmo este efeito.

E assim sucessivamente. Então, de acordo com as hipóteses simplificadoras acima, após a ancoragem do cabo 1, os  $n-1$  cabos restantes serão protendidos e ancorados produzindo  $n-1$  encurtamentos no cabo 1. Logo:

cabo 1:           sofre o encurtamento  $(n-1) \frac{p_o L}{A_c E_c}$

cabo 2:           sofre o encurtamento  $(n-2) \frac{p_o L}{A_c E_c}$

etc., até

cabo  $(n-1)$ :    sofre o encurtamento  $\frac{p_o L}{A_c E_c}$

o cabo  $n$  não sofre encurtamento.

O encurtamento total da peça será, então, a soma das parcelas acima, ou seja:

$$\sum_{i=1}^{n-1} (n-i) \frac{p_o L}{A_c E_c} = \left[ n \sum_{i=1}^{n-1} 1 - \sum_{i=1}^{n-1} i \right] \frac{p_o L}{A_c E_c} =$$

$$= \left[ n(n-1) - \frac{n(n-1)}{2} \right] \frac{p_o L}{A_c E_c} \quad (1-18)$$

$$\Delta L_c = \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{\sigma_{cp0} L}{E_c} \quad (1-19)$$

sendo  $\sigma_{cp0}$  a tensão no concreto, no centro de gravidade da seção, produzida por um cabo.

O encurtamento total da peça de concreto será igual à soma dos encurtamentos produzidos por cada um dos cabos de protensão.

$$\Delta L_c = \Delta L_p \quad (1-20)$$

A perda média de alongamento por cabo será obtida dividindo-se o encurtamento total do concreto pelo número de cabos, ou seja:

$$\Delta L_{p,m} = \frac{\Delta L_c}{n} = \frac{n-1}{2} \cdot \frac{\sigma_{cp0} L}{E_c} \quad (1-21)$$

Como  $P_o = n \cdot p_o$  e  $\sigma_{cP0} = n \cdot \sigma_{cp0}$ , pode-se multiplicar ambos os membros por  $n$  obtendo:

$$\Delta L_{p,m} = \frac{n-1}{2n} \cdot \frac{\sigma_{cP0} L}{E_c} \quad (1-22)$$

onde  $\sigma_{cP0}$  é a tensão no centro de gravidade da seção devido ao conjunto de  $n$  cabos. A perda de protensão é dada então por

$$\sigma_p = \frac{\Delta L_{p,m} E_p}{L} \quad (1-23)$$

ou

$$\sigma_p = \alpha_e \sigma_{cP0} \frac{n-1}{2n} \quad (1-24)$$

A NBR 7197 recomenda que a perda de protensão devido à deformação imediata do concreto na pós-tração seja calculada através da expressão

$$\Delta \sigma_p = \alpha_e (\sigma_{cp} + \sigma_{cg}) \frac{n-1}{2n} \quad (1-25)$$

onde:

$\sigma_{cp}$  = tensão no concreto ao nível do baricentro da armadura de protensão, devido à protensão simultânea dos  $n$  cabos.

$\sigma_{cg}$  = tensão no mesmo ponto anterior, devido à carga permanente mobilizada pela protensão ou simultaneamente aplicada com a protensão.

### 1.2.2 Perdas por atrito nos cabos

As perdas por atrito ocorrem apenas em peças protendidas com pós-tensão, e variam ao longo do comprimento da peça. Assim, a força de protensão resultante numa peça protendida com pós-tensão varia não só com o tempo mas também com a posição considerada.

As perdas por atrito ocorrem devido ao fato de os cabos roçarem contra as bainhas ao ser aplicada a força de protensão. Essas perdas podem atingir valores elevados principalmente em cabos de grande comprimento, e, muitas vezes exigem que sejam tomadas medidas construtivas especiais com o objetivo de atenuá-las.

Num cabo tensionado, surge atrito interno entre os fios ou cordoalhas que constituem o cabo, bem como entre os fios ou cordoalhas que ficam em contato com as paredes da bainha (FIGURA 1.5). Esse atrito é maior nos trechos curvos onde surgem elevadas pressões de contato devido ao desvio da trajetória dos cabos. Entretanto a bainha apresenta ligeiras ondulações, mesmo nos trechos virtualmente retilíneos, que ocasionam tensões de contato entre o cabo e a bainha produzindo atrito.

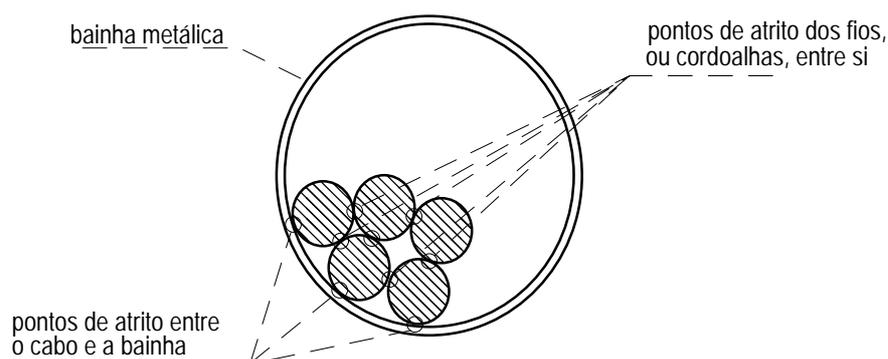


FIGURA 1.5 - Atrito nos cabos dentro da bainha.

Na pós-tração, a armadura dentro da bainha metálica sofre uma perda de tensão devido ao atrito cabo-bainha, consequência da sinuosidade inevitável do duto em todos os planos, mesmo em trechos retilíneos do cabo, e da curvatura própria do traçado do cabo (FIGURA 1.6). A sinuosidade da bainha é chamada ondulação parasita, ocorrendo tanto nos trechos curvos do cabo como nos retilíneos, e deve-se:

- à sua rigidez insuficiente;
- a defeitos de montagem da armadura de protensão;
- à insuficiência de pontos de amarração do cabo;
- ao empuxo do concreto durante a concretagem.

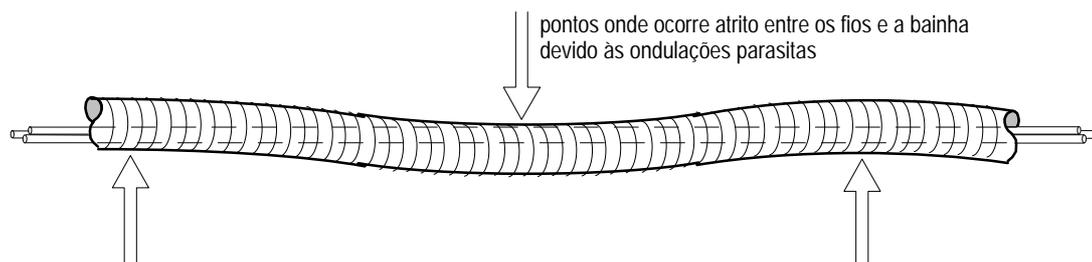


FIGURA 1.6 Ondulações parasitas da bainha

Nas peças pré-tracionadas só existe perda por atrito nos pontos de desvio da armadura poligonal antes da aplicação da protensão ao concreto. A correspondente variação da força na armadura de protensão deve ser determinada experimentalmente em função do tipo de aparelho de desvio empregado.

As perdas por atrito podem atingir valores elevados para cabos de grande comprimento e com muitas mudanças de direção. Pode-se atenuá-las, utilizando-se alguns artifícios na aplicação da protensão. O método mais comum consiste em aplicar a força de protensão a partir dos dois extremos do cabo. Neste caso, as ancoragens em ambas as extremidades são ativas (FIGURA 1.7b). A força no cabo cai linearmente a partir do ponto de sua aplicação. A FIGURA 1.7 representa a variação da força em função da distância  $x$ , sendo  $P_i$  o valor inicial da força de protensão na ancoragem esquerda.

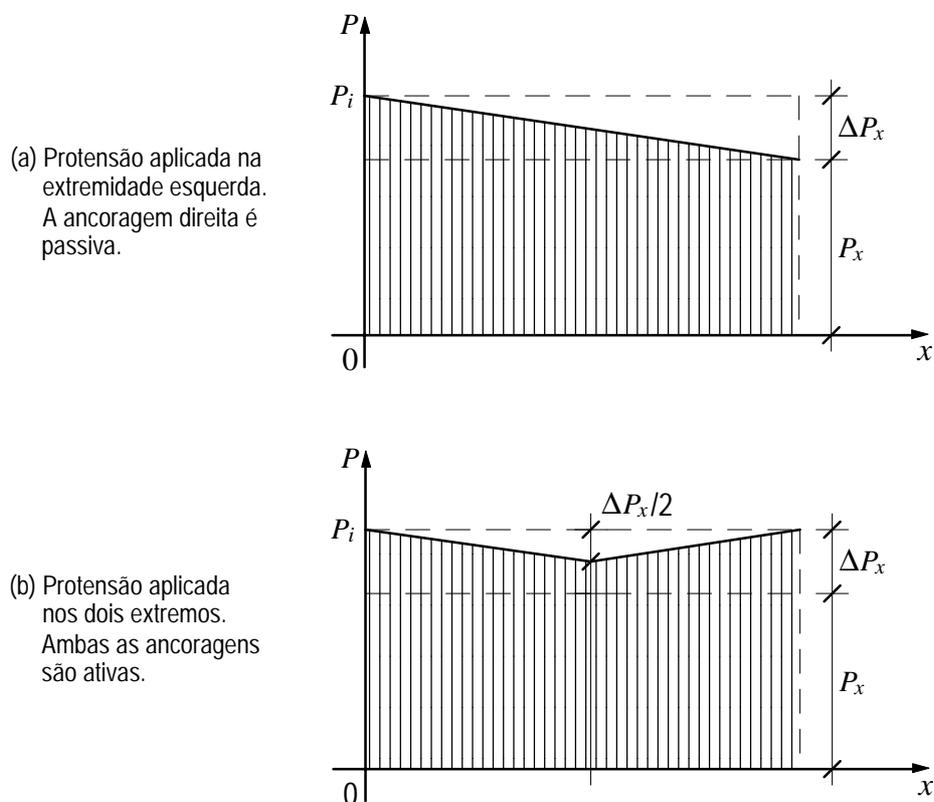


FIGURA 1.7 - Variação da força de protensão devido às perdas por atrito.

Com as perdas devido ao atrito, o valor mínimo da força é atingido na outra ancoragem com uma perda  $\Delta P_x$ . Por outro lado, aplicando a força de protensão a partir de ambos os extremos, a perda máxima será metade de  $\Delta P_x$  na seção média, entre ambas as ancoragens, conforme mostra a FIGURA 1.7b.

Um cabo tracionado pelas duas extremidades apresenta um ponto  $M$  do seu traçado, que não se desloca. Nesse ponto as perdas por atrito provenientes das extremidades A e B se igualam (FIGURA 1.8).

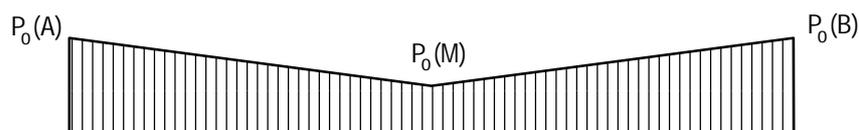


Diagrama da variação de  $P_0$  ao longo do cabo

FIGURA 1.8 - Variação da força de protensão num cabo protendido pelas duas extremidades.

De acordo com o exposto acima, pode-se dizer que ocorre uma perda devido ao atrito em curva, e outra devido às ondulações parasitas, tanto nos trechos curvos como nos retilíneos.

### 1.2.2.1 Perda por atrito em curva

Suponha-se um trecho curvo AB de um cabo e duas seções S e S' infinitamente próximas (FIGURA 1.9).

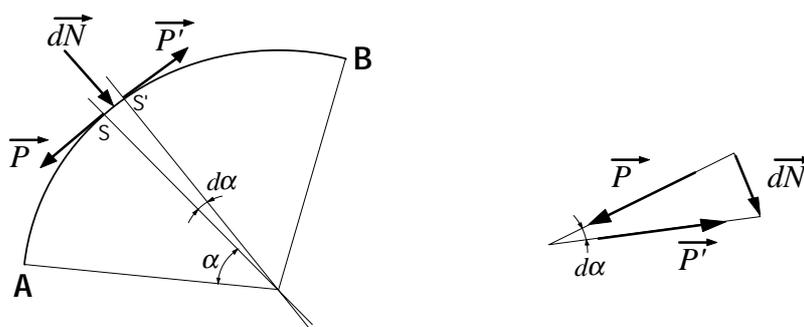


FIGURA 1.9 - Forças de atrito num cabo curvo.

Na seção S atua a força  $P$ . Na seção S' atua a força  $P'$  que é a força  $P$  menos a força de atrito  $dP$  entre S e S'. Matematicamente pode-se escrever:

$$P' = P - dP \quad (1-26)$$

$$dP = \mu dN \quad (1-27)$$

onde  $\mu$  é o coeficiente de atrito cabo-bainha.

O cabo tracionado com a força  $P$  exerce sobre a bainha a força  $dN$  que produz o atrito. Sabe-se que para ângulos muito pequenos, a tangente pode ser confundida com o próprio ângulo. Como  $d\alpha$  é um ângulo muito pequeno, do triângulo de forças vem que

$$dN = P \cdot d\alpha \quad (1-28)$$

e da equação de equilíbrio do cabo se obtém o valor da parcela  $dP$ , que é dado por

$$dP = -P \mu d\alpha \quad (1-29)$$

e,

$$\frac{dP}{P} = -\mu d\alpha \quad (1-30)$$

Integrando a eq. (1-30):

$$\int \frac{dP}{P} = -\mu \int d\alpha \quad (1-31)$$

$$\ln(P) = -\mu \alpha + \ln(C) \quad (1-32)$$

$$\ln(P) - \ln(C) = -\mu \alpha \quad (1-33)$$

Usando propriedade de logaritmos:

$$\ln\left(\frac{P}{C}\right) = -\mu \alpha \quad (1-34)$$

Tirando o exponencial dos dois termos obtém-se:

$$e^{\ln(P/C)} = e^{-\mu\alpha} \quad (1-35)$$

donde:

$$\frac{P}{C} = e^{-\mu\alpha} \quad \therefore \quad P = C \cdot e^{-\mu\alpha}$$

Para  $\alpha = 0$ ,  $P = P_A$ . Daí:

$$P_A = C \cdot e^0 = C \quad (1-36)$$

Logo,  $P = P_A \cdot e^{-\mu\alpha}$  ou seja,  $P_B = P_A \cdot e^{-\mu\alpha}$  é a expressão geral que dá a força na seção B do cabo, em função da força na seção A e do ângulo de desvio do cabo entre A e B.

Considere-se agora o cabo da FIGURA 1.10.

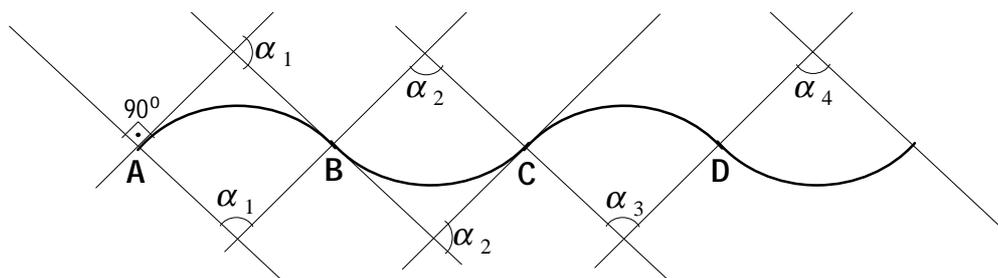


FIGURA 1.10 - Ângulos de curvatura num cabo sinuoso.

$$P_B = P_A \cdot e^{-\mu\alpha_1}$$

$$P_C = P_B \cdot e^{-\mu\alpha_2} = P_A \cdot e^{-\mu\alpha_1} \cdot e^{-\mu\alpha_2}$$

$$P_D = P_C \cdot e^{-\mu\alpha_3} = P_A \cdot e^{-\mu\alpha_1} \cdot e^{-\mu\alpha_2} \cdot e^{-\mu\alpha_3}$$

ou seja,  $P_D = P_A \cdot e^{-\mu(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}$

A força numa abscissa  $x$  do cabo só depende da força na origem e do somatório dos ângulos de desvio do cabo entre a origem e a abscissa.

$$P_N = P_A \cdot e^{-\mu \cdot \Sigma\alpha_i} \quad (1-37)$$

sendo  $\Sigma\alpha_i$  a somatória aritmética dos valores absolutos dos desvios do cabo entre A ( $x=0$ ) e N.

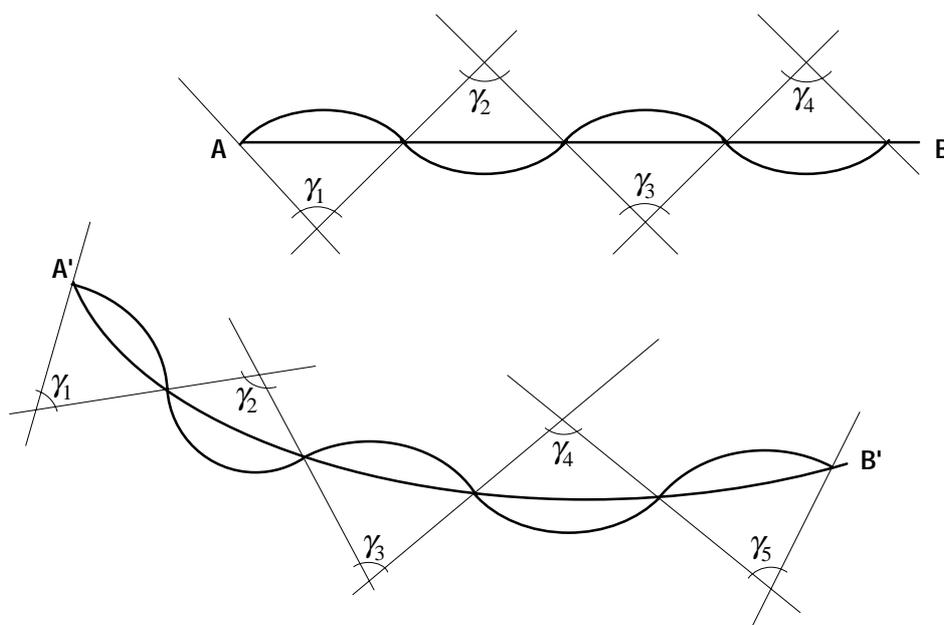


FIGURA 1.11 - Curvaturas em cabos retos e em cabos curvos.

### 1.2.2.2 Perda por atrito parasita

Fazendo uma analogia, a perda por atrito parasita pode ser analisada como uma sucessão de perdas em curva, tanto nos trechos retos de um cabo como nos curvos.

Utilizando a fórmula obtida no item anterior e admitindo que no trecho AB do cabo mostrado na FIGURA 1.11 existe uma ondulação de ângulo médio  $\gamma$ , tem-se que:

$$P_B = P_A \cdot e^{-\mu \cdot \Sigma\gamma} \quad (1-38)$$

Superpondo os dois efeitos, tem-se:

$$P_B = P_A \cdot e^{-\mu(\alpha + \Sigma\gamma)} \quad (1-39)$$

Fazendo  $\beta = \frac{\Sigma\gamma}{AB}$ , ou seja, a ondulação média (em radianos) por unidade de comprimento em reta ou em curva, tem-se que:

$$P_B = P_A \cdot e^{-\mu(\alpha + \beta.L)} \quad (1-40)$$

onde  $L = AB$  (distância entre dois pontos considerados do cabo).

A perda de protensão por atrito será:

$$\Delta P = P_B - P_A \left( 1 - e^{-\mu(\alpha + \beta.L)} \right) \quad (1-41)$$

$\beta$  = ondulação média por metro. Na falta de dados experimentais pode ser adotado o valor  $0,017 \text{ rad/m} = 1 \text{ grau por metro}$ .

De acordo com a NBR 7197, a perda da força protensão no cabo na seção de abcissa  $x$  deve ser determinada pela expressão:

$$\Delta P(x) = P_i \left( 1 - e^{-(\mu \Sigma\alpha + k \cdot x)} \right) \quad (1-42)$$

onde:

$P_i$  = força máxima aplicada à armadura de protensão pelo equipamento de tração;

$\Sigma\alpha$  = soma dos ângulos de desvio previstos, no trecho compreendido entre as abcissas 0 e  $x$ ;

$\mu$  = coeficiente de atrito aparente entre cabo e bainha. Na falta de dados experimentais pode ser estimado como segue:

$\mu = 0,50$  entre cabo e concreto (sem bainha);

$\mu = 0,30$  entre barras ou fios com mossas ou saliências e bainha metálica;

$\mu = 0,20$  entre fios lisos paralelos ou trançados e bainha metálica;

$\mu = 0,10$  entre fios lisos paralelos ou trançados e bainha metálica lubrificada;

$k$  = coeficiente de perda por metro provocada por curvaturas não intencionais do cabo; na falta de dados experimentais pode ser adotado o valor  $0,01\mu$ .

Quando elementos dentro da mesma bainha são protendidos individualmente, os valores de  $\mu$  acima devem ser acrescidos de 0,10.

### 1.2.3 Perdas por acomodação da ancoragem

Dependendo do dispositivo de ancoragem utilizado, no momento da liberação dos cabos dos macacos e consequente transferência dos esforços de protensão para a peça de concreto ocorre uma acomodação das peças de ancoragem. Os deslocamentos que ocorrem originam as chamadas perdas nas ancoragens. Essas perdas são mais significativas nos sistemas que utilizam cunhas, sendo, inclusive, usual o termo *perda por encunhamento*. A cunha sempre penetra na ancoragem quando entra em carga. Em outros sistemas, a transferência do esforço se faz sem perda de alongamento do cabo.

De acordo com a NBR 7197, as perdas por acomodação da ancoragem devem ser determinadas experimentalmente ou adotados os valores indicados pelos fabricantes dos dispositivos de ancoragem.

A penetração da cunha pode ser medida em ensaios que consistem em tracionar um cabo ancorado na outra extremidade por meio de cunhas. Mede-se o esforço  $P$  aplicado no cabo e a penetração  $\delta$  da cunha na ancoragem, traçando-se um diagrama  $P$ - $\delta$ , para valores crescentes de  $P$ .

Geralmente as firmas de protensão fornecem esses valores, determinados após a execução de muitas operações de protensão.

No sistema Freyssinet, de cunha central, os ensaios revelam os seguintes valores médios de penetração da cunha, para a protensão máxima (Pfeil, 1983a):

QUADRO 1.1 - Penetração da cunha de ancoragem no sistema Freyssinet.

Tipo de cabo (cunha central)	Esforços de protensão $P_{m\acute{a}x}$ (tf)	Penetração da cunha $\delta$ (mm)
12 $\phi$ 5 mm	27	4
12 $\phi$ 7 mm	52	7
12 $\phi$ 8 mm	68	8
6 $\phi$ 1/2"	75	12
12 $\phi$ 1/2"	150	12

Nos sistemas que utilizam cunha individual para cada fio ou cordoalha, observam-se os seguintes valores médios de perdas por encunhamento, para carga máxima ( $P_{m\acute{a}x}$ ):

fio $\phi$ 7 mm	$\delta = 5$ mm
cordoalha $\phi$ 1/2"	$\delta = 6$ mm
	$\delta = 4$ mm (cunha cravada com macaco)

## 1.3 PERDAS PROGRESSIVAS

### 1.3.1 Efeito da retração e da fluência do concreto

Além da deformação imediata sofrida quando da aplicação de uma carga, o concreto sofre outras deformações ao longo do tempo relacionadas com suas características físico-químicas.

A retração é um fenômeno que ocorre em função do equilíbrio higrotérmico do concreto com o meio ambiente. O concreto perde parte da água de amassamento nas primeiras idades, gradativamente, até atingir uma umidade relativamente estável. Essa perda produz uma diminuição de volume e um conseqüente encurtamento da peça que se manifesta ao longo do tempo.

A fluência, também chamada deformação lenta, é outro fenômeno que ocorre ao longo do tempo, decorrente da atuação de cargas de longa duração. Como a protensão introduz esforços de compressão na peça logo nas primeiras idades, estes esforços produzirão um encurtamento do concreto que se manifestará gradativamente.

Se a peça de concreto encurta, os cabos protendidos em seu interior também encurtam e conseqüentemente a força de protensão diminui. Ambos os fenômenos, retração e fluência, tendem a se estabilizar após um certo período.

### 1.3.2 Perdas devido à retração

A protensão só é aplicada à peça depois que o concreto já adquiriu resistência suficiente para suportar as tensões decorrentes da protensão e do peso próprio. Nessa época, uma parte da retração do concreto já ocorreu. A protensão deve ser adiada tanto quanto possível, com o objetivo de diminuir as perdas de protensão, pois a retração é mais intensa nas primeiras idades do concreto.

Admite-se também na pós-tensão, para simplificação, que a deformação do concreto é igual à do aço,

$$\epsilon_{cs} = \epsilon_p \quad (1-43)$$

mesmo que os cabos não sejam injetados.

Dessa forma, considerando  $t_o$  a idade do concreto quando se aplica a protensão, a retração ocorre ao longo do tempo, tendendo a um valor constante, conforme mostrado no gráfico da FIGURA 1.12.

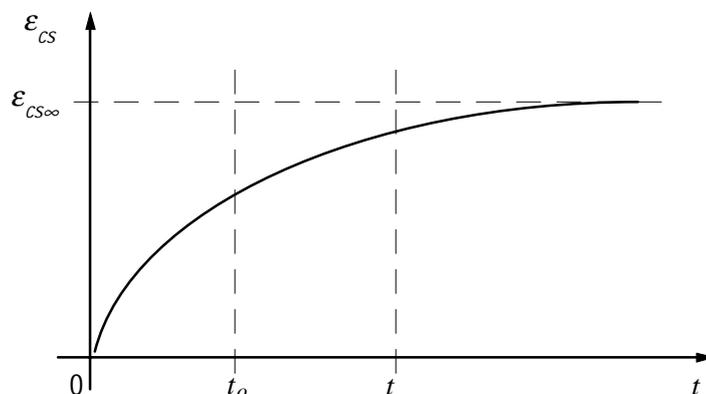


FIGURA 1.12 - Comportamento da retração do concreto ao longo do tempo.

No instante  $t$  a retração do concreto no intervalo de tempo  $t - t_0$  é dada por:

$$\varepsilon_{cs}(t, t_0) = \varepsilon_{cs\infty} [\beta_s(t) - \beta_s(t_0)] \quad (1-44)$$

onde:

$\varepsilon_{cs\infty} = \varepsilon_{1s} \cdot \varepsilon_{2s} =$  valor final da retração

$\varepsilon_{1s} =$  coeficiente que depende da umidade relativa do ambiente e da consistência do concreto. Para o caso particular de consistência correspondente a abatimentos entre 5 cm e 9 cm, e  $U \leq 90\%$  :

$$\varepsilon_{1s} \cdot 10^4 = -6,16 - \frac{U}{484} + \frac{U^2}{1590} \quad (1-45)$$

em que  $U$ , umidade relativa do ambiente, é expressa em percentagem. Os valores para  $U \leq 90\%$  e abatimentos de 0 a 4 cm são 25% menores e para abatimentos de 10 a 15 cm são 25% maiores. Para  $U > 90\%$ ,  $\varepsilon_{1s} = +1,0$ .

$\varepsilon_{2s} =$  coeficiente dependente da espessura fictícia da peça, dado por:

$$\varepsilon_{2s} = \frac{0,33 + 2 h_{fic}}{0,21 + 3 h_{fic}} \quad (1-46)$$

em que  $h_{fic}$  é a espessura fictícia em metros.

$\beta_s(t)$  ou  $\beta_s(t_0) =$  coeficiente relativo à retração no instante  $t$  ou  $t_0$ .

$t =$  idade fictícia do concreto no instante considerado, em dias.

$t_0 =$  idade fictícia do concreto no instante em que o efeito da retração começa a ser considerado, em dias.

$$\beta_s(t) = \frac{\left[\frac{t}{100}\right]^3 + A \left[\frac{t}{100}\right]^2 + B \left[\frac{t}{100}\right]}{\left[\frac{t}{100}\right]^3 + C \left[\frac{t}{100}\right]^2 + D \left[\frac{t}{100}\right] + E} \quad (1-47)$$

$$A = 40$$

$$B = 116 h^3 - 282 h^2 + 220 h - 4,8$$

$$C = 2,5 h^3 - 8,8 h + 40,7$$

$$D = -75 h^3 + 585 h^2 + 496 h - 6,8$$

$$E = -169 h^4 + 88 h^3 + 584 h^2 - 39 h + 0,8$$

onde:

$t =$  tempo em dias ( $t \geq 3$ )

$h =$  espessura fictícia em metros ( $0,05 \text{ m} \leq h \leq 1,6 \text{ m}$ )

(para valores de  $h$  fora deste intervalo, adotam-se os extremos correspondentes)

### 1.3.3 Idade fictícia do concreto

A idade a considerar (NBR 7197 - item 7.3.1) é a idade fictícia  $\alpha.t_{ef}$  em dias, quando o endurecimento se faz à temperatura ambiente de 20°C, e nos demais casos, quando não houver cura a vapor, a idade a considerar é a idade fictícia dada por:

$$t = \alpha \sum_i \frac{T_i + 10}{30} \cdot \Delta t_{ef,i} \quad (1-48)$$

onde:

$t$  = idade fictícia em dias.

$\alpha$  = coeficiente dependente da velocidade de endurecimento do cimento; na falta de dados experimentais permite-se empregar os valores do QUADRO 1.2.

$T_i$  = temperatura média diária do ambiente (°C)

$\Delta t_{ef,i}$  = período em dias, durante o qual a temperatura média diária do ambiente,  $T_i$  pode ser admitida constante.

QUADRO 1.2 - Valores de  $\alpha$  para fluência e retração em função da velocidade de endurecimento do cimento.

Cimento	$\alpha$	
	Fluência	Retração
De endurecimento lento AF250, AF320, POZ250, POZ320, MRS, ARS	1	1
De endurecimento normal CP250, CP320, CP400	2	1
De endurecimento rápido ARI	3	1

Simbologia para os cimentos: AF - alto forno  
ARI - alta resistência inicial  
ARS - alta resistência a sulfatos  
CP - cimento portland  
MRS - moderada resistência aos sulfatos  
POZ - pozolânico

### 1.3.4 Espessura fictícia da peça

De acordo com a NBR 7197, item 7.3.2, a espessura fictícia da peça é dada por

$$h_{fic} = \gamma \frac{2 A_c}{u_{ar}} \quad (1-49)$$

onde:

$\gamma$  = coeficiente dependente da umidade relativa do ambiente.

para  $U \leq 90\%$ ,  $\gamma = 1 + \exp(-7,8 + 0,1 U)$

para  $U > 90\%$ ,  $\gamma = 30$

$A_c$  = área da seção transversal da peça.

$u_{ar}$  = parte do perímetro externo da seção transversal da peça em contato com o ar.

A perda de protensão, no instante  $t$ , devido à retração no concreto será:

$$\Delta\sigma_{ps} = -E_p \varepsilon_{cs}(t-t_0) = -E_p \varepsilon_{cs\infty} [\beta_s(t) - \beta_s(t_0)] \quad (1-50)$$

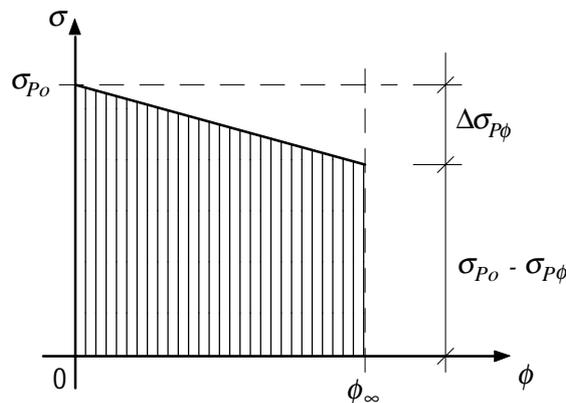
### 1.3.5 Perdas devido à fluência do concreto

Genericamente, a deformação devida à fluência do concreto é dada por

$$\varepsilon_{cc} = \frac{\sigma_c}{E_{c28}} \phi(t, t_0) \quad (1-51)$$

em que em que  $\phi(t, t_0)$  é o coeficiente de fluência. A deformação lenta pode atingir até 3 vezes a deformação imediata do concreto.

Ao longo da vida útil da peça os cabos vão se encurtando gradativamente à medida que o concreto se deforma, devido à tensão de protensão. Conseqüentemente, a força de protensão, que é uma das causas da fluência, está diminuindo. Ou seja, a deformação lenta influencia a força de protensão e esta, por sua vez, influencia a deformação lenta; uma atua sobre a outra. Para formular uma expressão que traduza este fenômeno, admite-se a hipótese simplificadora de que a tensão na armadura de protensão cai linearmente durante o período no qual a fluência ocorre (FIGURA 1.13).



$\sigma_{P_0}$  = tensão devido à força  $P_0$

$\Delta\sigma_{P_φ}$  = tensão perdida devido à deformação lenta

$\phi_{\infty}$  = coeficiente de fluência no tempo infinito

FIGURA 1.13 - Decaimento da tensão na armadura ativa devido a deformação lenta.

Admitindo que as deformações finais do aço e do concreto, devido à fluência, são iguais, tem-se que:

$$\epsilon_{cc} = \epsilon_p \quad (1-52)$$

Partindo da eq. (1-52) e do diagrama de tensões da FIGURA 1.14, pode-se chegar a uma equação para o cálculo da perda de protensão devido à deformação lenta do concreto de acordo com a hipótese simplificadora adotada.

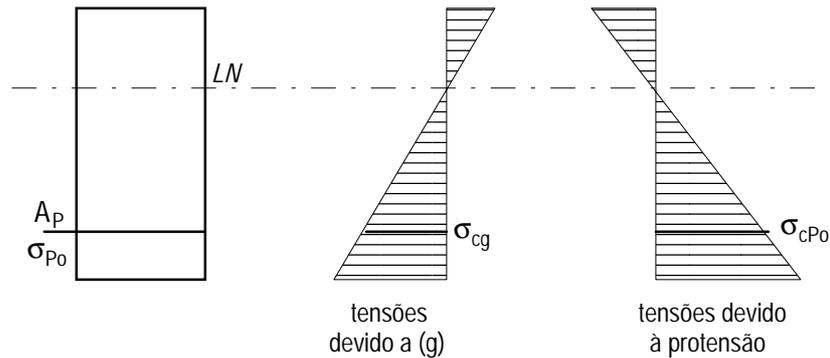


FIGURA 1.14 - Diagrama de tensões na seção protendida.

Na região da armadura de protensão, ocorre que:

- a) O peso próprio provoca um alongamento do concreto ao longo do tempo que pode ser expresso assim:

$$\epsilon_{cg\infty} = \frac{\sigma_{cg}}{E_{c28}} \phi_{\infty} \quad (1-53)$$

- b) Como a tensão na armadura de protensão varia linearmente ao longo do tempo, utiliza-se uma tensão média para calcular a deformação devido à fluência:

$$\epsilon_{cP\infty} = - \frac{\sigma_{P_0} - \frac{\Delta\sigma_{P\phi}}{2}}{\sigma_{P_0}} \frac{\sigma_{cP_0}}{E_c} \phi_{\infty} \quad (1-54)$$

- c) Na fase final do processo de deformação lenta, a tensão de protensão é menor que a tensão média utilizada no item b). Sendo assim, desconta-se uma parcela da deformação devida à protensão com a expressão:

$$\epsilon_{cP_0} = \frac{\Delta\sigma_{P\phi}}{\sigma_{P_0}} \frac{\sigma_{cP_0}}{E_c} \quad (1-55)$$

Fazendo um balanço das deformações chega-se à seguinte equação:

$$\varepsilon_{cg} \cdot \phi_{\infty} - \frac{\sigma_{P_o} - \frac{\Delta \sigma_{P\phi}}{2}}{\sigma_{P_o}} \varepsilon_{cP_o} \cdot \phi_{\infty} + \frac{\Delta \sigma_{P\phi}}{\sigma_{P_o}} \varepsilon_{cP_o} = - \frac{\Delta \sigma_{P\phi}}{\sigma_{P_o}} \varepsilon_{P_o} \quad (1-56)$$

- o primeiro termo representa a deformação lenta (alongamento) do concreto devido ao peso próprio;
- o segundo termo representa a deformação lenta (encurtamento) do concreto devido à tensão de protensão variável linearmente na armadura;
- o terceiro termo representa a deformação elástica (alongamento) do concreto devido à variação de tensão na armadura de protensão. Trata-se de uma deformação restituída;
- o quarto termo representa a deformação (encurtamento) na armadura de protensão devido à variação de tensão na mesma. Esta variação é a perda de protensão por fluência do concreto.

$$\text{Fazendo} \quad \alpha = \frac{E_p}{E_c}; \quad \varepsilon_c = \frac{\sigma_c}{E_c}; \quad \varepsilon_p = \frac{\sigma_p}{E_p}$$

e desenvolvendo a eq. (1-56), obtém-se uma equação para a perda de protensão pela deformação lenta.

$$\Delta \sigma_{p\phi} = \frac{\alpha \phi (\sigma_{cg} - |\sigma_{cP_o}|)}{1 - \alpha \frac{|\sigma_{cP_o}|}{\sigma_{P_o}} \left(1 + \frac{\phi}{2}\right)} \quad (1-57)$$

No instante  $t$  a deformação devido à fluência é dada por:

$$\varepsilon_{cc}(t, t_0) = \frac{\sigma_c}{E_{c28}} \phi(t, t_0) \quad (1-58)$$

com  $E_{c28}$  secante, permitindo-se adotar para este módulo o valor igual a 0,9 do  $E_c$  definido na NBR 6118 com  $j = 28$  dias. O coeficiente de fluência  $\phi(t, t_0)$  é dado por:

$$\phi(t, t_0) = \phi_a + \phi_{f\infty} [\beta_f(t) - \beta_f(t_0)] + \phi_{d\infty} \beta_d \quad (1-59)$$

onde:

- $t$  = idade fictícia do concreto no instante considerado, em dias.
- $t_0$  = idade fictícia do concreto ao ser feito o carregamento, em dias.
- $\phi_a$  = coeficiente de fluência rápida dado pela expressão:

$$\phi_a = 0,8 \left(1 - \frac{f_c(t_0)}{f_c(t_{\infty})}\right) \quad (1-60)$$

$$\frac{f_c(t_0)}{f_c(t_\infty)} = \frac{9t_0(t_0 + 42)}{(9t_0 + 40)(t_0 + 61)}$$

$\phi_{f_\infty} = \phi_{1c} \times \phi_{2c}$  = valor final do coeficiente de deformação lenta reversível:

$\phi_{1c}$  = coeficiente que depende da umidade relativa do ambiente e da consistência do concreto. Para o caso particular de consistência correspondente a abatimentos entre 5 cm e 9 cm:

para  $U \leq 90\%$  ,  $\phi_{1c} = 4,45 - 0,035 U$

para  $U > 90\%$  ,  $\phi_{1c} = 0,8$

em que  $U$ , umidade relativa do ambiente, é expressa em percentagem. Os valores para abatimentos de 0 a 4 cm são 25 % menores e, para abatimentos entre 10 e 15 cm, 25 % maiores.

$\phi_{2c}$  = coeficiente dependente da espessura fictícia da peça.  $h_{fic}$  é a espessura fictícia em metros :

$$\phi_{2c} = \frac{0,42 + h_{fic}}{0,20 + h_{fic}} \quad (1-61)$$

$\beta_f(t)$  ou  $\beta_f(t_0)$  = coeficiente relativo à deformação lenta irreversível, função da idade do concreto.

$$\beta_f(t) = \frac{t^2 + A t + B}{t^2 + C t + D} \quad (1-62)$$

$$A = 42 h^3 - 350 h^2 + 588 h + 113$$

$$B = 768 h^3 - 3060 h^2 + 3234 h - 23$$

$$C = -200 h^3 + 13 h^2 + 1090 h + 183$$

$$D = 7579 h^3 - 31916 h^2 + 35343 h + 1931$$

$t$  = tempo em dias ( $t \geq 3$ )

$h$  = espessura fictícia em metros ( $0,05 \text{ m} \leq h \leq 1,6 \text{ m}$ )  
( para valores de  $h$  fora deste intervalo, adotam-se os extremos correspondentes.)

$\phi_{d_\infty}$  = valor final do coeficiente de deformação lenta reversível considerado igual a 0,4.

$\beta_d$  = coeficiente relativo à deformação lenta reversível, função do tempo ( $t, t_0$ ) decorrido após o carregamento.

$$\beta_d = \frac{t - t_0 + 20}{t - t_0 + 70} \quad (1-63)$$

### 1.3.6 Perdas por relaxação do aço

A armadura de protensão estirada e mantida com comprimento constante sofre um alívio de tensão ao longo do tempo. Este fenômeno é chamado de relaxação do aço.

A intensidade de relaxação do aço é determinada pelo coeficiente  $\psi(t, t_0)$  definido por:

$$\Delta\sigma_{pri}(t, t_0) = \psi(t, t_0) \times \sigma_{pi} \quad (1-64)$$

onde:

$\Delta\sigma_{pri}(t, t_0)$  = perda de tensão por relaxação pura (com comprimento constante) desde o instante  $t_0$  do estiramento da armadura até o instante  $t$  considerado.

$\sigma_{pi}$  = tensão na armadura de protensão no instante de seu estiramento.

O coeficiente  $\psi(t, t_0)$  depende de se tratar de pré-tração ou pós-tração, sendo afetado pelas perdas imediatas de tensão do aço na seção considerada da peça.

Os valores da relaxação são fixados nas especificações correspondentes aos aços de protensão empregados. As especificações NBR 7482 e NBR 7483 estabelecem valores médios, medidos após 1000 horas à temperatura constante de 20 °C, para as perdas de tensão referidas a três valores básicos da tensão inicial: 60 %, 70 % e 80 % da resistência característica  $f_{ptk}$ . Esses valores designados respectivamente por  $\psi_{60}$ ,  $\psi_{70}$  e  $\psi_{80}$ , dependem da classe de relaxação do aço e são reproduzidos no QUADRO 1.3.

QUADRO 1.3 - Valores de  $\psi_{60}$ ,  $\psi_{70}$  e  $\psi_{80}$  (para 1000 horas e 20 °C)

Tensão inicial	$\psi$	Classe de relaxação	
		Relaxação normal	Relaxação baixa
$\sigma_{pi} = 0,60 f_{ptk}$	$\psi_{60}$	4,5 %	1,5 %
$\sigma_{pi} = 0,70 f_{ptk}$	$\psi_{70}$	7,0 %	2,5 %
$\sigma_{pi} = 0,80 f_{ptk}$	$\psi_{80}$	12,0 %	3,5 %

Os valores correspondentes a tempos diferentes de 1000 horas, sempre a 20 °C, podem ser determinados a partir da seguinte expressão:

$$\psi(t, t_0) = \psi_{1000} \left( \frac{t - t_0}{1000} \right)^{0,15} \quad (1-65)$$

Para tensões inferiores a  $0,5 f_{ptk}$ , admite-se não haver perda de tensão por relaxação. Para tensões intermediárias entre os valores fixados na Tabela 1.2, permite-se a interpolação linear.

Para tensões superiores a  $0,80 f_{ptk}$ , na falta de dados experimentais, permite-se a extrapolação a partir dos valores do QUADRO 1.3.

A relaxação do aço de protensão numa peça em serviço não se dá da mesma maneira que a relaxação pura medida no laboratório, sob temperatura e tensão constantes. Na obra, a relaxação do aço se processa sob temperatura e tensão variáveis, devido às variações térmicas do meio ambiente e às deformações do concreto sob o efeito da retração, fluência e cargas acidentais.

Para avaliar a relaxação do aço nessas condições, pode-se empregar a expressão:

$$\Delta\sigma_{pr} = \Delta\sigma_{pri} \left( 1 - \frac{\Delta\sigma_{p,s+\phi}}{\sigma_{pi}} \right) \quad (1-66)$$

onde:

$\Delta\sigma_{pr}$  = perda de tensão por relaxação considerando a queda de tensão no aço devido à retração e fluência do concreto

$\Delta\sigma_{pri}$  = perda por relaxação pura do aço para a tensão  $\sigma_{pi}$

$\Delta\sigma_{p,s+\phi}$  = perda de protensão devido à retração e fluência do concreto

$\sigma_{pi}$  = tensão inicial de protensão no instante do estiramento da armadura

---

# PROGRAMA PARA O CÁLCULO DOS COEFICIENTES DE RETRAÇÃO E FLUÊNCIA DO CONCRETO

---

## 2.1 COMENTÁRIOS

Os coeficientes de retração e fluência do concreto são importantes para o cálculo das perdas de protensão. O cálculo manual desses coeficientes pode ser bastante trabalhoso. Não obstante, a implementação das expressões de cálculo num computador é tarefa relativamente simples para quem tem algum conhecimento de programação.

Neste capítulo são fornecidos os fluxogramas e uma listagem de um programa para o cálculo dos referidos coeficientes. Os fluxogramas representam graficamente o fluxo do processamento permitindo que as expressões sejam programadas em qualquer linguagem de programação. A listagem é de um programa escrito em Borland Delphi 1.0.



FIGURA 2.1 - Tela de apresentação do programa

**Retração e Fluência do Concreto**

Arquivo Ajuda

Dados

Área da seção de concreto (Ac) 1200,00 cm<sup>2</sup>

Perímetro da seção em contato com o ar (uar) 180,00 cm

Umidade relativa do ar média (U) 56,00 %

Temperatura média (T) 19,00 graus C

Abatimento do concreto (slump) 8,00 cm

Tipo de cimento utilizado CP

Idade do concreto:

\* no início do período considerado (t<sub>0</sub>) 3 dias

\* no final do período considerado (t) 3000 dias

Resultados

Coeficiente de fluência φ (t,t<sub>0</sub>) 4.081

Retração do concreto ε<sub>cs</sub> (t,t<sub>0</sub>) -3.77564E-04

Copyright 1996, Gustavo de Souza Veríssimo

FIGURA 2.2 - Tela principal do programa

## 2.2 LISTAGENS

Arquivo: RETRACAO.DPR

```
program Retracao;  
  
uses  
  Forms,  
  MainForm in 'MAINFORM.PAS' {Form1},  
  About in 'ABOUT.PAS' {AboutBox};  
  
{ $R *.RES }  
  
begin  
  Application.CreateForm(TForm1, Form1);  
  Application.CreateForm(TAboutBox, AboutBox);  
  AboutBox.ShowModal;  
  AboutBox.Update ; { Process any pending Windows paint messages }  
  Application.Run;  
end.
```

**Arquivo: RETRACAO.DPR**

```
unit MainForm;  
  
interface  
  
uses  
  SysUtils, WinTypes, WinProcs, Messages, Classes, Graphics, Controls, Forms,  
  Dialogs, StdCtrls, ExtCtrls, OvcBase, OvcEF, OvcPB, OvcNF, Menus;  
  
type  
  TForm1 = class(TForm)  
    Panel1: TPanel;  
    MainMenu1: TMainMenu;  
    Arquivo: TMenuItem;  
    Sair1: TMenuItem;  
    Ajuda1: TMenuItem;  
    AboutRetracaol: TMenuItem;  
    Panel2: TPanel;  
    Label1: TLabel;  
    GroupBox1: TGroupBox;  
    GroupBox2: TGroupBox;  
    Label2: TLabel;  
    Label3: TLabel;  
    Label4: TLabel;  
    Label5: TLabel;  
    Label6: TLabel;  
    Label7: TLabel;  
    Act: TOvcNumericField;  
    OvcController1: TOvcController;  
    uarT: TOvcNumericField;  
    UT: TOvcNumericField;  
    TT: TOvcNumericField;  
    SlumpT: TOvcNumericField;  
    t0T: TOvcNumericField;  
    tft: TOvcNumericField;  
    Label8: TLabel;  
    Label9: TLabel;  
    Label10: TLabel;  
    cimT: TComboBox;  
    Label11: TLabel;  
    Label12: TLabel;  
    Label13: TLabel;  
    Label14: TLabel;  
    ecsT: TEdit;  
    Fit: TEdit;  
    Label15: TLabel;  
    Label16: TLabel;  
    Label17: TLabel;  
    Label18: TLabel;  
    Label19: TLabel;  
    Label20: TLabel;  
    Label21: TLabel;  
    N1: TMenuItem;  
    ndice1: TMenuItem;  
    Pesquisaportpicol: TMenuItem;  
    procedure Sair1Click(Sender: TObject);  
    procedure AboutRetracaolClick(Sender: TObject);  
    procedure ActExit(Sender: TObject);  
  private  
    { Private declarations }  
  public  
    { Public declarations }  
  end;  
  
var  
  Form1: TForm1;  
  
implementation  
{ $R *.DFM }
```

```

uses About;

Var Ac      : double;      { Area da secão de concreto em cm2 }
    uar      : double;      { Parte do perimetro da secão em
                             contato direto com o ar em cm }
    U        : double;      { Umidade relativa do ambiente em % }
    slump    : double;      { Abatimento tronco-conico em cm }
    Temp     : double;      { temperatura media do ambiente em graus C }
    t0       : double;      { tempo em dias no inicio da retracao }
    tf       : double;      { tempo em dias no final da retracao }
    t0f      : double;      { idade fictica do concreto no inicio da retracao }
    tff      : double;      { idade fictica do concreto no final da retracao }
    Gama     : double;      { coeficiente funcao da umidade relativa }
    hf       : double;      { altura ficticia da peca }

    els,e2s  : double;      { coeficientes de retracao }
    A,B,C,D,E : double;      { coeficientes de calculo de Beta }
    h2,h3     : double;      { potencias da altura ficticia }
    ecs       : double;      { ecs = els * e2s }
    Fia       : double;      { coeficiente de fluencia rapida }
    Filc,Fi2c : double;      { coeficientes de fluencia }
    Fid       : double;      { coef. de deform. lenta reversivel }
    Betad     : double;      { coef. relativo a deform. lenta reversivel f(t) }
    Fi        : double;      { valor final do coef. de fluencia }
    cim       : string[3];   { tipo do cimento }
    alfa      : integer;     { coef. depend. do tipo do cimento }

procedure TForm1.Sair1Click(Sender: TObject);
begin
    if MessageDlg('Terminar o programa?',
        mtInformation,[mbYes,mbNo],0) = mrYes then Close;
end;

procedure TForm1.AboutRetracaõ1Click(Sender: TObject);
begin
    AboutBox.ShowModal;
end;

Function BETAs(t:double):double;
Var x,x2,x3 : double;
begin
    x := t / 100;
    x2 := x * x;
    x3 := x2 * x;
    BETAs := (x3 + A * x2 + B * x) / (x3 + C * x2 + D * x + E);
end; {BETAs}

Function BETAf(t:real):real;
var Betax : double;
begin
    h2 := hf * hf;
    h3 := h2 * hf;
    A := 42 * h3 - 350 * h2 + 588 * hf + 113;
    B := 768 * h3 - 3060 * h2 + 3234 * hf - 23;
    C := -200 * h3 + 13 * h2 + 1090 * hf + 183;
    D := 7579 * h3 - 31916 * h2 + 35343.0 * hf + 1931;
    Betax := (1.0 * t * t + A * t + B)/(t * t + C * t + D);
    BETAf := Betax;
end; {BETAf}

procedure ProcessaDados;
var s : string[60];
begin
    { Calculo da idade ficticia do concreto para a retração }
    t0f := (Temp + 10) / 30 * t0 ;
    tff := (Temp + 10) / 30 * tf ;

    { Calculo da altura ficticia e dos coeficientes Els e E2s }
    if U<=90 then begin
        Gama := 1 + exp(-7.8 + 0.1 * U) ;
        els := (-6.16 - U/484 + U*U/1590)/1e4 ;
    end;
end;

```

```

    if slump < 5 then els := els * 0.75 ;
    if slump > 9 then els := els * 1.25 ;
end
else begin
    Gama := 30 ;
    els := 1e-4 ;
end;
if uar>0 then hf := Gama * 2 * Ac / uar else hf:=0;
e2s := (33 + 2 * hf) / (20.8 + 3 * hf) ;

{ calculo dos coeficientes Betast e Betast0 }
if t0f < 3 then t0f := 3 ;
if hf < 5 then hf := 5 ;
if hf > 160 then hf := 160 ;
hf := hf / 100 ;
h2 := hf * hf ;
h3 := h2 * hf ;
A := 40 ;
B := 116 * h3 - 282 * h2 + 220 * hf - 4.8 ;
C := 2.5 * h3 - 8.8 * hf + 40.7 ;
D := -75 * h3 + 585 * h2 + 496 * hf - 6.8 ;
E := -169 * h3 * hf + 88 * h3 + 584 * h2 - 39 * hf + 0.8 ;
ecs := els * e2s * (BETAS(tff) - BETAS(t0f)) ;
Str(ecs,S) ;
Delete(S,Length(S)-3,2);
Form1.ecsT.Text := ' '+copy(S,1,7)+copy(S,length(S)-4,5) ;

{ Calculo da idade ficticia do concreto para a fluencia }
if (cim='AF') or (cim='POZ') or (cim='MRS') or (cim='ARS') then alfa := 1
else if cim='CP' then alfa := 2
    else if cim='ARI' then alfa := 3
        else alfa := 1 ;
t0f := alfa * t0f ;
tff := alfa * tff ;

{ calculo dos coeficientes Fia, Filc, Fi2c }
Fia := 0.8 * (1 - 9*t0f*(t0f + 42)/(9*t0f + 40)/(t0f + 61)) ;
if U<=90 then begin
    Filc := 4.45 - 0.035 * U;
end
else begin
    Filc := 0.8;
end;
if slump < 5 then Filc := Filc * 0.75 ;
if slump > 9 then Filc := Filc * 1.25 ;
Fi2c := (0.42 + hf)/(0.20 + hf) ;

{ calculo dos coeficientes Betaf(t) e Betaf(t0) }
Fid := 0.4;
Betad := (tff - t0f + 20)/(tff - t0f + 70);

{ calculo do valor final da fluencia }
Fi := Fia + Filc * Fi2c * (BETAF(tff) - BETAF(t0f)) + Fid * Betad;
Str(Fi:7:3,S);
Form1.FiT.Text := S ;
end; {ProcessaDados}

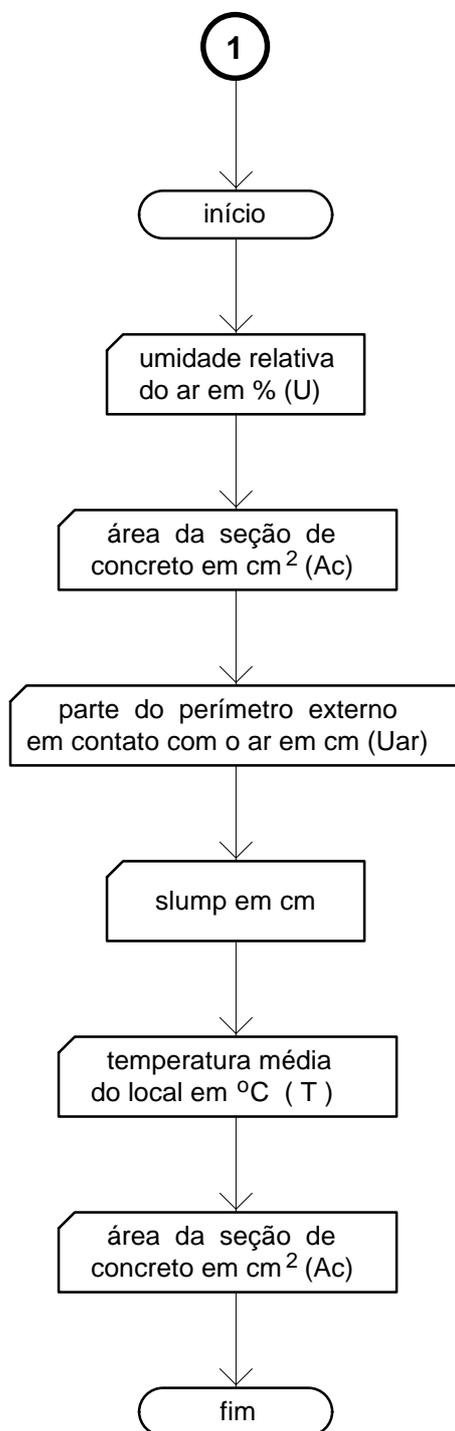
procedure TForm1.AcTExit(Sender: TObject);
begin
    AcT.GetValue(Ac);
    uarT.GetValue(uar);
    UT.GetValue(U);
    TT.GetValue(Temp);
    SlumpT.GetValue(slump);
    cim := cimT.Text;
    t0T.GetValue(t0);
    tfT.GetValue(tf);
    ProcessaDados;
end;

end.

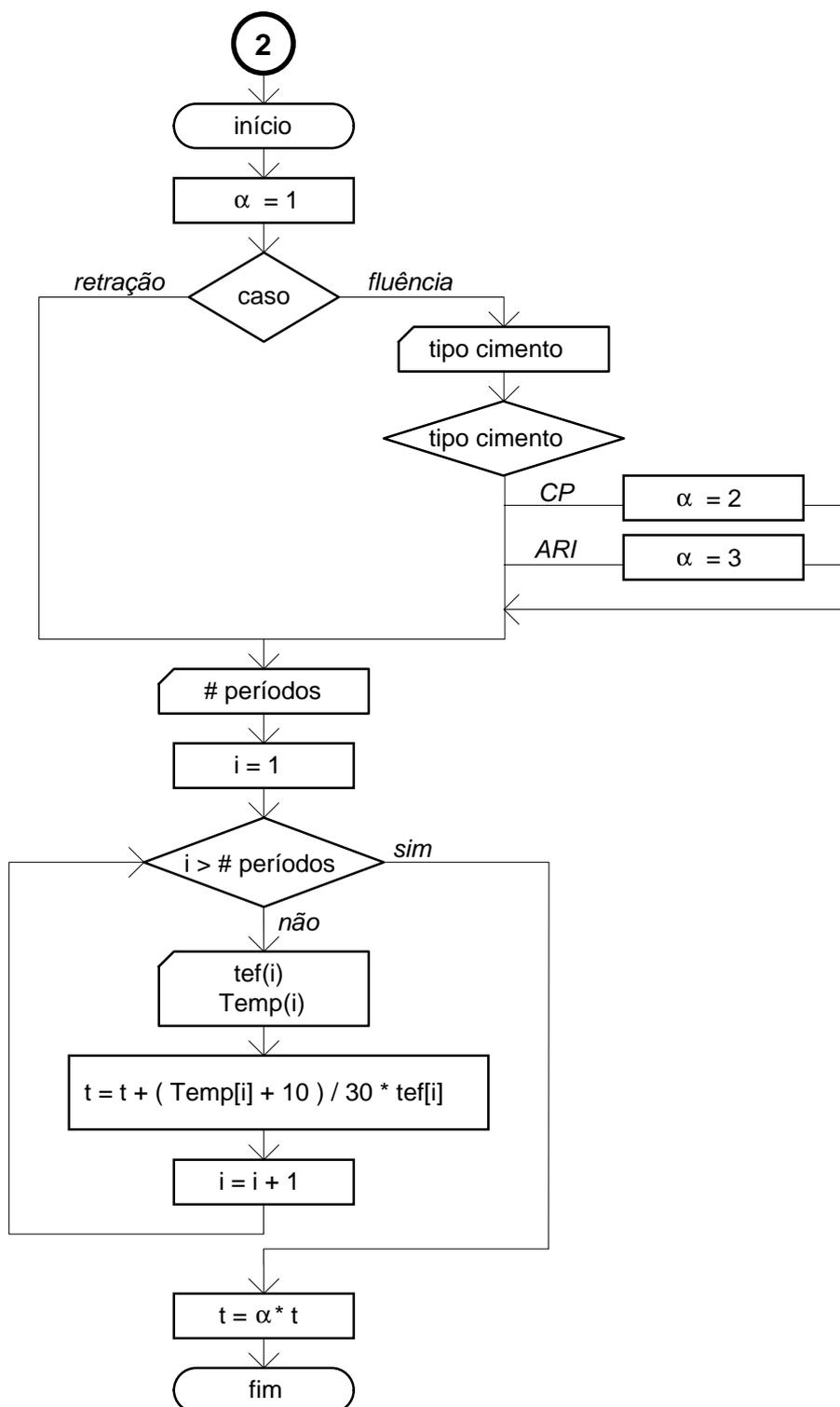
```

## 2.3 FLUXOGRAMAS

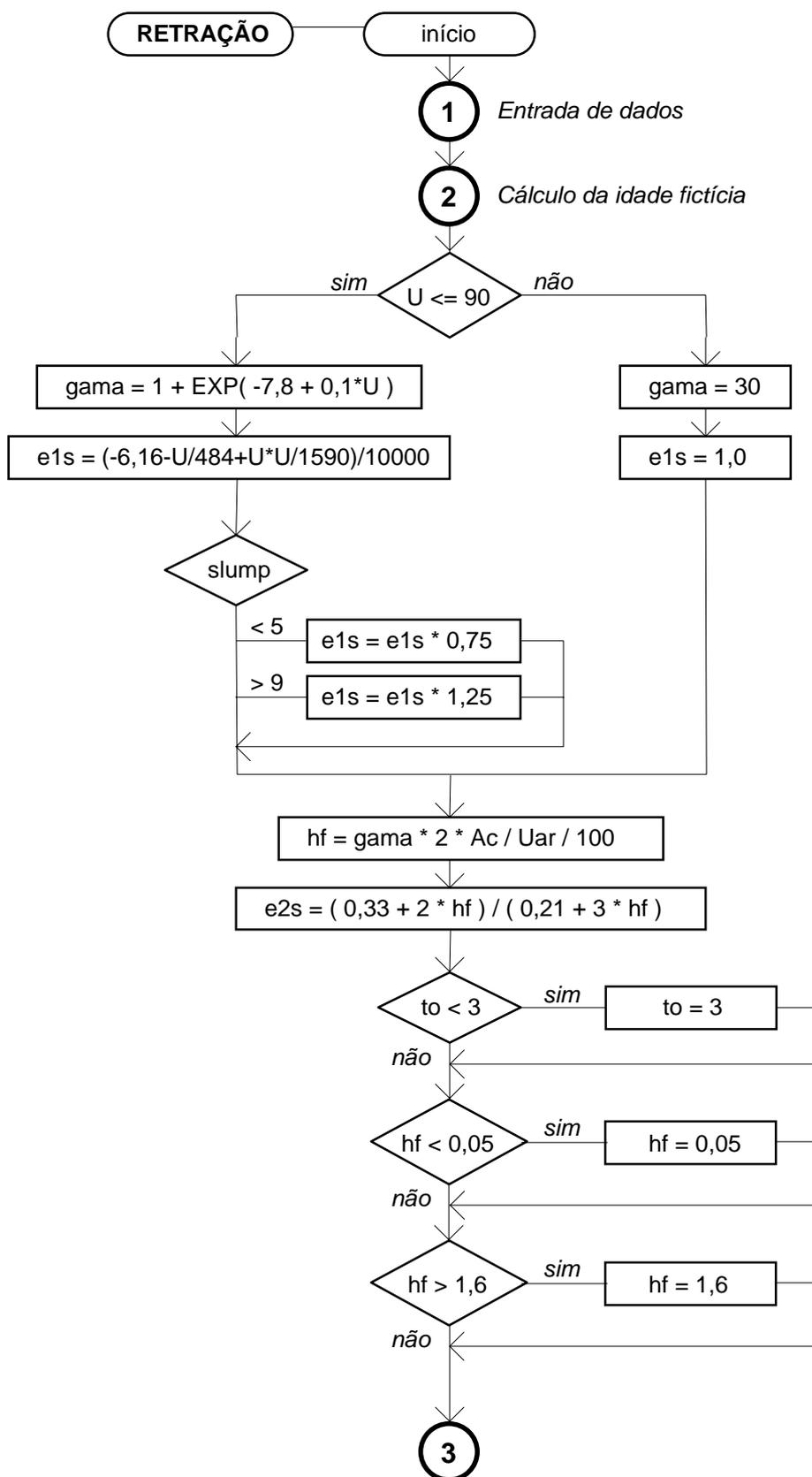
### 2.3.1 Entrada de dados



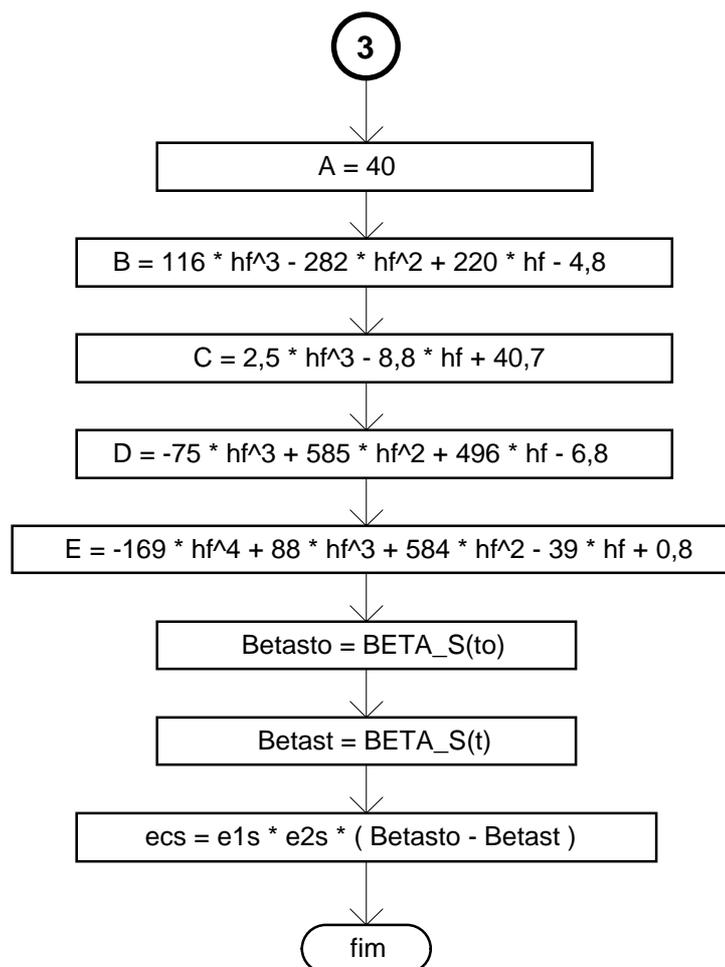
### 2.3.2 Fluxograma para o cálculo da idade fictícia do concreto



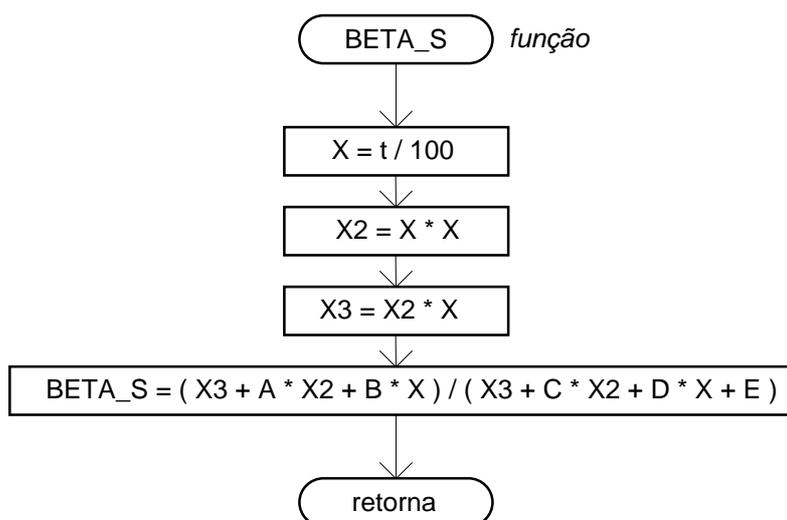
### 2.3.2 Fluxograma para o cálculo da retração do concreto



Nota: EXP = função exponencial

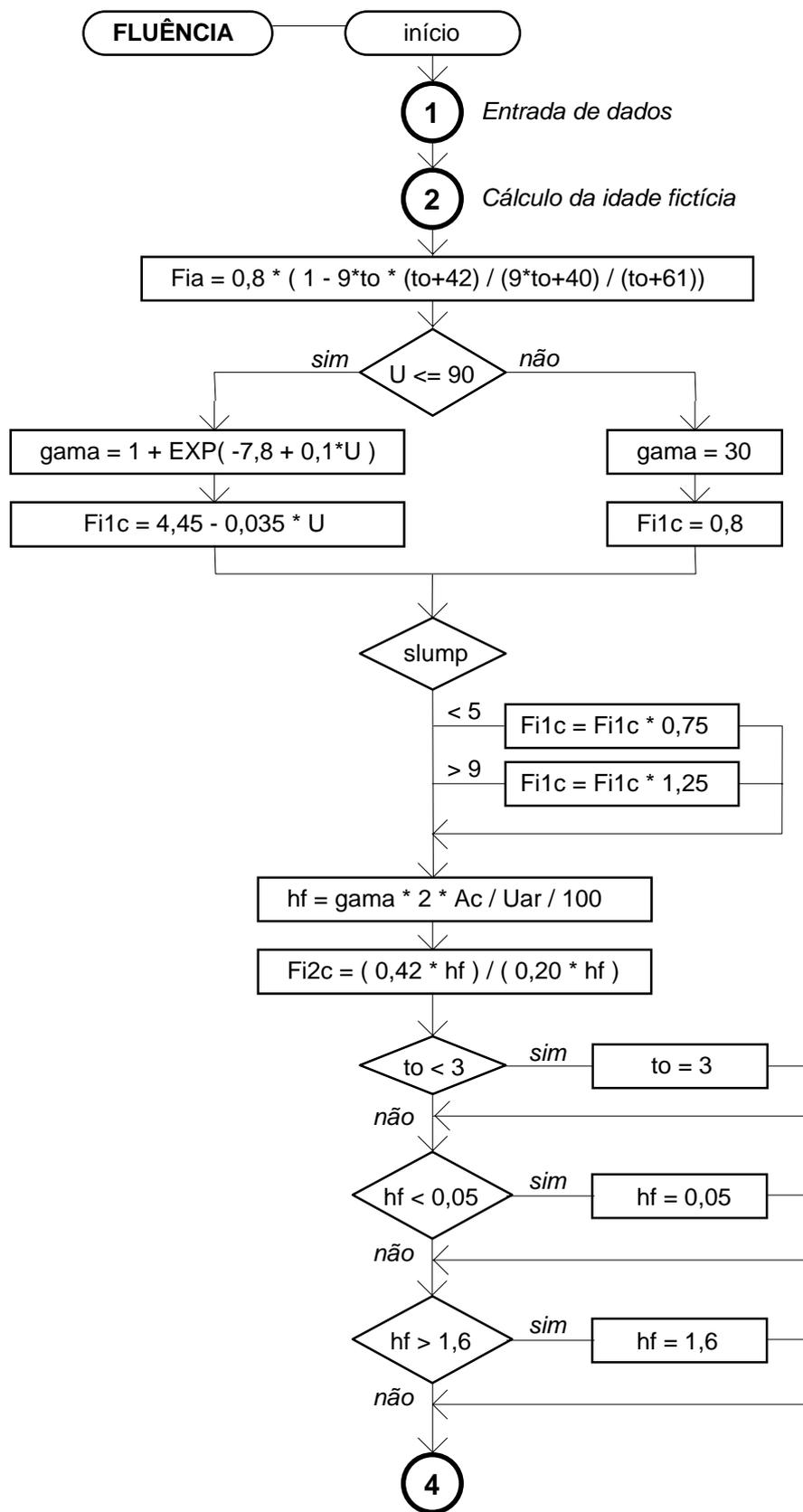


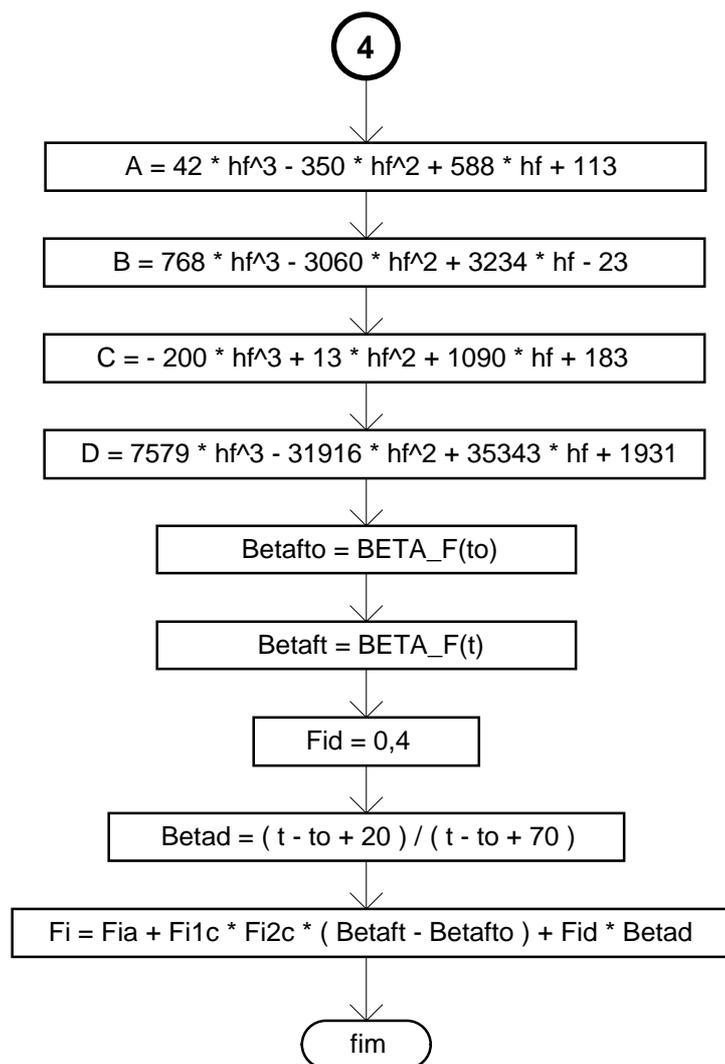
Função  $\beta_s$  para o cálculo da retração



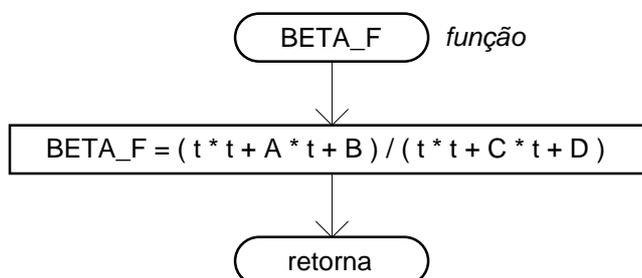
Nota:  $t$  = idade fictícia do concreto no instante considerado

### 2.3.3 Fluxograma para o cálculo do coeficiente de fluência do concreto





Função  $\beta_f$  para o cálculo do coeficiente de fluência



Nota:  $t$  = idade fictícia do concreto no instante considerado

## Bibliografia

1. **ABNT** (1978) Associação Brasileira de Normas Técnicas, "Projeto e Execução de Obras em Concreto Armado", *NBR 6118/78*, Rio de Janeiro.
  2. **ABNT** (1989) Associação Brasileira de Normas Técnicas, "Projeto de Estruturas de Concreto Protendido", *NBR 7197/89*, Rio de Janeiro.
  3. **C.E.B.** (1990); Código Modelo do CEB/FIP
  4. **Hanai**, João Bento de (1988); "Fundamentos do Concreto Protendido", Notas de aula, EESC-USP, São Carlos.
  5. **Hurst**, M.K.(1998); "Prestressed Concrete Design", 2ª. edição, Routledge, Londres.
  6. **Leonhardt**, Fritz (1979); "Construções de Concreto", Editora Interciência, Vol. 5, Rio de Janeiro.
  7. **Machado**, Carlos Freire (1992); Notas de aula, Belo Horizonte.
  8. **Mason**, Jayme (1976); "Concreto Armado e Protendido: Princípios e Aplicações", Livros Técnicos e Científicos Editora S/A, Rio de Janeiro.
  9. **Pfeil**, Walter (1984); "Concreto Protendido Vol. 1 - Introdução", LTC Editora, Rio de Janeiro.
  10. **Pfeil**, Walter (1983a); "Concreto Protendido Vol. 2 - Processos Construtivos/Perdas de Protensão", 2a. ed., Livros Técnicos e Científicos Editora S/A, Rio de Janeiro.
  11. **Pfeil**, Walter (1983b); "Concreto Protendido Vol. 3 - Dimensionamento à Flexão", Livros Técnicos e Científicos Editora S/A, Rio de Janeiro.
  12. **Süssekind**, José Carlos (1985); "Curso de Concreto", Vol. 01, 4a. edição. Editora Globo, Rio de Janeiro.
-