

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

UNESP - Campus de Bauru/SP

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental

FUNDAMENTOS DO CONCRETO PROTENDIDO

Prof. Dr. PAULO SÉRGIO BASTOS

(wwwp.feb.unesp.br/pbastos)

Bauru/SP
Março/2025

APRESENTAÇÃO

Este texto é utilizado como notas de aula na disciplina Concreto Protendido, do curso de Engenharia Civil da Universidade Estadual Paulista – UNESP, Bauru/SP. O texto está de acordo com as prescrições da norma NBR 6118/2023 (“*Projeto de estruturas de concreto*”), para projeto e dimensionamento de estruturas de Concreto Armado e Concreto Protendido, e toma como base a excelente bibliografia, nacional e estrangeira, mostrada nas referências. Nesta versão os “Valores-limites por ocasião da operação de protensão” foram atualizados conforme alteração contida na Errata 1 da NBR 6118, publicada em 22/11/2023.

Este texto não está completo, de modo que recomendamos complementar o aprendizado com o estudo de três livros brasileiros: a) CARVALHO, R.C. *Estruturas em Concreto Protendido – Pré-tração, Pós-tensão, Cálculo e Detalhamento*. São Paulo, Ed. Pini, 2012, 431p.; b) CHOLFE, L. ; BONILHA, L. *Concreto Protendido – Teoria e Prática*. São Paulo, Ed. Pini, 2ª ed., 2015, 345p.; c) HANAI, J.B. *Fundamentos do concreto protendido*. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos – USP, Departamento de Engenharia de Estruturas, E-Book, 2005.

Alguns artigos técnicos e catálogos encontram-se disponibilizadas na página da disciplina na internet, no endereço: http://wwwp.feb.unesp.br/pbastos/pag_protendido.htm

Este texto vem sendo melhorado e ampliado e alguns capítulos ainda estão em processo de desenvolvimento e serão acrescentados futuramente, como: estudo de ancoragens, deslocamentos verticais, projeto de vigas simples, torção, vigas contínuas e lajes.

Críticas e sugestões serão bem-vindas.

SUMÁRIO

1. PRINCÍPIOS BÁSICOS.....	1
1.1 EXEMPLOS DE ESTRUTURAS PROTENDIDAS	3
1.2 BREVE HISTÓRICO DO CONCRETO PROTENDIDO	10
1.3 COMPARAÇÃO ENTRE CONCRETO PROTENDIDO E CONCRETO ARMADO	11
1.4 MÉTODOS DE APLICAÇÃO DA PROTENSÃO.....	11
1.4.1 PROTENSÃO COM PRÉ-TENSÃO	12
1.4.2 PROTENSÃO COM PÓS-TENSÃO	19
1.4.3 PROTENSÃO COM PÓS-TENSÃO COM CORDOALHA ENGRAXADA	25
1.4.4 PROTENSÃO EXTERNA.....	27
1.4.5 DISPOSITIVOS DE ANCORAGEM PARA A PÓS-TENSÃO	28
1.5 NÍVEL DE PROTENSÃO	34
1.6 TENSÕES ELÁSTICAS	35
1.6.1 EXEMPLO – TENSÕES ELÁSTICAS EM LAJE.....	38
2. MATERIAIS.....	43
2.1 CONCRETO	43
2.1.1 COMPOSIÇÃO DO CONCRETO	43
2.1.2 RESISTÊNCIA À COMPRESSÃO	45
2.1.3 RESISTÊNCIA À TRAÇÃO.....	45
2.1.4 MASSA ESPECÍFICA DO CONCRETO.....	47
2.1.5 MÓDULO DE ELASTICIDADE DO CONCRETO	47
2.1.6 DIAGRAMA TENSÃO-DEFORMAÇÃO DO CONCRETO À COMPRESSÃO	49
2.1.7 PARÂMETROS DE PROJETO	51
2.1.8 DEFORMAÇÕES DO CONCRETO.....	52
2.1.8.1 Deformação Imediata.....	54
2.1.8.2 Fluência	54
2.1.8.3 Retração	56
2.1.9 FADIGA NO CONCRETO	57
2.1.10 EFEITOS DA TEMPERATURA E CURA TÉRMICA	58
2.1.11 PEÇAS PROTENDIDAS PRÉ-FABRICADAS.....	59
2.2 AÇOS PARA ARMADURA ATIVA	59
2.2.1 NORMAS BRASILEIRAS	61
2.2.2 DEFINIÇÕES	61
2.2.3 FIOS	62
2.2.4 CORDOALHAS.....	64
2.2.5 BARRAS ESPECIAIS.....	68
2.2.6 MASSA ESPECÍFICA, COEFICIENTE DE DILATAÇÃO TÉRMICA E MÓDULO DE ELASTICIDADE.....	70
2.2.7 DIAGRAMA TENSÃO-DEFORMAÇÃO	71
2.2.8 FADIGA NOS AÇOS DE PROTENSÃO	72
2.3 AÇOS PARA ARMADURA PASSIVA.....	73
2.3.1 TIPO DE SUPERFÍCIE ADERENTE	74
2.3.2 CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS	75
2.3.3 SOLDABILIDADE	75
2.3.4 DIAGRAMA TENSÃO-DEFORMAÇÃO	76
2.4 BAINHA	77
2.5 CALDA DE CIMENTO	78
3. CRITÉRIOS DE PROJETO	80
3.1 AGRESSIVIDADE DO AMBIENTE, QUALIDADE DO CONCRETO E COBRIMENTO	80
3.1.1 AGRESSIVIDADE DO AMBIENTE	80
3.1.2 QUALIDADE DO CONCRETO DE COBRIMENTO.....	81

3.1.3	ESPESSURA DO COBRIMENTO DA ARMADURA	81
3.2	ESTADOS-LIMITES	83
3.2.1	ESTADO-LIMITE ÚLTIMO (ELU).....	83
3.2.2	ESTADO-LIMITE DE SERVIÇO (ELS).....	83
3.2.3	DOMÍNIOS DE DEFORMAÇÕES.....	85
3.2.3.1	Reta a.....	86
3.2.3.2	Domínio 1	87
3.2.3.3	Domínio 2	87
3.2.3.4	Domínio 3	88
3.2.3.5	Domínio 4	88
3.2.3.6	Domínio 4a	89
3.2.3.7	Domínio 5	89
3.2.3.8	Reta b	89
3.3	AÇÕES NAS ESTRUTURAS.....	90
3.3.1	AÇÕES PERMANENTES	90
3.3.1.1	Diretas	91
3.3.1.2	Indiretas	91
3.3.2	AÇÕES VARIÁVEIS	92
3.3.2.1	Diretas	93
3.3.2.2	Indiretas	94
3.3.3	AÇÕES EXCEPCIONAIS	94
3.3.4	VALORES DAS AÇÕES	95
3.3.4.1	Valores Característicos	95
3.3.4.2	Valores Representativos.....	95
3.3.4.3	Valores de Cálculo	96
3.3.5	COMBINAÇÕES DE AÇÕES.....	96
3.3.5.1	Combinações Últimas.....	96
3.3.5.2	Combinações de Serviço	97
3.3.6	COEFICIENTES DE PONDERAÇÃO DAS AÇÕES	98
3.3.6.1	Estado-Limite Último (ELU)	98
3.3.6.2	Estado-Limite de Serviço (ELS)	100
3.4	RESISTÊNCIAS DE CÁLCULO E COEFICIENTES DE PONDERAÇÃO.....	100
3.4.1	VALORES CARACTERÍSTICOS	100
3.4.2	VALORES DE CÁLCULO	100
3.4.2.1	Resistência de Cálculo	100
3.4.2.2	Tensões Resistentes de Cálculo.....	100
3.4.2.3	Resistência de Cálculo do Concreto	101
3.4.2.4	Resistência de Cálculo do Aço	101
3.4.3	COEFICIENTE DE PONDERAÇÃO DAS RESISTÊNCIAS NO ESTADO-LIMITE ÚLTIMO.....	101
3.4.3.1	Estado-Limite Último (ELU)	102
3.4.3.2	Estado-Limite de Serviço (ELS)	102
3.5	VERIFICAÇÃO DA SEGURANÇA	102
3.5.1	CONDIÇÕES CONSTRUTIVAS DE SEGURANÇA.....	102
3.5.2	CONDIÇÕES ANALÍTICAS DE SEGURANÇA.....	103
3.5.3	ESFORÇOS RESISTENTES DE CÁLCULO	103
3.5.4	ESFORÇOS SOLICITANTES DE CÁLCULO	103
3.6	ESCOLHA DO NÍVEL DE PROTENSÃO	103
3.7	TENSÕES ADMISSÍVEIS DO CONCRETO	105
3.8	VALORES-LIMITES DE TENSÃO NO ESTIRAMENTO DA ARMADURA DE PROTENSÃO	109
3.9	VERIFICAÇÃO DO ESTADO-LIMITE ÚLTIMO NO ATO DA PROTENSÃO.....	109
3.10	POSIÇÃO DOS ESFORÇOS SOLICITANTES NAS ARMADURAS ATIVAS E PASSIVAS	110
3.11	DISPOSIÇÕES CONSTRUTIVAS	110
3.11.1	TRAÇADO DE CABOS DE PROTENSÃO	110
3.11.2	CURVATURAS DE CABOS DE PROTENSÃO	110
3.11.3	CURVATURA NAS PROXIMIDADES DAS ANCORAGENS.....	111
3.11.4	FIXAÇÃO DURANTE A EXECUÇÃO	111

3.11.5	EXTREMIDADES RETAS	111
3.11.6	PROLONGAMENTO DE EXTREMIDADE	111
3.11.7	EMENDAS	111
3.11.8	ANCORAGENS.....	111
3.11.9	AGRUPAMENTO DE CABOS NA PÓS-TRAÇÃO.....	111
3.11.10	ESPAÇAMENTOS MÍNIMOS	111
4.	ANÁLISE DE VIGAS À FLEXÃO.....	113
4.1	INTRODUÇÃO	113
4.2	EFETIVIDADE DA FORÇA DE PROTENSÃO.....	114
4.3	TENSÕES ELÁSTICAS	114
4.4	COMPORTAMENTO DE VIGAS NA FLEXÃO	117
4.5	VIGA PARCIALMENTE PROTENDIDA.....	117
4.6	DETERMINAÇÃO DA FORÇA DE PROTENSÃO E DA EXCENTRICIDADE DA ARMADURA DE PROTENSÃO.....	118
4.6.1	ESTIMATIVA DA FORÇA DE PROTENSÃO FINAL (P_{∞}) COM A EXCENTRICIDADE CONHECIDA	118
4.6.1.1	Protensão Completa.....	119
4.6.1.2	Protensão Limitada	120
4.6.1.3	Protensão Parcial.....	122
4.6.1.4	Força de Protensão no Estiramento (P_i) e Cálculo da Área de Armadura de Protensão	122
4.6.1.5	Exemplo 1 – Protensão Completa em Viga Duplo T Pré-tensionada	123
4.6.1.6	Exemplo 2 – Protensão Limitada em Viga Duplo T Pré-tensionada.....	126
4.6.1.7	Exemplo 3 – Protensão Limitada em Viga T Pré-tensionada	127
4.6.1.8	Exemplo 4 – Protensão Limitada em Viga I Pós-tensionada	130
4.6.2	DETERMINAÇÃO DA FORÇA DE PROTENSÃO E DA EXCENTRICIDADE.....	132
4.6.3	DETERMINAÇÃO DA SEÇÃO TRANSVERSAL MÍNIMA	138
4.6.3.1	Viga com Excentricidade Variável	138
4.6.3.2	Viga com Excentricidade Constante.....	139
4.6.4	DETERMINAÇÃO DA SEÇÃO TRANSVERSAL MÍNIMA CONFORME NILSON	141
4.6.4.1	Viga com Excentricidade Variável	141
4.6.4.2	Viga com Excentricidade Constante.....	143
4.6.5	EXEMPLO 1 – FORÇA DE PROTENSÃO E EXCENTRICIDADE EM VIGA RETANGULAR PÓS-TENSIONADA COM PROTENSÃO LIMITADA E EXCENTRICIDADE VARIÁVEL.....	144
4.6.6	EXEMPLO 2 – FORÇA DE PROTENSÃO E EXCENTRICIDADE EM VIGA DUPLO T PRÉ-TENSIONADA COM PROTENSÃO COMPLETA E EXCENTRICIDADE CONSTANTE	150
4.6.7	EXEMPLO 3 – FORÇA DE PROTENSÃO E EXCENTRICIDADE EM VIGA I PÓS-TENSIONADA COM PROTENSÃO PARCIAL E EXCENTRICIDADE VARIÁVEL	155
4.7	VERIFICAÇÃO DE TENSÕES NAS SEÇÕES TRANSVERSAIS AO LONGO DO VÃO	157
4.7.1	PROCESSO DO FUSO LIMITE	157
4.7.2	PROCESSO DAS CURVAS LIMITES.....	159
5.	PERDAS DE PROTENSÃO.....	163
5.1	INTRODUÇÃO	163
5.2	PERDAS DE PROTENSÃO NA PRÉ-TRAÇÃO	165
5.3	PERDAS DE PROTENSÃO NA PÓS-TRAÇÃO.....	167
5.4	VALORES TÍPICOS DA FORÇA DE PROTENSÃO.....	169
5.4.1	FORÇA DE PROTENSÃO P_i	169
5.4.2	FORÇA DE PROTENSÃO P_A	170
5.4.3	FORÇA DE PROTENSÃO P_O	170
5.4.4	FORÇA DE PROTENSÃO P_T	170
5.4.5	VALORES CARACTERÍSTICOS E DE CÁLCULO DA FORÇA DE PROTENSÃO	170
5.5	PERDAS DE PROTENSÃO INICIAIS	171
5.5.1	PERDA POR ESCORREGAMENTO DA ARMADURA NA ANCORAGEM NA PRÉ-TENSÃO.....	171
5.5.2	PERDA POR RELAXAÇÃO DA ARMADURA	172
5.5.3	PERDA POR RETRAÇÃO E POR FLUÊNCIA DO CONCRETO.....	176
5.5.3.1	Cálculo Aproximado	176
5.5.3.2	Cálculo Conforme o Anexo A da NBR 6118.....	177
5.6	PERDAS DE PROTENSÃO IMEDIATAS.....	185
5.6.1	PERDA POR ENCURTAMENTO ELÁSTICO IMEDIATO DO CONCRETO NA PRÉ-TENSÃO	185

5.6.1.1	Exemplo 1 – Perda por Encurtamento Elástico Imediato do Concreto em Viga T Pré-tensionada	189
5.6.1.2	Exemplo 2 – Perda por Encurtamento Elástico Imediato do Concreto em Viga Retangular Pré-tensionada	190
5.6.1.3	Exercício Proposto – Perda por Encurtamento Elástico Imediato do Concreto em Viga Calha U Pré-tensionada	192
5.6.2	PERDA POR ENCURTAMENTO ELÁSTICO IMEDIATO DO CONCRETO PELO ESTIRAMENTO DOS CABOS RESTANTES NA PÓS-TENSÃO	192
5.6.3	PERDA POR ATRITO NA PÓS-TENSÃO	193
5.6.3.1	Exemplo 1 - Perda de Força de Protensão por Atrito	196
5.6.3.2	Exemplo 2 - Perda de Força de Protensão por Atrito	197
5.6.3.3	Exemplo 3 - Perda de Força de Protensão por Atrito	199
5.6.3.4	Exercício Proposto - Perda de Força de Protensão por Atrito	201
5.6.4	PERDA POR ESCORREGAMENTO DA ARMADURA NA ANCORAGEM NA PÓS-TENSÃO	201
5.6.4.1	Exemplo 1 - Perda por Escorregamento na Ancoragem na Pós-tensão	204
5.6.4.2	Exemplo 2 - Perda por Escorregamento na Ancoragem na Pós-tensão	206
5.7	PERDAS PROGRESSIVAS POSTERIORES	207
5.7.1	PROCESSO SIMPLIFICADO PARA O CASO DE FASES ÚNICAS DE OPERAÇÃO (ITEM 9.6.3.4.2)	208
5.7.2	PROCESSO APROXIMADO (ITEM 9.6.3.4.3)	209
5.7.3	MÉTODO GERAL DE CÁLCULO	210
5.7.4	MÉTODO SIMPLIFICADO DO EUROCODE 2	210
5.7.5	MÉTODO SIMPLIFICADO ALTERNATIVO	211
6.	ANÁLISE DA RESISTÊNCIA ÚLTIMA À FLEXÃO	213
6.1	TIPOS DE RUPTURA POR FLEXÃO	213
6.2	RELAÇÃO CARGA X FLECHA	215
6.3	TENSÕES E DEFORMAÇÕES EM DIFERENTES ESTÁGIOS DO CARREGAMENTO	215
6.4	DEFORMAÇÕES NA ARMADURA DE PROTENSÃO ADERENTE AO CONCRETO	217
6.5	DOMÍNIOS DE DEFORMAÇÃO	219
6.6	DETERMINAÇÃO DO MOMENTO FLETOR ÚLTIMO	220
6.6.1	SEÇÃO RETANGULAR	220
6.6.2	SEÇÃO T	221
6.7	CONDIÇÕES DE DUCTILIDADE	223
6.8	ROTEIRO PARA CÁLCULO DE M_{RD}	223
6.9	EXEMPLOS DE CÁLCULO DE MOMENTO FLETOR ÚLTIMO (M_{RD})	224
6.9.1	EXEMPLO 1 – SEÇÃO RETANGULAR COM ARMADURAS ATIVA E PASSIVAS A_s E A'_s	224
6.9.2	EXEMPLO 2 – SEÇÃO I COM ARMADURAS ATIVA E PASSIVAS A_s E A'_s	228
6.9.3	EXEMPLO 3 – SEÇÃO DUPLO T COM ARMADURA ATIVA	231
6.9.4	EXEMPLO 4 – SEÇÃO RETANGULAR COM ARMADURA ATIVA E ANÁLISE DA DUCTILIDADE	235
6.9.5	EXEMPLO 5 – SEÇÃO RETANGULAR COM ARMADURAS ATIVA E PASSIVA A_s E ANÁLISE DA DUCTILIDADE	238
6.9.6	EXEMPLO 6 – SEÇÃO RETANGULAR COM ARMADURAS ATIVA E PASSIVAS A_s E A'_s E ANÁLISE DA DUCTILIDADE	241
6.10	DIMENSIONAMENTO DE ARMADURAS PASSIVAS	243
6.10.1	SEÇÃO RETANGULAR COM ARMADURA PASSIVA TRACIONADA	243
6.10.1.1	Exemplo 1 – Dimensionamento de Armadura A_s em Viga de Seção Retangular	245
6.10.1.2	Exemplo 2 – Dimensionamento de Armadura A_s em Seção Retangular	245
6.10.2	SEÇÃO RETANGULAR COM ARMADURAS PASSIVAS TRACIONADA E COMPRIMIDA	248
6.10.2.1	Exemplo 1 – Dimensionamento de Armaduras Passivas A_s e A'_s em Viga de Seção Retangular	250
6.11	EXERCÍCIOS PROPOSTOS	251
7.	ANÁLISE À FORÇA CORTANTE	252
7.1	EFEITOS DA FORÇA CORTANTE	252
7.2	EFEITO DA COMPONENTE TANGENCIAL DA FORÇA DE PROTENSÃO	252
7.3	VERIFICAÇÃO À FORÇA CORTANTE NO ESTADO-LIMITE ÚLTIMO (ELU)	253
7.3.1	MODELO DE CÁLCULO I	253
7.3.2	MODELO DE CÁLCULO II	255
7.3.3	ARMADURA MÍNIMA	256
7.4	EXEMPLO 1	256
8.	REFERÊNCIAS	259

1. PRINCÍPIOS BÁSICOS

O concreto é o material estrutural mais largamente aplicado na construção civil, em todo o mundo, desde o final do Século 19 e até o presente, e provavelmente continuará pelas décadas futuras. Porém, como a resistência do concreto à tração é baixa, é necessário inserir barras de aço nas regiões onde as tensões de tração atuam.

Uma viga de Concreto Armado, como a biapoiada indicada na Figura 1.1, que submetida ao carregamento externo fica solicitada por momentos fletores positivos, tem tensão normal de compressão em sua parte superior, e tensão normal de tração na parte inferior, que causa fissuras, pois nas vigas correntes da prática usualmente as tensões de tração atuantes superam a resistência do concreto à tração.¹ De modo que as barras da armadura atuam como ponte de transferência de tensão entre as fissuras, possibilitando o trabalho resistente da viga, em conjunto com o concreto comprimido da parte superior. E como a armadura não impede o fissuramento, não impede a diminuição da rigidez da viga.

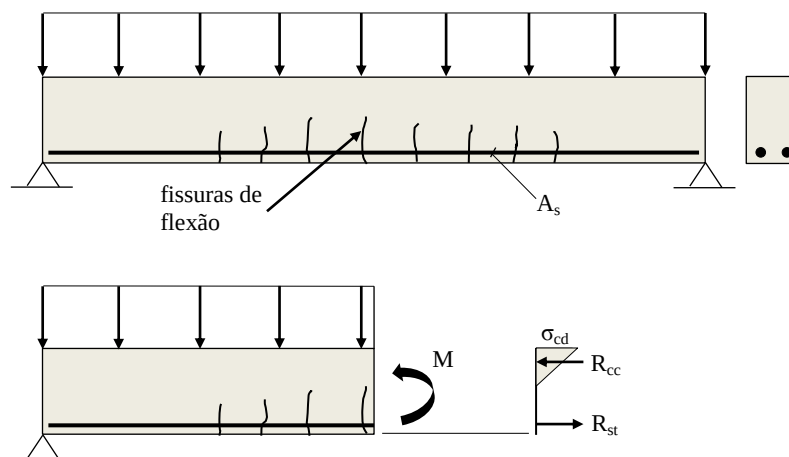


Figura 1.1 – Viga de Concreto Armado fissurada, com diagrama linear de tensões normais de compressão e forças normais resultantes.^[1]

A largura (abertura) da fissura é aproximadamente proporcional à deformação da armadura que atravessa a fissura, portanto, à tensão na armadura, de modo que a deformação e a tensão na armadura devem ser limitadas a valores baixos, a fim de evitar fissuras com aberturas elevadas e prejudiciais à estética e à durabilidade. Assim é que a NBR 6118^[2] limita em 10 ‰ (10 mm/m) a deformação máxima de alongamento na armadura tracionada.

Um fator geralmente crítico no projeto de elementos que vencem vãos, como vigas e lajes, é o Estado-Limite de Serviço relativo à deformação excessiva (ELS-DEF), ou seja, as flechas resultantes dos deslocamentos verticais. E flechas elevadas são associadas a peças com grandes curvaturas e aberturas de fissuras, e consequentemente grandes deformações na armadura tracionada.^[1] Assim é que nas peças fletidas em Concreto Armado não adianta utilizar aços com resistências ainda mais elevadas, pois a tensão de serviço no aço deve ser limitada a uma deformação máxima de alongamento baixa (10 ‰), por causa do concreto. Portanto, em vista da baixa resistência do concreto à tração, e consequente fissuração, a aplicação da protensão ao concreto surgiu de modo natural, com a ideia de pré-comprimir a região da seção transversal que depois será tracionada com a atuação do carregamento externo.

¹ As seções mais solicitadas das vigas, em serviço, geralmente encontram-se no Estádio II, portanto fissuradas. A verificação é feita comparando o “momento de primeira fissura” (ou “momento de fissuração”) com o momento fletor atuante na seção transversal.

² ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *Projeto de estruturas de concreto*, NBR 6118. Rio de Janeiro, ABNT, 2023, 242p.

A viga mostrada na Figura 1.2 ilustra o benefício da protensão, onde o momento fletor provocado pelo carregamento sobre a viga induz tensões normais, máximas de compressão na fibra do topo ($\sigma_{c,M}$) e de tração na fibra da base ($\sigma_{t,M}$). A força de protensão P também aplica tensões normais, de compressão na base ($\sigma_{c,p}$) e de tração no topo ($\sigma_{t,p}$). Neste caso, a ideia básica com a protensão é de aplicar previamente elevadas tensões de compressão na região inferior da seção transversal da viga, para que posteriormente em serviço, com a atuação dos carregamentos aplicados, as tensões de tração sejam diminuídas ou até mesmo completamente eliminadas da seção transversal, como mostrado no diagrama de tensões resultantes da Figura 1.2. A tensão nula na base da viga caracteriza a chamada *protensão completa*, como o francês Eugène Freyssinet preconizou inicialmente, e que apresenta a vantagem de proporcionar peças livres de fissuras durante o trabalho em serviço.

No caso da protensão ser aplicada em um nível³ tal a ponto de não eliminar completamente as tensões de tração atuantes na viga em serviço, permitindo assim uma fissuração controlada, tem-se a chamada *protensão parcial*, que configura uma situação intermediária entre o Concreto Armado (ausência de protensão) e o Concreto Protendido com *protensão completa*, isto é, uma combinação de ambos.⁴

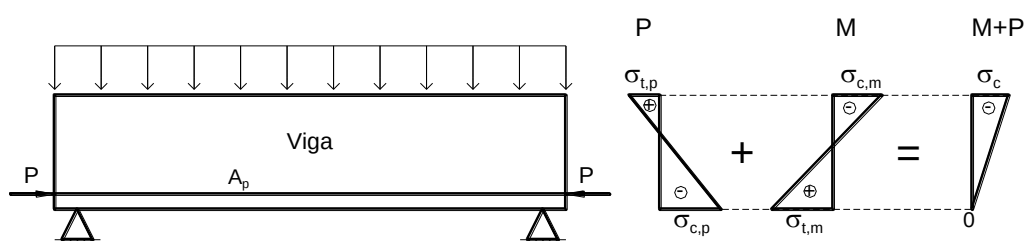


Figura 1.2 – Tensões normais na viga protendida.

A obtenção de uma força que comprime a peça (força P na Figura 1.2) ocorre pelo estiramento ou tracionamento de um aço até um valor de tensão de tração inferior à tensão correspondente ao limite do regime elástico, de modo que o aço, como um elástico, ao tender a voltar à deformação inicial nula, aplica a força de compressão (protensão) na peça. Para que a força de protensão seja ainda suficientemente elevada, a fim de compensar as várias perdas de força que ocorrem ao longo do tempo, naturais do processo, é imprescindível a utilização de aços com grande capacidade de deformação ainda no regime elástico, algo possível de obter somente com aços de elevadíssimas resistências.

A peça protendida, ao aliar concretos e principalmente aços de resistências muito mais elevadas que as utilizadas nas peças de Concreto Armado, possibilita eliminar ou diminuir as tensões de tração e a fissuração, e consequentemente as peças resultam muito mais rígidas e com flechas muito menores. Esse melhor comportamento proporciona às peças importantes vantagens técnicas e econômicas, para vãos grandes, algo acima de 12 m.

A Figura 1.3 mostra uma viga de concreto segundo três possibilidades. A viga de Concreto Simples, sem armadura longitudinal de flexão, rompe bruscamente quando inicia uma primeira fissura, causada pela tensão de tração atuante que alcança a resistência do concreto à tração na flexão ($f_{ct,f}$); a força F aplicada é pequena. Na viga de Concreto Armado, uma armadura é colocada na região tracionada da viga, próxima à fibra mais tracionada. A armadura começa a trabalhar de maneira mais efetiva após o surgimento de fissuras, quando passa a resistir às tensões de tração atuantes, atuando como ponte de transferência de tensões entre as fissuras. Desse modo a viga rompe sob uma força F muito mais elevada. Na viga de Concreto Protendido, a força de protensão excêntrica P comprime a viga, e equilibra as tensões de tração devidas à força externa F , prevenindo o surgimento de fissuras e diminuindo ou eliminando a flecha.⁵

³ A NBR 6118 define a protensão segundo três níveis: completa, limitada e parcial, estudados no item 1.5.

⁴ Há uma tendência de no futuro os dois tratamentos (CA e CP) serem unificados, o que já vem ocorrendo com o termo “*structural concrete*”.

⁵ Recomendamos para estudo o livro: CARVALHO, R.C. *Estruturas em Concreto Protendido – Pré-tração, Pós-tensão, Cálculo e Detalhamento*. São Paulo, Editora Pini, 2ª ed., 2017, 448p.

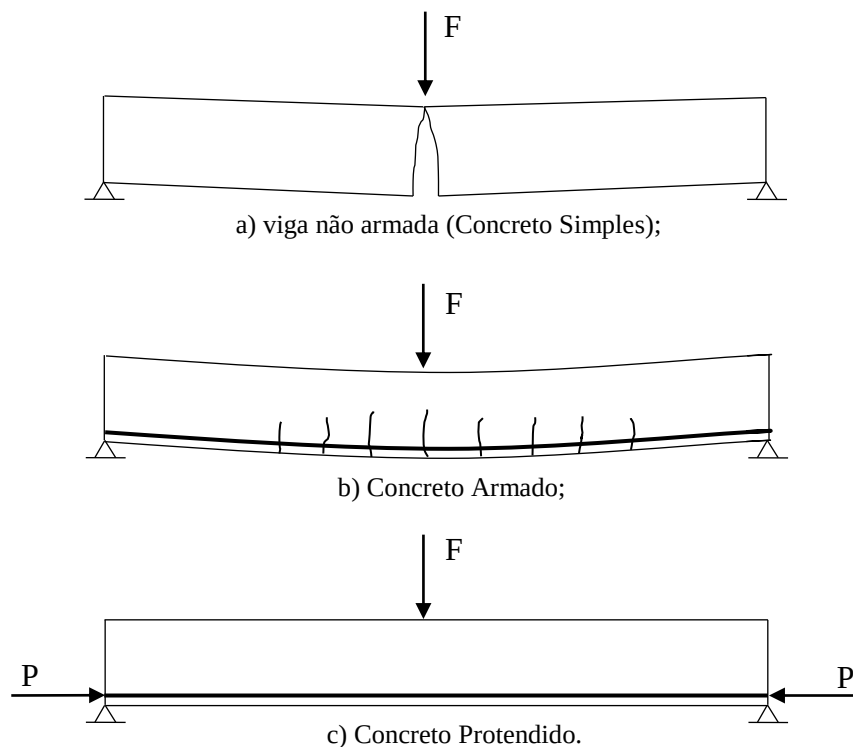


Figura 1.3 – Viga de Concreto Simples, de Concreto Armado e de Concreto Protendido.^[2]

A NBR 6118 apresenta as seguintes definições (itens 3.1.2 a 3.1.6):

“Elementos de Concreto Simples Estrutural: elementos estruturais elaborados com concreto que **não** possuem qualquer tipo de armadura, ou que a possuem em quantidade inferior ao mínimo exigido para o concreto armado (ver 17.3.5.3.1 e Tabela 17.3).

Elementos de Concreto Armado: aqueles cujo comportamento estrutural depende da aderência entre concreto e armadura, e nos quais **não** se aplicam alongamentos iniciais das armaduras antes da materialização dessa aderência.

Elementos de Concreto Protendido: aqueles nos quais parte das armaduras é previamente alongada por equipamentos especiais de protensão, com a finalidade de, em condições de serviço, impedir ou limitar a fissuração e os deslocamentos da estrutura, bem como propiciar o melhor aproveitamento de aços de alta resistência no estado-limite último (ELU).

Armadura passiva: qualquer armadura que **não** seja usada para produzir forças de protensão, isto é, que não seja previamente alongada.

Armadura ativa (de protensão): armadura constituída por barras, fios isolados ou cordoalhas, destinada à produção de forças de protensão, isto é, na qual se aplica um pré-alongamento inicial.”

1.1 Exemplos de Estruturas Protendidas

Após décadas de desenvolvimento e experiência, o Concreto Protendido está hoje plenamente aprovado e competitivo para aplicação nos mais diversos setores da construção civil, como elementos estruturais (vigas, lajes, estacas, postes, dormentes ferroviários, etc.), e diferentes tipos de construção (pontes – com vãos de até mais de uma centena de metros, túneis, tanques, torres, estruturas offshore, pavimentos, etc.).

Um contínuo desenvolvimento vem ocorrendo, com a aplicação de concretos de resistências mais elevadas (CAD – Concreto de Alto Desempenho, e aqueles de ultra-alta resistência), de concretos reforçados com fibras e concretos leves, nas peças pré-moldadas (lajes alveolares, vigas I e T, etc.), aplicadas em diversos tipos de edificações, e em pontes.

Da Figura 1.4 até a Figura 1.21 são mostrados exemplos de estruturas em Concreto Protendido (CP).⁶

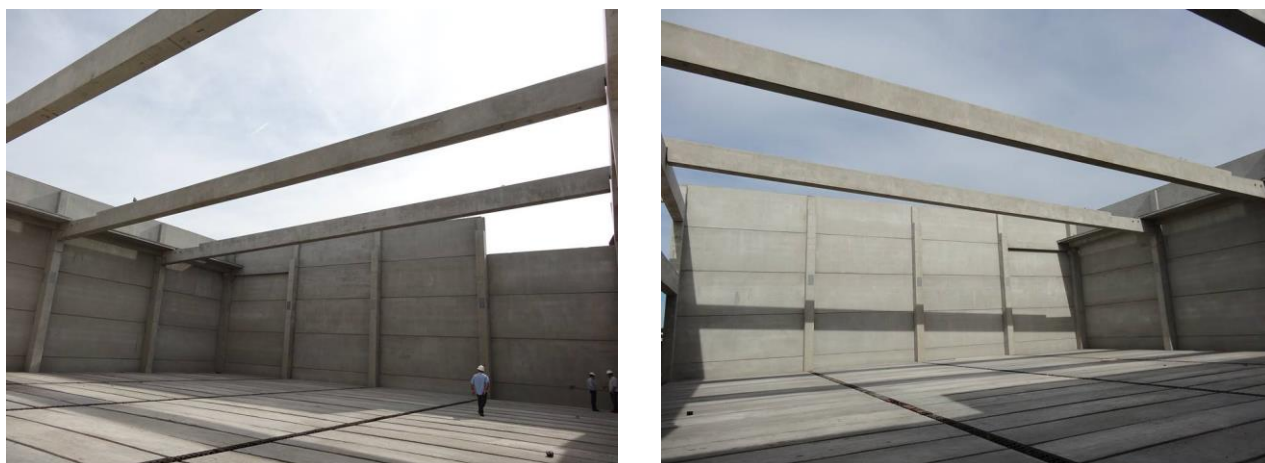


Figura 1.4 – Viga pré-moldada protendida de seção retangular, com vão de 28 m, para cobertura de edifício de três pavimentos. (Cortesia: Marka Soluções Pré-fabricadas, www.marka.ind.br)



Figura 1.5 – Viga pré-moldada protendida de seção retangular, com vão em balanço, em edifício de três pavimentos. (Cortesia: Marka Soluções Pré-fabricadas, www.marka.ind.br)

⁶ Atividade complementar: ler itens do e-book de Hanai, 1.1 – O que se entende por protensão?, e 1.2 – A protensão aplicada ao concreto.

HANAI, J.B. *Fundamentos do concreto protendido*. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos – USP, Departamento de Engenharia de Estruturas, E-Book, 2005. Disponível em (12/04/21): https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/2255776/mod_resource/content/1/Fundamentos%20do%20Concreto%20Protendido%20-%20J%20B%20Hanai.pdf

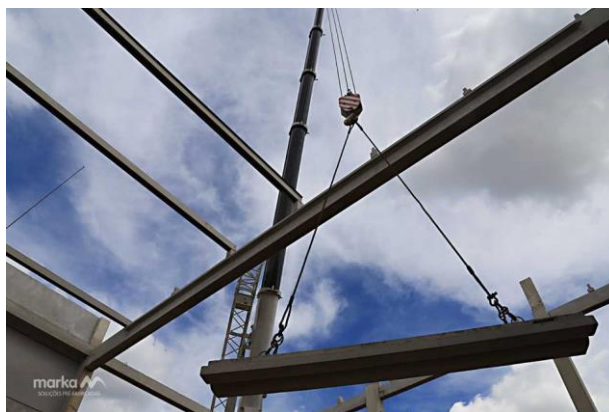


Figura 1.6 – Viga pré-moldada protendida seção I, com vão de 25 m, para cobertura de galpão.
(Cortesia: Marka Soluções Pré-fabricadas, www.marka.ind.br)



Figura 1.7 – Vigas pré-moldadas protendidas seção retangular e I, para cobertura de galpão.
(Cortesia: Marka Soluções Pré-fabricadas, www.marka.ind.br)



Figura 1.8 – Viga pré-moldada protendida seção T, para cobertura.
(Fonte: Protendit, <https://www.protendit.com.br>)



Figura 1.9 – Laje alveolar protendida.
(Fonte: Protensul, <http://www.protensul.com.br>)



Figura 1.10 – Vigas biapoiadas pré-moldadas seção I em superestrutura de ponte.
(Fonte: Protensul, <http://www.protensul.com.br>)



Figura 1.11 – Vigas biapoiadas pré-moldadas seção I em superestrutura de viaduto
(Fonte: Mold Estruturas, <http://mold.com.br>)



Figura 1.12 – Vigas biapoiadas pré-moldadas seção I em superestrutura de viaduto.
(Fonte: National Precast Concrete Association, <http://precast.org>)



Figura 1.13 – Viga pré-moldada seção celular (caixão) em viaduto.
(Fonte: Dorman Long Technology, <http://www.dormanlongtechnology.com>)



Figura 1.14 – Ponte com aduelas moldadas no local, com viga protendida de seção celular (caixão), sobre o rio Madeira. (Fonte: Ulma Construction, <http://www.ulmaconstruction.com.br>)



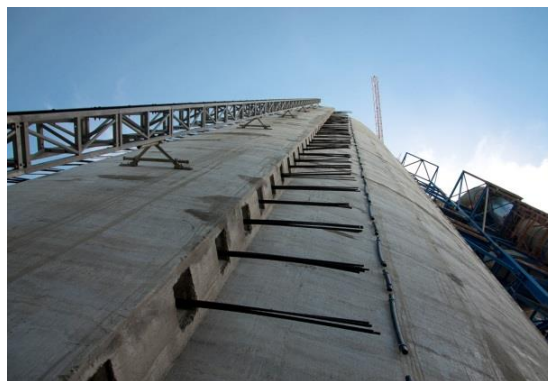
Figura 1.15 – Ponte Anita Garibaldi em fase de construção em Laguna/SC, com vãos em aduelas pré-moldadas protendidas. (Fonte: Berd - Bridge Engineering Research & Design, <https://www.berd.eu/projectos/laguna>)



Figura 1.16 – Ponte Anita Garibaldi finalizada em Laguna/SC, com vários tramos em Concreto Protendido.
(Fonte: Aterpa, <http://grupoaterpa.com.br/obras/pontes-e-viadutos>)



a) bainhas metálicas entre armaduras passivas;



b) cabos⁷ de protensão com cordoalhas.

Figura 1.17 – Parede de reservatório protendida com pós-tensão.

(Fonte: Freyssinet, <http://www.freyssinet.com>)



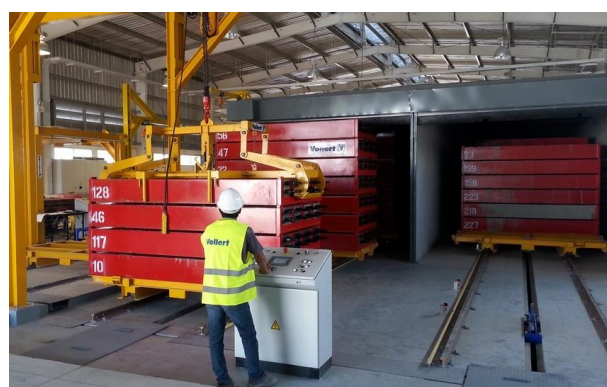
a) posicionamento e fixação dos fios de protensão no interior da fôrma metálica. A fixação neste caso é feita por meio de porca rosqueada no fio;



b) estiramento dos fios de protensão, que permanecem fixados e ancorados na própria fôrma metálica, dimensionada para resistir à força de protensão aplicada;



c) lançamento do concreto nas fôrmas;



d) movimentação das fôrmas para a cura térmica;

Figura 1.18 – Fabricação de dormentes ferroviários de Concreto Protendido pré-tensionados.

(Fonte: Vollert, <https://www.vollert.de>)

⁷ Cabo de protensão é um conjunto de cordoalhas, geralmente colocadas no interior de uma bainha metálica.



a) fôrma metálica com os fios de protensão posicionados;



b) estiramento dos fios de protensão com equipamento específico, antes do lançamento do concreto na fôrma.



c) lançamento do concreto nas fôrmas metálicas, com os fios previamente estirados e ancorados na própria fôrma;



d) fôrmas preenchidas com concreto. Os fios de protensão são relaxados das ancoragens somente após o concreto apresentar a resistência requerida;



e) desmoldagem das peças por meio do giro das fôrmas;



f) produto final.

Figura 1.19 – Fabricação de dormentes ferroviários de Concreto Protendido pré-tensionados.
(Fonte: Vollert, <https://www.vollert.de>)



Figura 1.20 – Pavimento de edifício em laje protendida. (Fonte: Freyssinet, <http://www.freyssinet.com>)



Figura 1.21 – Estaca pré-moldada protendida. (Fonte: Protensul, <http://www.protensul.com.br>)

1.2 Breve Histórico do Concreto Protendido

Nas primeiras décadas do desenvolvimento do concreto protendido o sucesso não foi alcançado, devido à baixa resistência dos aços de protensão utilizados, pois a baixa força de protensão inicialmente aplicada era posteriormente significativamente reduzida pelas chamadas perdas de força de protensão, como por exemplo aquelas decorrentes da retração e da fluência do concreto, relaxação do aço, escorregamento na ancoragem, etc. Assim, qualquer vantagem proporcionada pela protensão era perdida. E foi somente após o desenvolvimento de aços de resistências mais elevadas, durante a Segunda Guerra, que a técnica da protensão alcançou sucesso, inicialmente com o francês Eugène Freyssinet. E desde aquela época o Concreto Protendido vem se desenvolvendo, estando hoje plenamente estabelecido como um sistema estrutural, aplicado em todo o mundo.^[1]

A primeira aplicação de protensão ocorreu nos Estados Unidos, por P. H. Jackson, em 1866, com patente para arcos de concreto. Em 1888, C. E. W. Doehring na Alemanha obteve patente para protensão de lajes de concreto com fios de aço. No entanto, o desempenho dos primeiros elementos protendidos era prejudicado pela baixa resistência dos aços disponíveis, e pelas perdas de protensão elevadas, diminuindo a sua aplicação.

Na França, Eugène Freyssinet foi o primeiro que entendeu a importância das perdas de força de protensão, e que propôs formas de compensação. Percebeu a necessidade do uso de aços de altas resistências e grandes alongamentos, que compensariam as perdas por encurtamento devidos especialmente à retração e fluência do concreto. Ele apresentou o primeiro trabalho consistente sobre Concreto Protendido, e em 1940 introduziu o primeiro sistema de protensão, com cabo de 12 fios ancorados com cunhas cônicas, princípio hoje ainda largamente utilizado. Inventou métodos construtivos, equipamentos, aços e concretos especiais. Projetou e construiu várias pontes protendidas, competitivas com as estruturas em aço.^[2]

Após a Segunda Guerra, com a necessidade da reconstrução das pontes destruídas, e da construção de outras novas, a protensão ganhou um grande impulso na Europa.

P. W. Abeles na Inglaterra desenvolveu o conceito de *protensão parcial*, entre os anos 30 e 60 do século 20. Diversos outros engenheiros contribuíram para o desenvolvimento e expansão do Concreto Protendido, como F. Leonhardt na Alemanha, V. Mikhailov na Rússia e T. Y. Lin nos Estados Unidos. Várias técnicas e sistemas de protensão foram desenvolvidos, diversos livros editados, associações e institutos criados, sendo hoje o CP plenamente aplicado.

No Brasil, em 1948 foi construída a primeira ponte em CP, no Rio de Janeiro, com sistema de Eugène Freyssinet, e em 1952 a Companhia Belgo-Mineira iniciou a fabricação de aços de protensão. Daquela época e até o presente momento, o CP vem sendo aplicado com grande sucesso, nos mais variados tipos de construção, no mesmo nível técnico dos países precursores.

1.3 Comparação entre Concreto Protendido e Concreto Armado

Nas peças protendidas são aplicados concretos e aços de resistências elevadas, e com a possibilidade da protensão poder eliminar as tensões de tração no concreto, as peças destinadas a vencer vãos (como vigas e lajes) podem ser projetadas com alturas menores que aquelas de Concreto Armado, algo em torno de 65 a 80 % da altura, o que implica poder vencer grandes vãos de maneira econômica. No caso de vãos até cerca de 10 m, o custo adicional do Concreto Protendido, proveniente de materiais mais resistentes, da utilização de dispositivos e equipamentos e das operações de protensão, tornam o Concreto Armado mais viável.^[5] Desse modo, a protensão é viável para vãos maiores que 10 m.⁸

A aplicação de **concretos de resistências elevadas** e com melhor controle de qualidade diminui o custo de manutenção das estruturas protendidas, sejam pré-fabricadas ou moldadas no local, e aumenta a vida útil das edificações.

O Concreto Protendido (CP) e o Concreto Armado (CA) não competem entre si, e na verdade se complementam, em funções e aplicações. Como o CP permite vencer vãos grandes, compete mais com as estruturas metálicas que com o CA, além de que as peças de concreto oferecem vantagens como maior resistência ao fogo e isolamento térmico, baixa manutenção, versatilidade de aplicação, etc. Algumas características positivas do CP em relação ao CA são apresentadas por Naaman:^[2]

- 1) o CP utiliza concretos e aços de resistências muito elevadas, como cordoalhas de 1.900 e 2.100 MPa, e concretos de resistências de até 100 MPa, sendo por vezes utilizado com resistências de 60 a 75 MPa em peças pré-moldadas, o que resulta seções com menores consumos de materiais;
- 2) no CP geralmente toda a seção transversal permanece submetida a tensões de compressão, o que é adequado para o concreto, e com a utilização de materiais de resistências mais elevadas, as seções em CP são menores e mais leves, esteticamente mais bonitas, e muito indicadas para estruturas de grandes vãos, como as pontes, onde o peso próprio exerce uma influência preponderante no projeto;
- 3) CP pode ser projetado para permanecer livre de fissuras quando atuando em serviço (*protensão completa*), e ao longo de toda a vida útil, adequado portanto para estruturas inseridas em ambientes agressivos, em reservatórios de líquidos, usinas nucleares, e especialmente em ambientes marítimos;
- 4) o CP, mesmo com *protensão parcial*, apresenta flechas significativamente menores, sendo muito adequado para estruturas com grandes vãos, como pontes e viadutos;
- 5) CP tem melhor resistência à força cortante, devida à pré-compressão no concreto e à inclinação dos cabos de protensão inclinados nas proximidades dos apoios (no caso principalmente de elementos pós-tensionados), o que reduz as tensões de tração diagonais, e requer portanto uma menor quantidade de estribos.

Excluídos alguns casos específicos, de modo geral é o vão a ser vencido o fator mais importante para a indicação do CP, onde suas vantagens sobressaem-se em relação ao CA. Como o CP requer um maior nível de tecnologia na sua execução, além de equipamentos e dispositivos, com a utilização de concretos de resistências mais elevadas, cilindros e bombas hidráulicas, ancoragens laboriosas em pós-tensão com aderência, e mão de obra específica, os custos adicionais decorrentes do CP o recomendam para vãos superiores a 10-12 m.^[2]

1.4 Métodos de Aplicação da Protensão

A operação de protensão, que consiste no estiramento (ou tracionamento) da armadura de protensão (fios, cordoalhas ou barras), geralmente feita por meio de cilindro hidráulico, pode ser realizada antes ou após a confecção da peça, ou seja, antes ou depois do lançamento e endurecimento do concreto. Quando o estiramento é feito antes, tem-se a **pré-tensão** (ou pré-tração), e após o endurecimento do concreto tem-se a **pós-tensão** (ou pós-tração).⁹

⁸ Para vãos próximos de 10-12 m a escolha entre CA e CP deve ser feita após uma análise técnica e econômica.

⁹ Sugestão de estudo: item 1.2 *Tipos de concreto protendido quanto à aderência e execução*, do livro CARVALHO, R.C. *Estruturas em Concreto Protendido – Pré-tração, Pós-tensão, Cálculo e Detalhamento*. São Paulo, Editora Pini, 2012, 431p.

Na operação é necessário fixar a armadura de protensão nas extremidades (pontas), sendo muito comum no caso de fios e cordoalhas a utilização de conjuntos metálicos formados por cunha e porta-cunha¹⁰, como mostrados na Figura 1.22, Figura 1.23 e Figura 1.24. A cunha fica inserida no furo tronco-cônico da peça chamada porta-cunha, e o conjunto apoia-se em uma estrutura de reação, geralmente metálica (placa, viga, etc.), e desse modo possibilita uma fixação (ancoragem) simples e de baixo custo. A cunha pode ser composta por duas ou três partes (bi ou tripartida).



Figura 1.22 – Fixação de fios de protensão por meio de cunha tripartida embutida em orifício tronco-cônico da peça porta-cunha, em ancoragem passiva. (Fotografia do Autor)



Figura 1.23 – Cunha do tipo tripartida e cordoalha galvanizada. (Fonte: Catálogo Dywidag^[6])

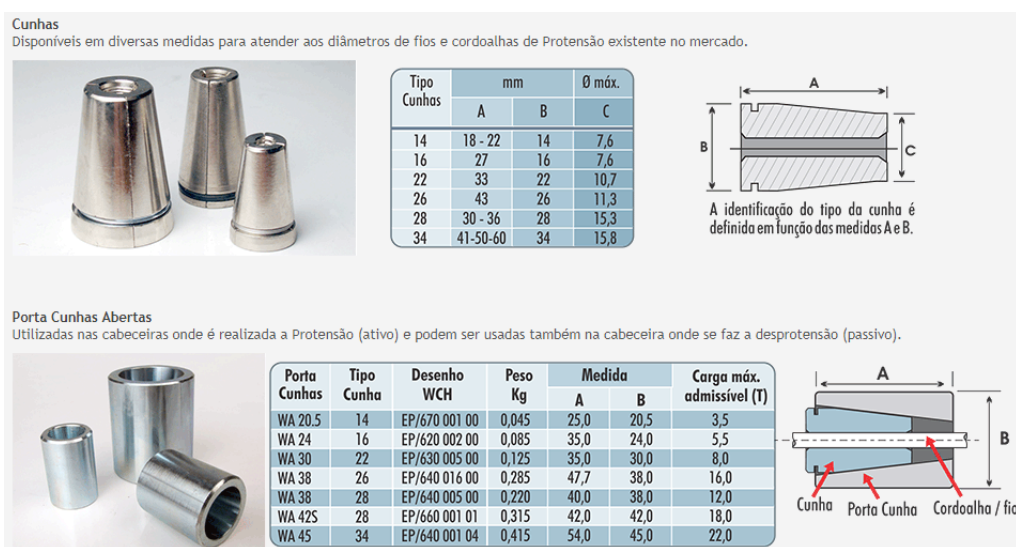


Figura 1.24 – Informações técnicas de conjuntos cunha e porta-cunha de um fabricante nacional. (Fonte: Weiler-C.Holzberger Ind. Ltda, <http://wch.com.br>)

1.4.1 Protensão com Pré-tensão

A **pré-tensão** (ou **pré-tração** na NBR 6118) é comumente aplicada na fabricação de peças pré-moldadas, em pistas de protensão, com o estiramento da armadura de protensão antes do lançamento do concreto (Figura 1.25). A pista de protensão consiste de uma base plana e reta, geralmente com algumas dezenas de metros de comprimento, sobre a qual as peças são fabricadas, em linha e sequencialmente (Figura 1.26). Nas extremidades da pista existem estruturas de reação para a ancoragem (fixação) da armadura de protensão, geralmente mistas aço/concreto, compostas por blocos de reação de concreto enterrados, fixados ao solo por meio de elementos de fundação, e componentes em aço onde os fios ou cordoalhas têm as pontas fixadas (Figura 1.27 e Figura 1.29).

¹⁰ Na fixação de barras de aço para protensão são utilizados outros dispositivos, como porca e placa de aço, conforme mostrado no item 1.4.5.

Os fios (ou cordoalhas) de protensão são posicionados ao longo da pista de protensão, como na fabricação de lajes alveolares (Figura 1.28), e passando dentro das fôrmas das peças, como na fabricação de vigas (Figura 1.30). Considerando a Figura 1.25a, os fios são fixados em uma das extremidades (**ancoragem passiva**) da pista de protensão, e na outra (**ancoragem ativa**) os fios são estirados (alongados), geralmente um a um, por meio de cilindro hidráulico apoiado na estrutura de reação. A tensão de tração¹¹ aplicada pelo cilindro é sempre inferior à tensão limite do regime elástico do aço. Após o término da operação de estiramento, o fio é fixado nos dispositivos da ancoragem ativa, e o cilindro é retirado para, sucessivamente, ir fazendo o estiramento dos fios seguintes.¹² Portanto, a extremidade onde o estiramento é feito é chamada **ancoragem ativa**, e a extremidade onde **não** é feito o estiramento é a **ancoragem passiva**.

Com todos os fios (ou cordoalhas) estirados e fixados nas ancoragens da pista de protensão, o concreto é lançado na fôrma, envolvendo e aderindo ao aço de protensão. Após decorrido um período de tempo necessário para o concreto adquirir resistência,¹³ os fios são soltos (relaxados) das ancoragens. E é neste instante que ocorre a transferência da protensão para as peças, pois os fios, ao tenderem elasticamente a voltar à deformação inicial zero, são restringidos pelo concreto, e desse modo comprimem parte ou toda a seção transversal da peça, ou seja, passa a atuar uma força de protensão que comprime a peça ao longo do seu comprimento. Como a protensão é transferida ao concreto devido à aderência entre os dois materiais, diz-se que a **pré-tensão** é com **aderência inicial**.

Na sequência os fios podem ser cortados, de modo que as peças possam ser desmoldadas e transferidas para o local de armazenamento, para o reinício de um novo ciclo de produção.

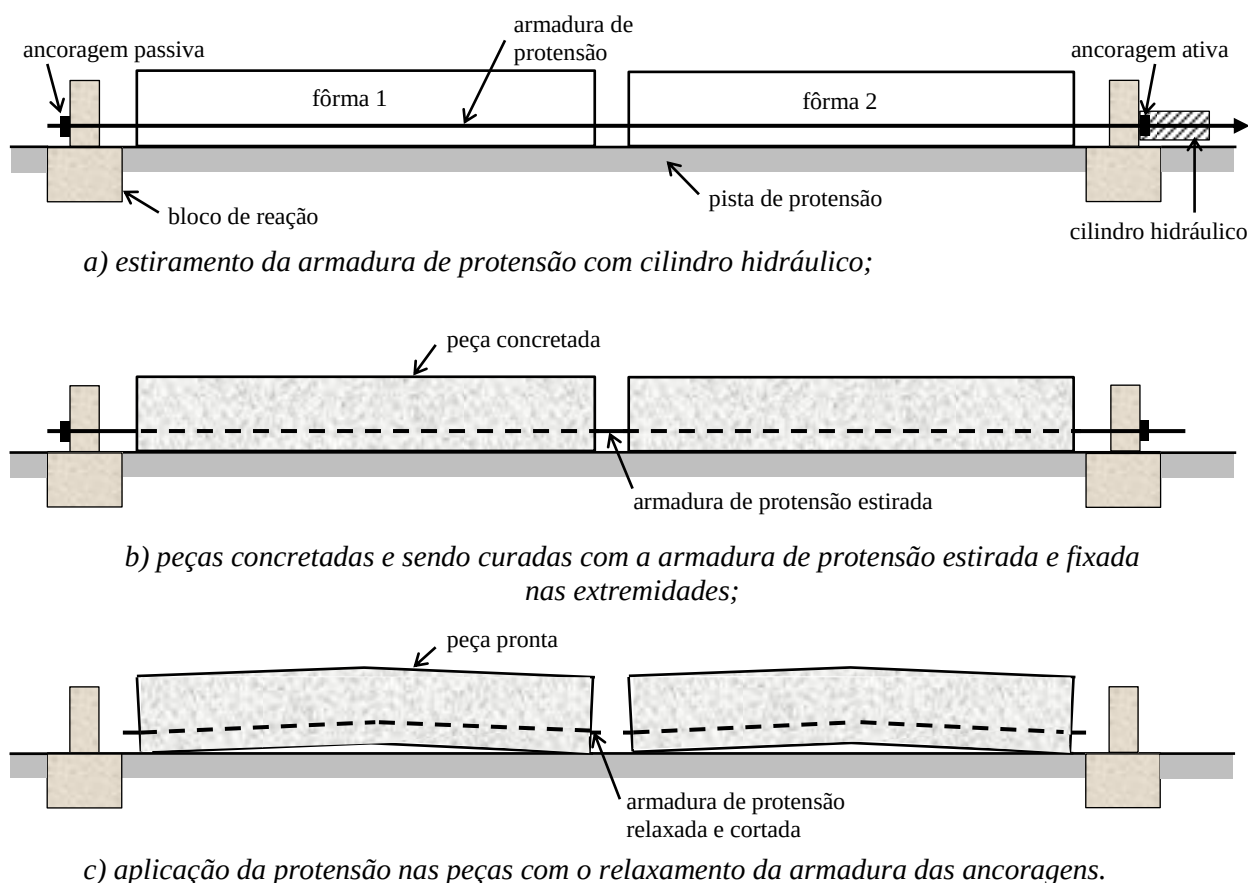


Figura 1.25 – Esquema simplificado de pista de protensão para fabricação de peças protendidas com **pré-tensão**.

¹¹ Os valores máximos da tensão de estiramento constam da NBR 6118.

¹² Existe também a possibilidade de um conjunto de fios ser estirado em conjunto, quando todos são fixados em uma viga metálica, que é empurrada por cilindros hidráulicos, e desse modo ocorre o alongamento (estiramento) de todos os fios ao mesmo tempo. Essa solução não é comum na prática.

¹³ Para abreviar a aplicação da protensão às peças, pode ser utilizada a cura térmica a vapor, o que possibilita ciclos de produção de 24 horas.



a) ancoragem passiva;

a) ancoragem ativa.

Figura 1.26 – Pista de protensão para fabricação de painéis e laje alveolar.
(Fonte: SENDI Pré-moldados, Fotografias do Autor)



Figura 1.27 – Estrutura metálica para fixação (ancoragem) de fios ou cordoalhas de protensão na extremidade (**ancoragem passiva**) de uma pista de protensão (a fixação na travessa metálica da estrutura de reação ocorre por meio de cunha embutida em porta-cunha).
(Fonte: Weiler-C.Holzberger Ind. Ltda, <http://wch.com.br>)



Figura 1.28 – Equipamento de moldagem de laje alveolar em pista de protensão.
(Fonte: MARKA Soluções Pré-fabricadas, <http://www.marka.ind.br>)



Figura 1.29 – Detalhes da **ancoragem passiva** (blocos de concreto e dispositivos metálicos) de pista de protensão para fabricação de vigas pré-moldadas, onde os fios ou cordoalhas são fixados na travessa metálica por meio de cunha e porta-cunha. (Fonte: Marka Soluções Pré-fabricadas, Fotografias do Autor)

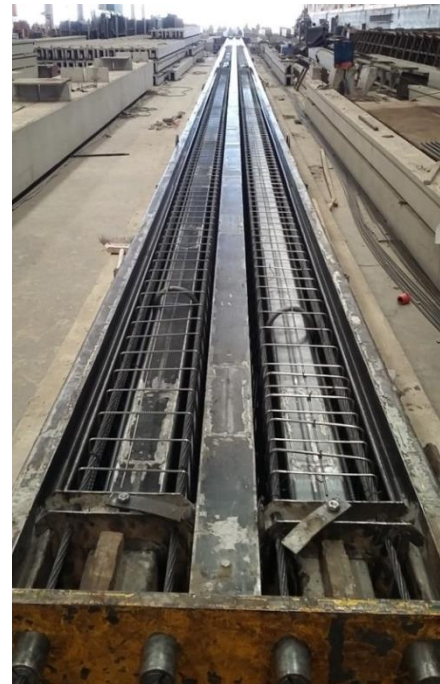


Figura 1.30 – Pista de protensão para fabricação de vigas.
(Fonte: Marka Soluções Pré-fabricadas, Fotografias do Autor)

A NBR 6118 (item 3.1.7) apresenta a definição para “**concreto com armadura ativa pré-tracionada (protensão com aderência inicial)**: concreto protendido em que o pré-alongamento da armadura ativa é feito utilizando-se apoios independentes do elemento estrutural, antes do lançamento do concreto, sendo a ligação da armadura de protensão com os referidos apoios desfeita após o endurecimento do concreto; a ancoragem no concreto realiza-se somente por aderência.”

A Figura 1.31 e a Figura 1.32 mostram a operação de estiramento sendo feita em pista de protensão utilizada para fabricação de painéis e lajes alveolares. Cada fio ou cordoalha tem um conjunto cunha e porta-cunha acoplado, apoiado na travessa metálica da estrutura de reação. Quando o cilindro hidráulico termina o estiramento, o próprio cilindro crava a cunha no interior do furo cônico da porta-cunha, e o fio é então solto. Em cilindros que não executam a cravação, quando o fio é solto ele movimenta-se uns poucos milímetros em sentido contrário ao alongamento, e assim por atrito provoca a penetração da cunha na porta-cunha, até a sua fixação completa. O cilindro hidráulico tem o movimento acionado pela pressão de uma bomba de óleo, e a tensão de tração aplicada é verificada no manômetro da bomba e conferida pelo alongamento do fio ou cordoalha, o qual depende principalmente do comprimento da pista de protensão, sendo comum alcançar mais de 1000 mm.



Figura 1.31 – Operação de estiramento de fio e cordoalha na **ancoragem ativa** de pistas de protensão.
(Fonte: Weiler-C.Holzberger Ind. Ltda, <http://wch.com.br>)

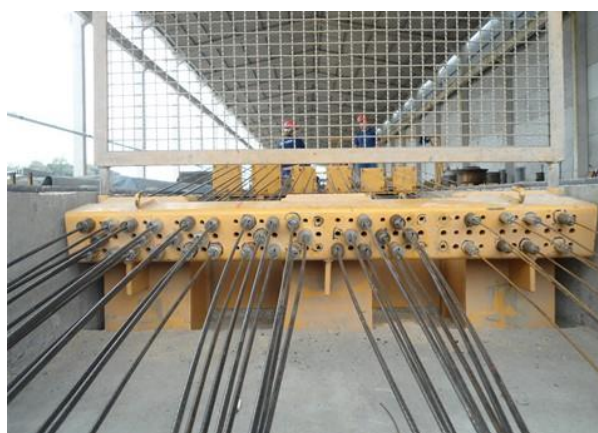


Figura 1.32 – Operação de estiramento de fio na **ancoragem ativa** de pista de protensão.
(Fonte: Weiler-C.Holzberger Ind. Ltda, <http://wch.com.br>)

A Figura 1.33 mostra a operação de estiramento sendo feita em pista de protensão de comprimento limitado, utilizada para fabricação de pequena quantidade de peças, onde a estrutura metálica da pista compõe a fôrma das peças e a própria estrutura de reação, capaz de absorver a força de protensão aplicada na armadura.



Figura 1.33 – Operação de estiramento de fio na **ancoragem ativa** de estrutura metálica de protensão.
(Fonte: Weiler-C.Holzberger Ind. Ltda, <http://wch.com.br>)

A Figura 1.34 mostra a **ancoragem ativa** de uma pista de protensão curta, utilizada para fabricação de vigas pré-moldadas de concreto, em ambiente de fábrica. Os fios ou cordoalhas são estirados individualmente e fixados na travessa metálica, por meio de cunha e porta-cunha.

Nas **ancoragens passivas** geralmente também são dispostos cilindros hidráulicos, não com o objetivo de aplicar o estiramento, mas sim promover o relaxamento da armadura, a soltura das ancoragens de maneira suave, para evitar choques e perda de aderência entre as cordoalhas ou fios e o concreto. A Figura 1.35 mostra a **ancoragem passiva** de uma pista de protensão para fabricação de vigas, com duas cordoalhas fixadas na travessa metálica da estrutura de reação. Durante o tempo de endurecimento do concreto, os cilindros não são utilizados, pois a travessa metálica permanece apoiada em quatro chapas metálicas, chamadas “maletas”. No relaxamento da armadura, os cilindros hidráulicos são acionados, apoiam-se na travessa metálica e nela aplicam um deslocamento muito pequeno, mas suficiente para que as quatro maletas possam ser retiradas (por isso a existência de alças na parte superior). Os cilindros têm então a força diminuída lentamente e gradativamente, o que permite o deslocamento horizontal da travessa, e consequentemente as cordoalhas são relaxadas e soltas das ancoragens em conjunto. Neste momento é realizada então a transferência da protensão para as peças. Portanto, neste sistema de protensão o estiramento é feito na **ancoragem ativa** (ver Figura 1.34), e a soltura das cordoalhas é feita na **ancoragem passiva**.



Figura 1.34 – **Ancoragem ativa** de pista de protensão para fabricação de vigas pré-fabricadas.
(Fonte: Marka Soluções Pré-fabricadas, Fotografias do Autor)



Figura 1.35 – **Ancoragem passiva** em pista de protensão para fabricação de vigas pré-fabricadas.
(Fonte: Marka Soluções Pré-fabricadas, Fotografias do Autor)

A Figura 1.36 mostra estruturas metálicas de **ancoragens passivas** em pistas de protensão utilizadas na fabricação de peças de concreto pré-moldadas, como painéis, lajes alveolares, vigotas de lajes pré-fabricadas, etc., onde dois cilindros hidráulicos são posicionados de modo a fazer o relaxamento suave da armadura de protensão durante a transferência da protensão para as peças de concreto, com utilização também de maletas metálicas, de modo semelhante àquele mostrado na Figura 1.35.

O método da **pré-tensão** é muito utilizado na produção de elementos pré-moldados, porque o ambiente de fábrica possibilita a industrialização e a produção de grandes quantidades de peças, em série, com maior controle de qualidade de todo o processo de produção. A cura natural, bem como a térmica com vapor aquecido, pode também ser utilizada a fim de permitir a transferência da força de protensão em até 24 horas. A Figura 1.37 mostra seções transversais de laje alveolar, onde as cordoalhas podem ser visualizadas próximas à borda inferior.

Como já comentado, a transferência da força de protensão da armadura para o concreto da peça ocorre devido à aderência entre o concreto e a armadura, de modo que a armadura de protensão e o concreto trabalham em conjunto, de maneira integrada, e no caso de corte accidental ou ruptura de um fio, a perda de força de protensão será localizada, porque a aderência permite que o fio mantenha a protensão no comprimento restante.

Devido à baixa idade e resistência do concreto no momento da transferência da protensão para a peça, deformações por encurtamento elástico inicial, retração e fluência do concreto podem atingir valores elevados, provocando uma redução na deformação de alongamento da armadura de protensão, ou seja, pode ocorrer uma significativa **perda de força protensão**.¹⁴

¹⁴ Essas perdas de força de protensão podem ser diminuídas com a adoção de concretos de elevadas resistências à compressão, superiores a 60 MPa.



(Fonte: Weiler-C.Holzberger Ind. Ltda, <http://wch.com.br>)



(Fonte: SENDI Pré-moldados, Fotografia do Autor)

Figura 1.36 – **Ancoragens passivas** de pistas de protensão com cilindros hidráulicos utilizados para o relaxamento (soltura) dos fios da ancoragem em conjunto.



Figura 1.37 – Seções transversais de lajes alveolares, mostrando as cordoalhas de protensão.

(Fonte: SENDI Pré-moldados, Fotografias do Autor)

1.4.2 Protensão com Pós-tensão

No processo de **pós-tensão** (ou **pós-tração** na NBR 6118) a armadura de protensão é estirada após o concreto da peça ter adquirido a resistência necessária para resistir as tensões de compressão provocadas pela protensão, com a armadura ancorada no concreto nas extremidades da peça.

A pós-tensão é aplicada na produção de peças em pequenas quantidades, onde a repetitividade não é um fator existente. Vem sendo muito aplicada na fabricação de peças pré-moldadas de canteiro, para aplicação em viadutos e pontes rodoviárias de vãos pequenos e médios (~ 40 m), e também em lajes e pisos estruturais, estruturas de pontes de grandes vãos moldadas *in loco*, etc. Para a armadura de protensão existem as opções de barras de aço especial, cordoalhas **não** engraxadas (inseridas em bainha metálica)¹⁵ e cordoalhas engraxadas (item 1.4.3).

¹⁵ Fios também podem ser utilizados.

A viga ilustrada na Figura 1.38 será utilizada para a descrição do processo de fabricação segundo a pós-tensão, com armadura formada por um **cabo de protensão**,¹⁶ composto por cordoalhas **não** engraxadas. No interior da fôrma é colocado um duto (bainha¹⁷), disposto ao longo do comprimento da viga. O concreto é lançado na fôrma, e envolve as armaduras passivas, insertos, placas de aço de ancoragem, bainha, etc. Após o endurecimento do concreto as cordoalhas são inseridas dentro da bainha, atravessando a peça de uma extremidade à outra. As cordoalhas são fixadas em uma das extremidades da viga (**ancoragem passiva**), e quando o concreto apresenta a resistência requerida, as cordoalhas são estiradas (tracionadas) pelo cilindro hidráulico, posicionado e apoiado na própria viga em sua outra extremidade (**ancoragem ativa**).¹⁸ Terminada a operação de estiramento, a força no cilindro hidráulico é relaxada, e a armadura, tendendo a voltar à deformação inicial zero, movimentar-se em alguns poucos milímetros contrariamente ao alongamento. O movimento é contido por cunhas, inseridas em furos cônicos da placa de ancoragem, na posição da **ancoragem ativa**, e assim as cordoalhas se fixam. Portanto, terminada a operação de estiramento o cabo de protensão aplica forças de compressão nas extremidades da viga, que comprime o concreto de parte ou de toda a seção transversal da viga, ao longo de todo seu comprimento. A armadura de protensão impõe também forças transversais na viga, no caso de cabo curvo.

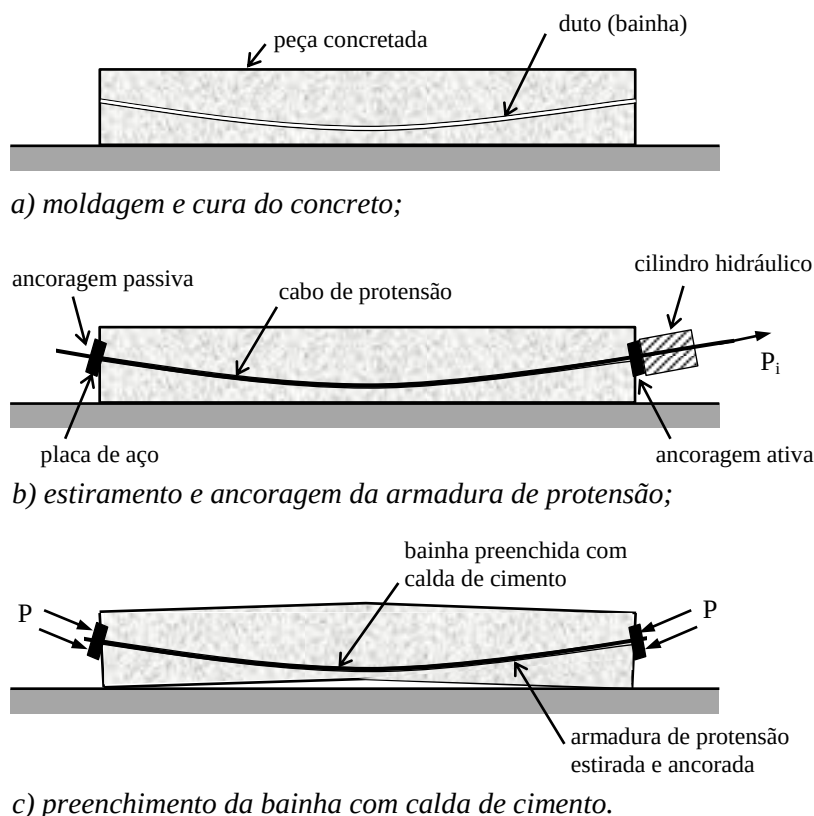


Figura 1.38 – Esquema simplificado de fabricação de viga protendida com **pós-tensão**.

Após a operação de estiramento, a bainha é geralmente preenchida com calda (nata) de cimento sob pressão, para proteger o aço e proporcionar aderência com o concreto, o que faz com que os dois materiais trabalhem de modo solidário, em conjunto, e com melhor comportamento da peça na resistência à fissuração e à flexão (ver Figura 1.39 e Figura 1.40). Com a injeção de calda de cimento tem-se a **pós-tensão com aderência**, e sem a injeção tem-se a **pós-tensão sem aderência**.¹⁹

¹⁶ **Cabo de protensão** é um conjunto de cordoalhas.

¹⁷ **Bainha**: é um tubo, geralmente metálico e corrugado, onde é inserido o aço de protensão o qual pode se movimentar durante a operação de protensão. Posteriormente pode ser preenchido com nata de cimento para criar aderência entre o aço e o concreto da peça.

¹⁸ A protensão também pode ser aplicada com o posicionamento de dois cilindros hidráulicos, um em cada extremidade da peça, que tracionam simultaneamente a armadura de protensão. Neste caso, as duas ancoragens são chamadas **ativas**.

¹⁹ A **pós-tensão com aderência** proporciona peças mais seguras (o concreto da peça trabalha em conjunto com a armadura, que tem maior proteção em caso de incêndio, etc.) que aquelas sem aderência, além da calda de cimento proteger a armadura contra possíveis agentes agressivos que possam alcançar a bainha.



Figura 1.39 – Montagem das armaduras passivas e bainhas metálicas para confecção de uma viga pós-tensionada pré-moldada para superestrutura de viaduto em rodovia. (Fotografias do Autor)

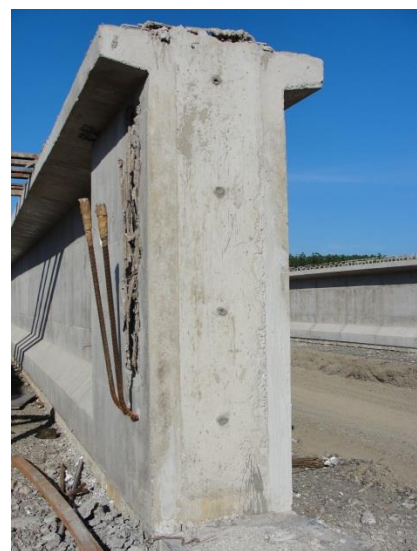
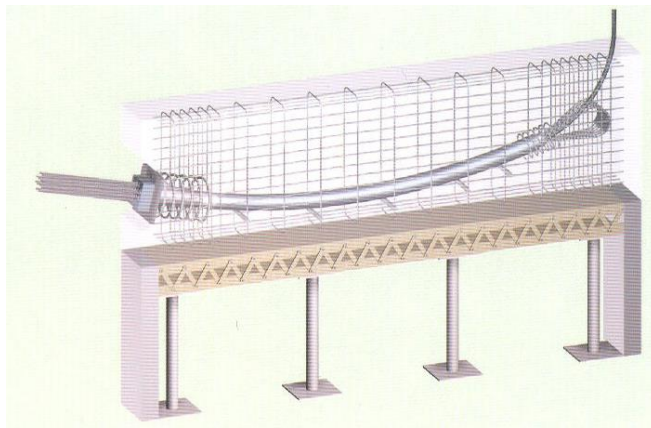


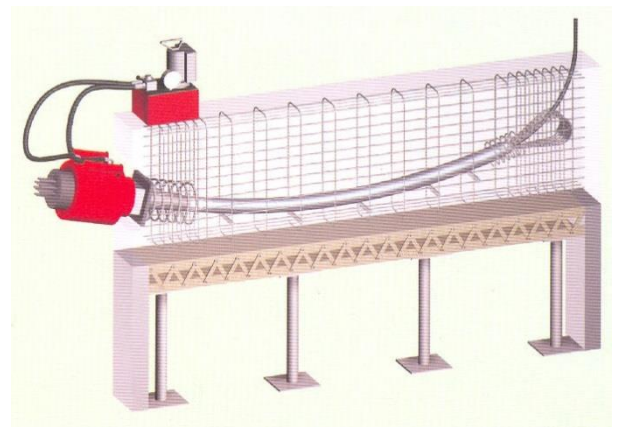
Figura 1.40 – Viga protendida pós-tensionada pré-moldada finalizada, para superestrutura de viaduto em rodovia. (Fotografias do Autor)

A NBR 6118 (item 3.1.8) define “**concreto com armadura ativa pós-tracionada (protensão com aderência posterior)**: concreto protendido em que o pré-alongamento da armadura ativa é realizado após o endurecimento do concreto, sendo utilizadas, como apoios, partes do próprio elemento estrutural, criando posteriormente aderência com o concreto, de modo permanente, através da injeção das bainhas.”

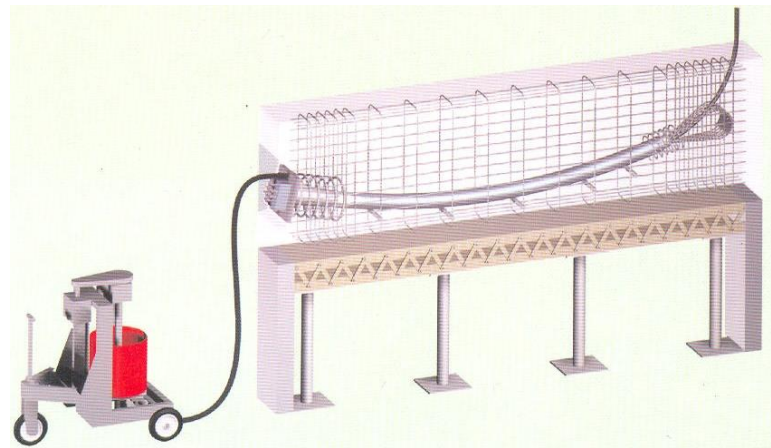
A Figura 1.41 mostra também esquematicamente a aplicação da **pós-tensão com aderência**, onde a ancoragem passiva ocorre pelo laço das cordoalhas inseridas no concreto.²⁰



a) moldagem da peça com bainha metálica no interior da fôrma;



b) operação de estiramento da armadura de protensão, após o concreto da peça apresentar a resistência à compressão necessária;



c) preenchimento da bainha com calda de cimento para criar aderência entre a armadura de protensão e o concreto.

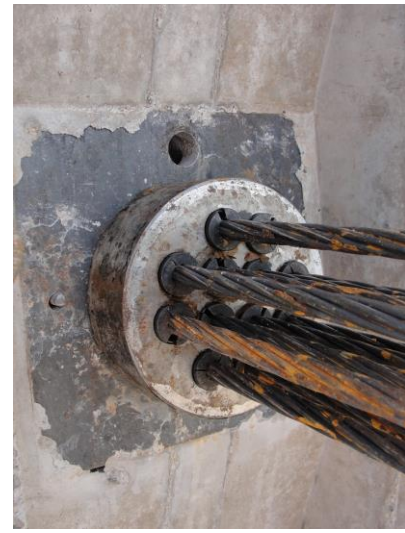
Figura 1.41 – Esquema simplificado de fabricação de peça protendida com **pós-tensão**.
(Fonte: Catálogo Rudloff – Concreto Protendido^[7])

Assim como na pré-tensão, a forma mais comum de fixação de uma cordoalha ou fio é com a cunha de aço. No entanto, a diferença é que na **pós-tensão** não é utilizado o dispositivo porta-cunha, pois a cunha é inserida diretamente dentro de um furo cônico existente na placa de aço, o que configura um sistema altamente eficiente e de baixo custo (Figura 1.42). Assim, a armadura, fixada nas extremidades da peça, aplica a **força de protensão**. Portanto, neste caso a aplicação da força de protensão ocorre de forma concentrada, por meio de placas de aço embutidas no concreto nas superfícies extremas das vigas (Figura 1.43 e Figura 1.44).

²⁰ Existem vários tipos de **dispositivos de ancoragem**, porém, o mais comum é aquele com placa de aço com furos cônicos e cunhas inseridas nesses furos. A forma de ancoragem passiva, mostrada no lado direito da peça da Figura 1.41, é uma opção.



a) placa de aço embutida no concreto para transferência da força de protensão para a peça;



b) placa de aço circular apoiada sobre a placa embutida no concreto;



c) placa de aço para fixação de cordoalhas;



d) cunhas tripartidas inseridas em furos cônicos.

Figura 1.42 – Ancoragem tipo Rudloff para fixação de cabos em viga protendida com **pós-tensão**.
(Fotografias do Autor)



Figura 1.43 – Viga protendida pós-tensionada com ancoragem Rudloff para superestrutura de viaduto em rodovia. (Fotografias do Autor)



Figura 1.44 – Ancoragem de cabo de protensão na **pós-tensão**.
(Fonte: Impacto, <http://impactoprotensao.com.br>)

Os **cabos de protensão** (conjuntos de cordoalhas) podem ser estirados em estágios diferentes, proporcionando incrementos de força de protensão na peça quando necessários, conforme existam diferentes estágios de construção e as cargas vão sendo progressivamente aumentadas.

A Figura 1.45 mostra a produção de vigas protendidas pós-tensionadas no que é chamado **pré-moldado de canteiro**, onde o viaduto em que as vigas serão utilizadas fica nas proximidades. A Figura 1.46 mostra equipamentos utilizados na operação de aplicação da protensão e de injeção de calda de cimento.



Figura 1.45 – Vigas protendidas pós-tensionadas pré-moldadas de canteiro. (Fotografia do Autor)



a) cilindro hidráulico posicionado para estiramento das cordoalhas;



b) aplicação da protensão (estiramento) pelo conjunto cilindro e bomba hidráulica;



c) aferição do alongamento ocorrido no cabo de protensão em um estágio do estiramento;



d) equipamentos para injeção de calda de cimento nas bainhas.

Figura 1.46 – Aplicação da protensão em viga pós-tensionada com ancoragem Rudloff.
(Fotografias do Autor)

1.4.3 Protensão com Pós-tensão com Cordoalha Engraxada

A **pós-tensão sem aderência** com o uso de cordoalha engraxada vem sendo muito aplicada no Brasil e no mundo nas últimas duas décadas, especialmente em lajes maciças e nervuradas, pisos industriais, vigas e em reforço estrutural. A cordoalha de sete fios é envolta com graxa para diminuir o atrito com a capa de polietileno durante a movimentação na operação de estiramento (Figura 1.47). A capa funciona como uma bainha, impedindo o contato do concreto com a cordoalha.

As cordoalhas são colocadas na fôrma da peça ou estrutura, fixadas em uma das extremidades por dispositivos apropriados de ancoragem, e são envolvidas pelo concreto após o lançamento na fôrma (Figura 1.48, Figura 1.49 e Figura 1.50).

Quando o concreto adquire a resistência exigida, as cordoalhas são estiradas por um cilindro hidráulico (uma a uma - Figura 1.51), e fixadas na **ancoragem ativa**. Como não existe aderência entre as cordoalhas e o concreto, a força que comprime o concreto da peça concentra-se apenas nas extremidades (ancoragens).

A NBR 6118 (item 3.1.9) define “**concreto com armadura ativa pós-tracionada (protensão sem aderência)**: concreto protendido em que o pré-alongamento da armadura ativa é realizado após o endurecimento do concreto, sendo utilizadas, como apoios, partes do próprio elemento estrutural, mas não sendo criada aderência com o concreto, ficando a armadura ligada ao concreto apenas em pontos localizados.”

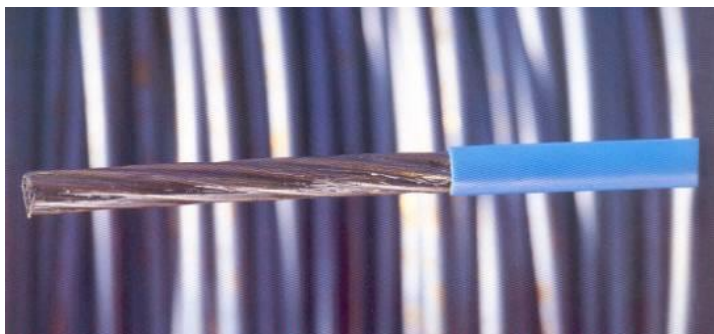
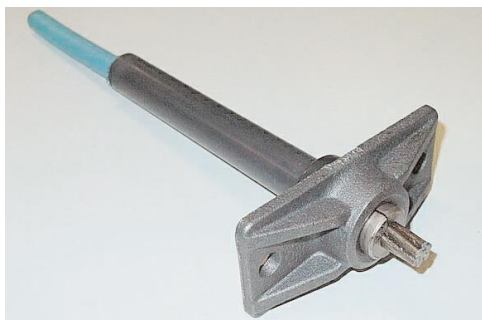


Figura 1.47 – Cordoalha engraxada de sete fios. (Fonte: Catálogo ArcelorMittal^[8])



(Fonte: Cauduro^[9])



(Fonte: Mac, <http://www.macprotensao.com.br>)



(Fonte: Impacto, <http://impactoprotensao.com.br>)

Figura 1.48 – Dispositivos de ancoragem para cordoalha engraxada.



a) armaduras passivas e cordoalhas engraxadas na região de apoio de um pilar;



b) detalhe da ancoragem passiva de uma cordoalha engraxada;

Figura 1.49 – Laje nervurada protendida com cordoalhas engraxadas. (Fotografias do Autor)



a) detalhe da ancoragem ativa de cordoalha engraxada;



b) detalhe das armaduras no cruzamento de nervuras.

Figura 1.50 – Laje nervurada protendida com cordoalhas engraxadas. (Fotografias do Autor)



Figura 1.51 – Operação de estiramento de cordoalha engraxada. (Fonte: ArcelorMittal)

Estudo complementar:

- Ler catálogo “*Concreto Protendido*” da empresa Rudloff^{[7],21};
- Ler “*Manual para a boa execução de estruturas protendidas usando cordoalhas de aço engraxadas e plastificadas*”, de Eugenio L. Cauduro^{[9],22}.

1.4.4 Protensão Externa

A protensão com a armadura de protensão interna à seção transversal da peça (inserida dentro do concreto), representa a grande maioria dos casos de aplicação nas estruturas, mas a protensão externa é muito aplicada em alguns casos específicos, como em seção celular ou caixão de estruturas de grandes pontes, como mostrado na Figura 1.52, onde a armadura de protensão, embora na parte interna da seção caixão, fica posicionada externamente ao concreto da seção, ou seja, a bainha do cabo de protensão não tem aderência com o concreto. Sendo externa, a armadura de protensão pode ser removida ou substituída quando necessário, em qualquer tempo.

A armadura de protensão externa configura uma parcela da armadura total, composta também por armaduras inseridas no concreto, que podem ser passiva, ativa, ou ambas. Além das pontes, as aplicações mais comuns são em reabilitação e reforço de estruturas já existentes, em estruturas circulares (silos, reservatórios), grandes tubos e tanques de água.^[2] Como reforço de estruturas de pontes já existentes (de concreto, aço ou madeira), aumenta a capacidade de carga, com a armadura de protensão sendo colocada externamente aos elementos, tensionada e ancorada nas extremidades da estrutura, configurando uma solução simples e eficiente (Figura 1.53 e Figura 1.54).

²¹ RUDLOFF. *Concreto Protendido*. Catálogo. Rev. 6, 11/2015. Disponível em (1/02/2019): http://www.rudloff.com.br/downloads/catalogo_concreto_protendido_rev-06.pdf

²² CAUDURO, E.L. *Manual para a boa execução de estruturas protendidas usando cordoalhas de aço engraxadas e plastificadas*. 2ª ed., s/d, 111p. Disponível em (1/02/2019): http://www.set.eesc.usp.br/mdidatico/protendido/arquivos/manual_para_a_boa_execucao_de_estruturas_protendidas.pdf

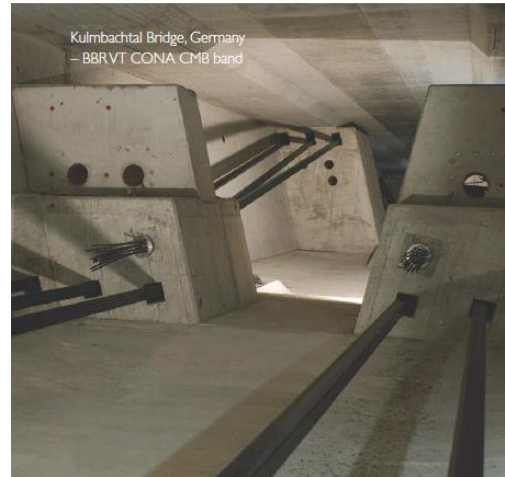


Figura 1.52 – Cabos de protensão externos em seção caixa de ponte.
(Fonte: BBR VT International Ltd, <http://www.bbrnetwork.com>)



Figura 1.53 – Protensão externa para reforço de viaduto.
(Fonte: Dywidag, <https://structurae.net/products-services/dywidag-bar-post-tensioning-system>)



Figura 1.54 – Protensão externa para reforço de ponte.
(Fonte: BBR VT International Ltd, <http://www.bbrnetwork.com>)

1.4.5 Dispositivos de Ancoragem para a Pós-tensão

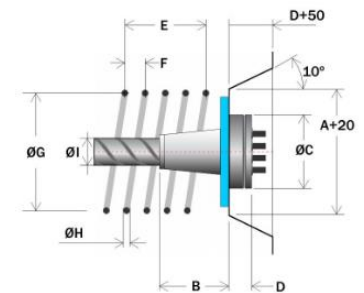
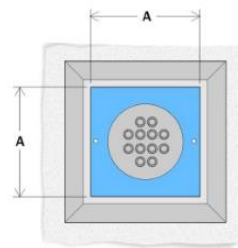
Existe uma infinidade de conjuntos de dispositivos para a ancoragem da armadura na **pós-tensão**, os quais constituem os chamados “sistemas de protensão”, desenvolvidos por empresas e pelos precursores do CP no século passado, principalmente Eugène Freyssinet. Podem ou não ser protegidos por patentes e de modo geral são similares, com variações nos detalhes. Os mais conhecidos são os europeus, como Dywidag, VSL, BBRV, Rudloff, CCL, Tensacciai.

No Brasil também existem empresas que aplicam a protensão em obras, e algumas fabricam os próprios sistemas de protensão, como Impacto Protensão, MAC Protensão, Protende, Alga, etc. Algumas empresas, de origem estrangeira, estão instaladas no Brasil, como Freyssinet, Dywidag e Rudloff.

Da Figura 1.55 até a Figura 1.62 ilustram-se vários tipos de dispositivos de ancoragem, de diferentes empresas. Geralmente são utilizadas cunhas, que ficam alojadas em cavidades cônicas de blocos ou placas de aço.



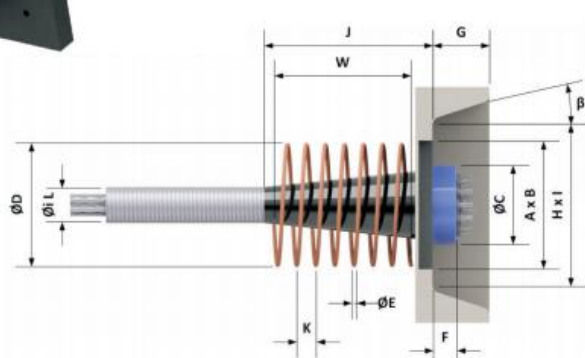
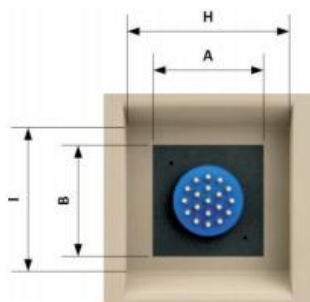
(Fonte: Protende – Sistemas e Métodos, Fotografias do Autor)



(Fonte: Protende – Sistemas e Métodos, <https://www.protende.com.br/home>)

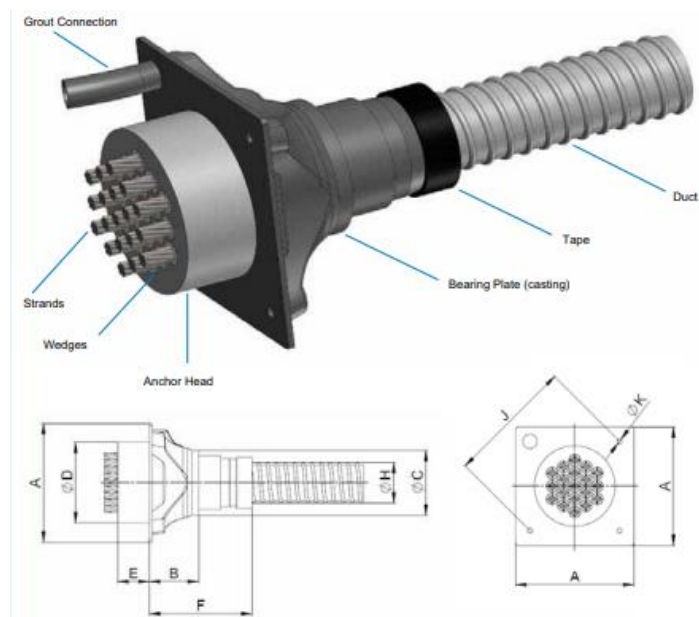


(Fonte: BBR VT International Ltd, <http://www.bbrnetwork.com/index.php?id=1>)

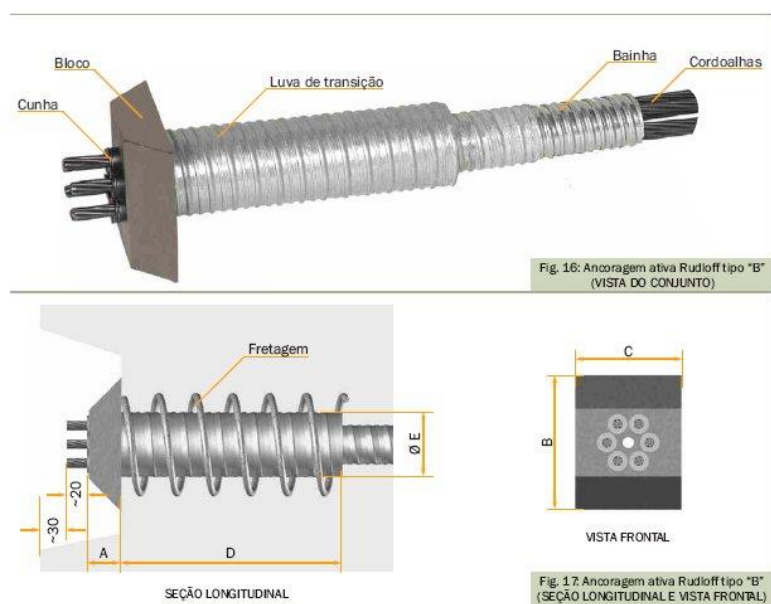
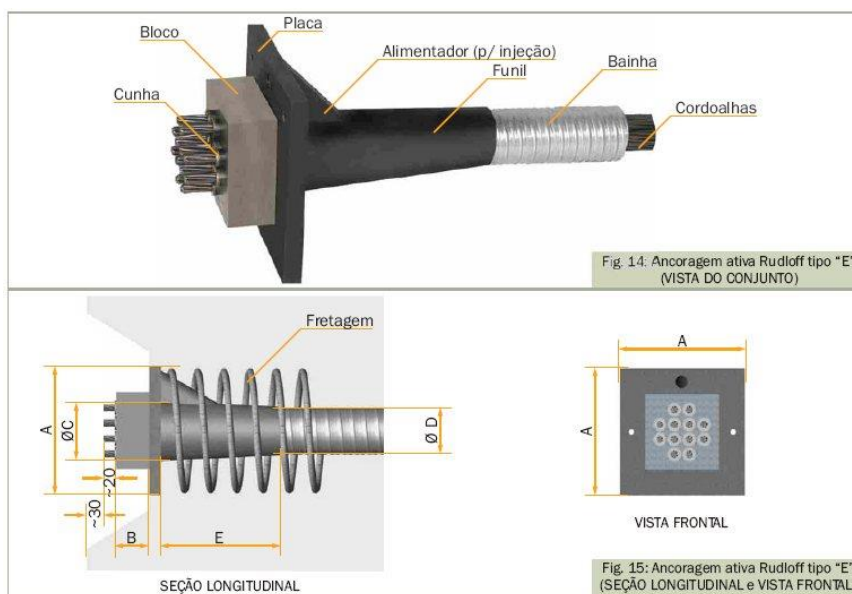


(Fonte: Freyssinet, http://www.freyssinet.com/freyssinet/wfreyssinet_en.nsf)

Figura 1.55 – Dispositivos de **ancoragem ativa** para a pós-tensão.



(Fonte: VSL, <http://www.vsl.com>)



(Fonte: Catálogo Rudloff – Concreto Protendido^[7])

Figura 1.56 – Dispositivos de **ancoragem ativa** para a pós-tensão.

NICHOS DE PROTENSÃO VERTICAIS PARA $\alpha = 10^\circ$					
Nº de cordoalhas de $\varnothing 12,7$ mm	2 a 4	4 a 7	8 a 12	13 a 22	23 a 31
Nº de cordoalhas de $\varnothing 15,2$ mm	2 e 3	4 a 6	7 a 9	10 a 15	16 a 22
A (cm)	27,5	27,5	37,3	47,8	55,4
B (cm)	13,1	13,1	17,5	22,3	25,9
C (cm)	14,4	14,4	19,9	25,4	29,5
D (cm)	12,8	12,8	15,3	19,0	21,6
F (cm)	5,6	6,0	8,9	11,0	12,5
G (cm)	9,2	9,2	10,7	13,0	14,4
H (cm)	0,8	0,8	1,9	2,3	2,6
(graus)	10°	10°	10°	10°	10°
U (cm)	12	14	18	25	27
V (cm)	16	19	27	37,5	40
W (cm)	15	18	25	25	27
X (cm)	18	19	27	37,5	40

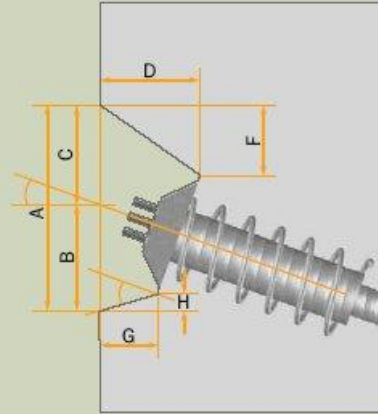


Fig. 43: Nicho de protensão vertical

Figura 1.57 – Medidas para confecção do nicho para protensão.
(Fonte: Catálogo Rudloff – Concreto Protendido^[7])

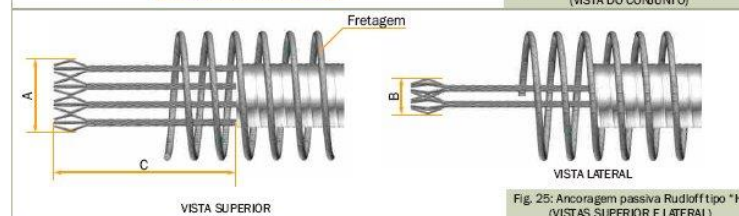
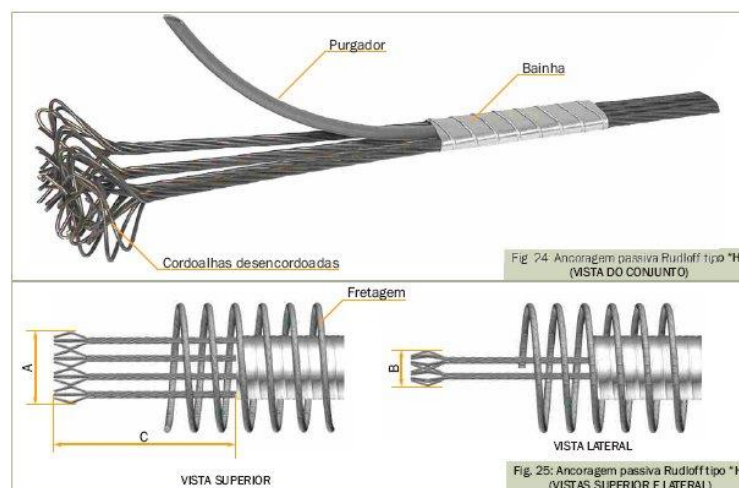
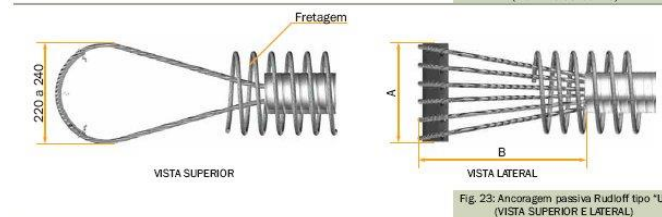
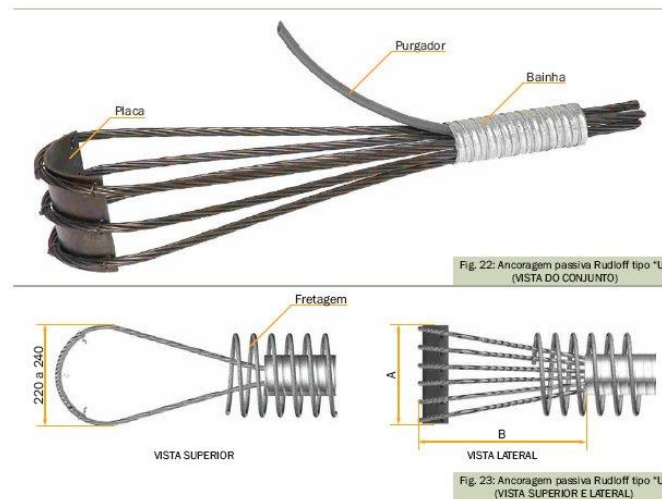


Figura 1.58 - Dispositivo para **ancoragem passiva** para a pós-tensão.
(Fonte: Catálogo Rudloff – Concreto Protendido^[7])

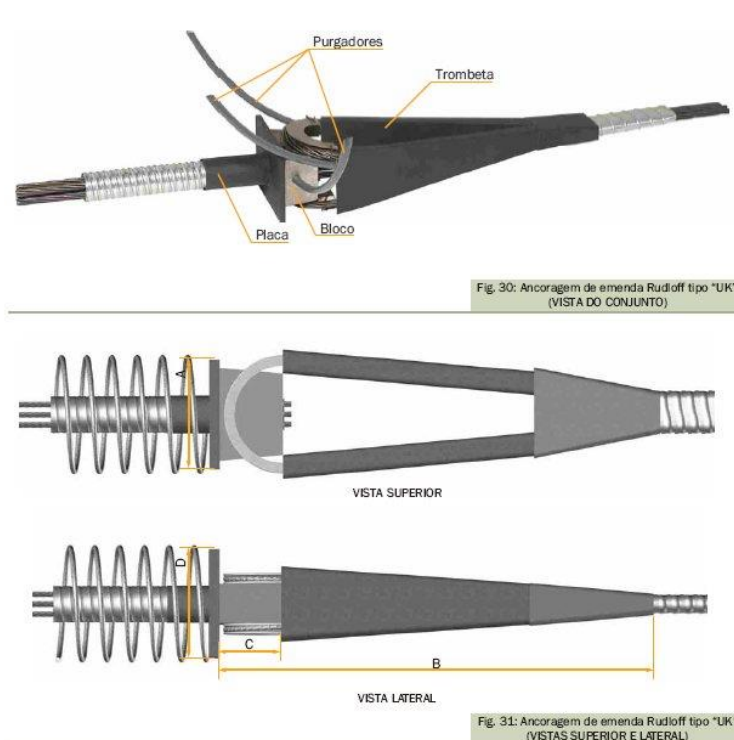


Figura 1.59 - Dispositivo para **emenda** de armadura de protensão.
(Fonte: Catálogo Rudloff – Concreto Protendido^[7])

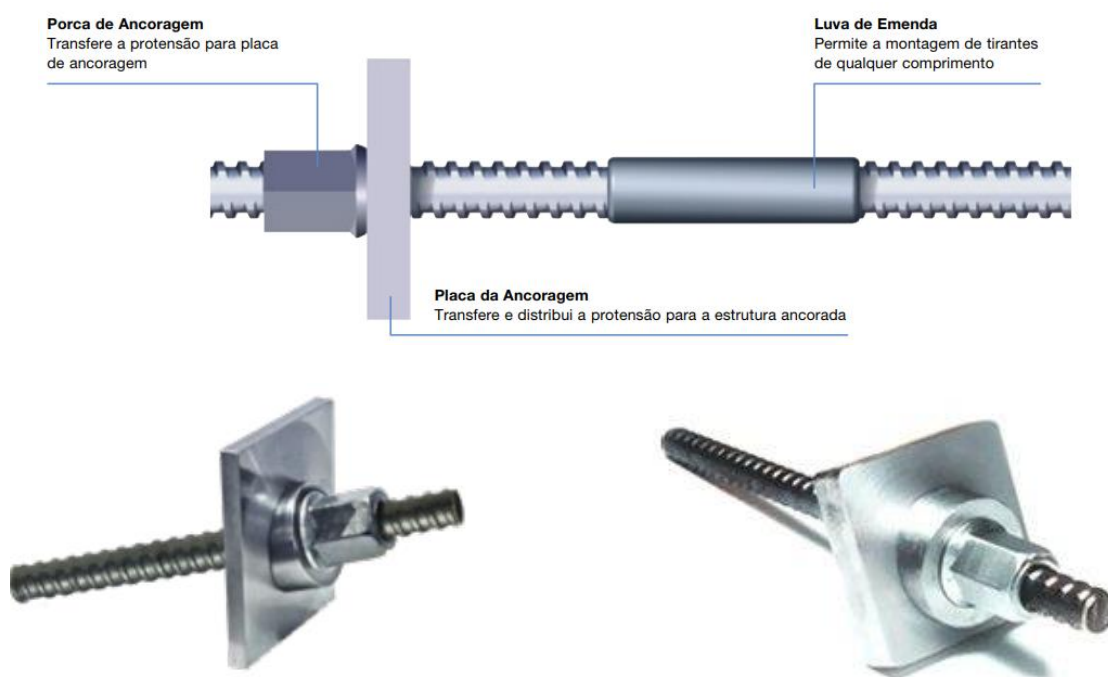


Figura 1.60 - Dispositivos para ancoragem de barra de protensão do sistema Dywidag.
(Fonte: Catálogo Dywidag^[6])

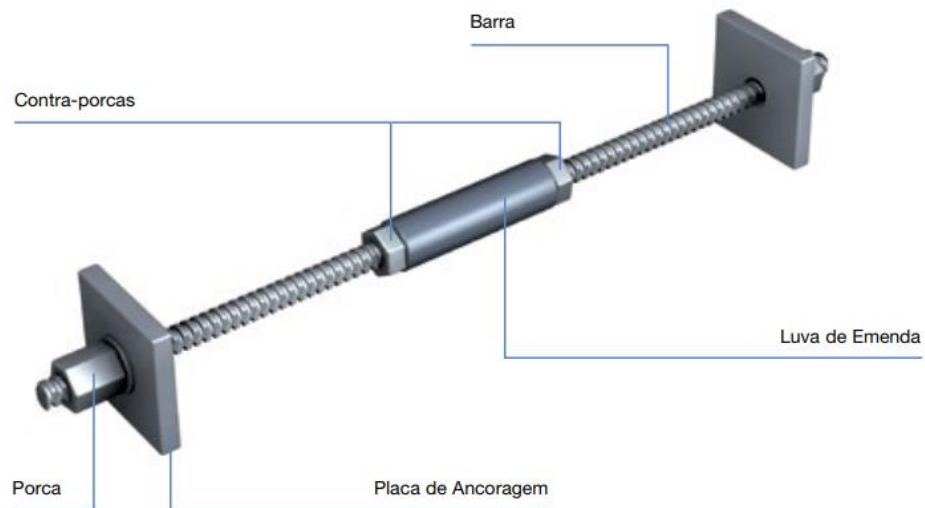


Figura 1.61 - Dispositivos para ancoragem de barra de protensão do sistema Gewi. (Fonte: Catálogo Dywidag^[6])



Figura 1.62 - Dispositivo para ancoragem de barra de protensão. (Fonte: Catálogo Dywidag^[6])

A Figura 1.63 ilustra a aplicação da protensão na **pós-tensão** em uma estrutura de grande porte, e a Figura 1.64 mostra um piso estrutural pós-tensionado em execução.



Figura 1.63 – Aplicação de protensão em cabos na pós-tensão. (Fonte: VSL, <http://en.vsl.cz/post-tensioning>)



Figura 1.64 – Piso de concreto pós-tensionado.
(Fonte: VSL, <http://en.vsl.cz/joint-free-post-tensioned-slabs-on-grade>)

1.5 Nível de Protensão

A escolha entre Concreto Armado ou Concreto Protendido para uma determinada estrutura ou peça estrutural é essencialmente econômica, ou seja, depende principalmente do custo. Para lajes e vigas com vãos pequenos (~ 8-10 m) o Concreto Armado é geralmente a solução mais econômica. Quando o vão aumenta, há a necessidade de aumentar a seção transversal, pois de modo geral a flecha passa a ser o fator condicionante do projeto da laje ou viga de Concreto Armado. E para evitar uma flecha excessiva a seção torna-se antieconômica. Para vãos médios e grandes, a protensão surge como uma solução viável técnica e econômica, pois diminui a flecha e possibilita seções transversais menores.^[1]

A intensidade da força de protensão (e da quantidade de armadura) pode assumir diferentes valores, sendo dependente de vários fatores, principalmente do vão, do carregamento, da agressividade do ambiente e das condições em serviço (flecha, abertura de fissura, nível de vibração, etc.). Em condições ambientais agressivas a intensidade da protensão é escolhida de forma a eliminar as tensões de tração sob os carregamentos de serviço, para evitar abertura de fissuras. Neste caso escolhe-se a **protensão completa**, que significa peça livre de fissuras de flexão, como mostrado na Figura 1.65.

Em muitos casos, como estruturas inseridas em ambientes não agressivos, não há a necessidade de evitar o surgimento de fissuras, de modo que a intensidade da força de protensão pode ser menor, e consequentemente o projeto pode ser mais econômico. A peça pode, por exemplo, ser projetada de forma a permanecer sem fissuras sob a atuação dos carregamentos permanentes, e com fissuras, que se abrem e se fecham conforme o carregamento variável é aplicado e retirado. É a chamada **protensão parcial**, quando a peça trabalha fissurada sob o carregamento total.^[1,10]

A peça com **protensão parcial** tem a abertura de fissura controlada, limitada a um valor máximo (0,2 mm conforme a NBR 6118) a fim de não prejudicar a estética e a durabilidade. Armadura passiva tracionada deve ser colocada para resistir às tensões de tração e diminuir a abertura das fissuras. A peça, embora fissurada, com a força de protensão apresenta rigidez muito maior que uma peça de Concreto Armado com seção transversal e armadura passiva similares. Mesmo fissurada a peça ainda apresenta flecha menor, e configura-se uma opção ao projetista, entre a peça em Concreto Protendido com **protensão completa**²³ e a peça em Concreto Armado.

²³ Os níveis de protensão, completa, limitada e parcial, são apresentados conforme a NBR 6118 no item 3.6.

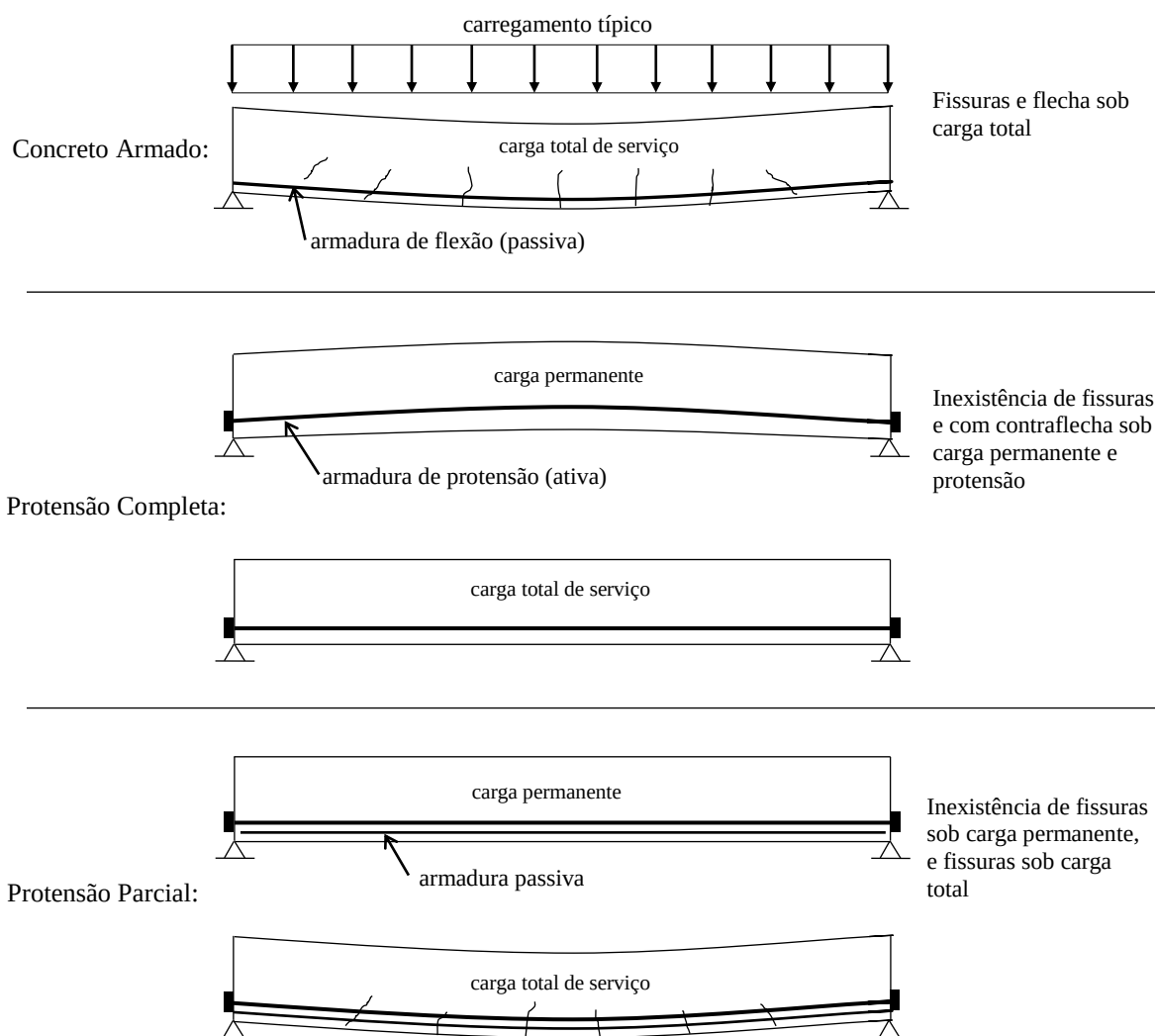


Figura 1.65 – Comportamento de viga de Concreto Armado e de Concreto Protendido com protensão completa e parcial.^[2]

1.6 Tensões Elásticas

As tensões normais (σ) atuantes no concreto da seção transversal de uma viga protendida, devidas à força de protensão, ao peso próprio e aos carregamentos externos atuantes (permanentes e variáveis), são determinadas conforme a teoria simples de viga, e assumindo comportamento elástico linear para o material.²⁴ No entanto, como o concreto não apresenta ao longo do tempo um comportamento exatamente elástico linear, as tensões calculadas propiciam uma aproximação das tensões que ocorrem no concreto logo após a aplicação dos carregamentos iniciais. Deformações causadas pela retração e fluência do concreto, que vão ocorrendo ao longo do tempo de vida da peça, causam uma significativa redistribuição das tensões com o tempo, principalmente nas peças com quantidades elevadas de armadura de protensão aderidas ao concreto.^[1]

As propriedades geométricas são geralmente consideradas para a seção transversal bruta,²⁵ pois comumente a seção não está fissurada. Se a seção fissurar, a análise para a determinação das propriedades da seção deve ser feita sobre a seção fissurada,^[1] como será mostrado mais adiante nos cálculos de flecha e abertura de fissura.

O cálculo das tensões elásticas atuantes no concreto mostra se ocorrem tensões de tração na peça submetida à força de protensão e aos carregamentos de serviço, que podem ou não causar fissuras no

²⁴ A formulação das tensões elásticas está também apresentada no item 4.3, para seções transversais genéricas e com outras formas de apresentação das equações.

²⁵ Na seção bruta não se considera a homogeneização da seção transversal, que é um assunto constante nos livros de Resistência dos Materiais.

concreto,²⁶ bem como se as tensões de compressão são excessivas e podem trazer perdas de protensão significativas por encurtamento do concreto.

Uma **viga não fissurada**, simplesmente apoiada e submetida a uma força de protensão axial P , como mostrada na Figura 1.66a, tem tensões normais uniformes de compressão (*com sinal negativo*), de valor:

$$\sigma = -\frac{P}{A_c} \quad \text{Eq. 1.1}$$

onde A_c é a área da seção transversal de concreto. Se um carregamento externo uniformemente distribuído for aplicado sobre a viga (Figura 1.66b), causará um momento fletor máximo positivo no meio do vão (M), e as tensões normais no concreto, em uma fibra distante y do CG da seção transversal, são:

$$\sigma = -\frac{P}{A_c} \pm \frac{M y}{I_c} \quad \text{Eq. 1.2}$$

Nas fibras da base (b) e do topo (t) da seção as tensões são:

$$\sigma_b = -\frac{P}{A_c} + \frac{M y}{I_c} \quad \text{Eq. 1.3}$$

$$\sigma_t = -\frac{P}{A_c} - \frac{M y}{I_c} \quad \text{Eq. 1.4}$$

$y = h/2$ para seção retangular;

I_c = momento de inércia da seção transversal.

A tensão de compressão da protensão na base ($-P/A_c$) reduz a tensão de tração proveniente da flexão (My/I_c), eliminando-a completamente ou permitindo uma tensão de tração menor que uma tensão limite (máxima) estabelecida pelo projetista. A tensão de compressão da protensão no topo ($-P/A_c$) se soma à tensão de compressão proveniente do carregamento externo ($-My/I_c$), de modo que a protensão axial atua de maneira desfavorável, pois diminui a capacidade de carga da viga, em função da tensão máxima de compressão permitida no concreto. Para evitar essa limitação e aumentar a capacidade de carga da viga, a armadura de protensão pode ser colocada excentricamente em relação ao centro de gravidade (CG) da seção transversal, mais próxima à fibra mais tracionada da seção (Figura 1.66c). A força de protensão excêntrica origina um momento fletor ($P \cdot e_p$), que causa tensão de tração no topo e diminui a tensão de compressão, e assim no topo poderá resultar tensão de compressão ou de tração. As tensões na base e no topo ao longo da viga tornam-se:

$$\sigma_b = -\frac{P}{A_c} - \frac{P e_p y}{I_c} \quad \text{Eq. 1.5}$$

$$\sigma_t = -\frac{P}{A_c} + \frac{P e_p y}{I_c} \quad \text{Eq. 1.6}$$

onde a excentricidade e_p é a distância do centro de gravidade (CG) da seção transversal ao centro de gravidade da armadura de protensão (A_p).

²⁶ Ocorrerá fissura se a tensão de tração superar a resistência do concreto à tração na flexão.

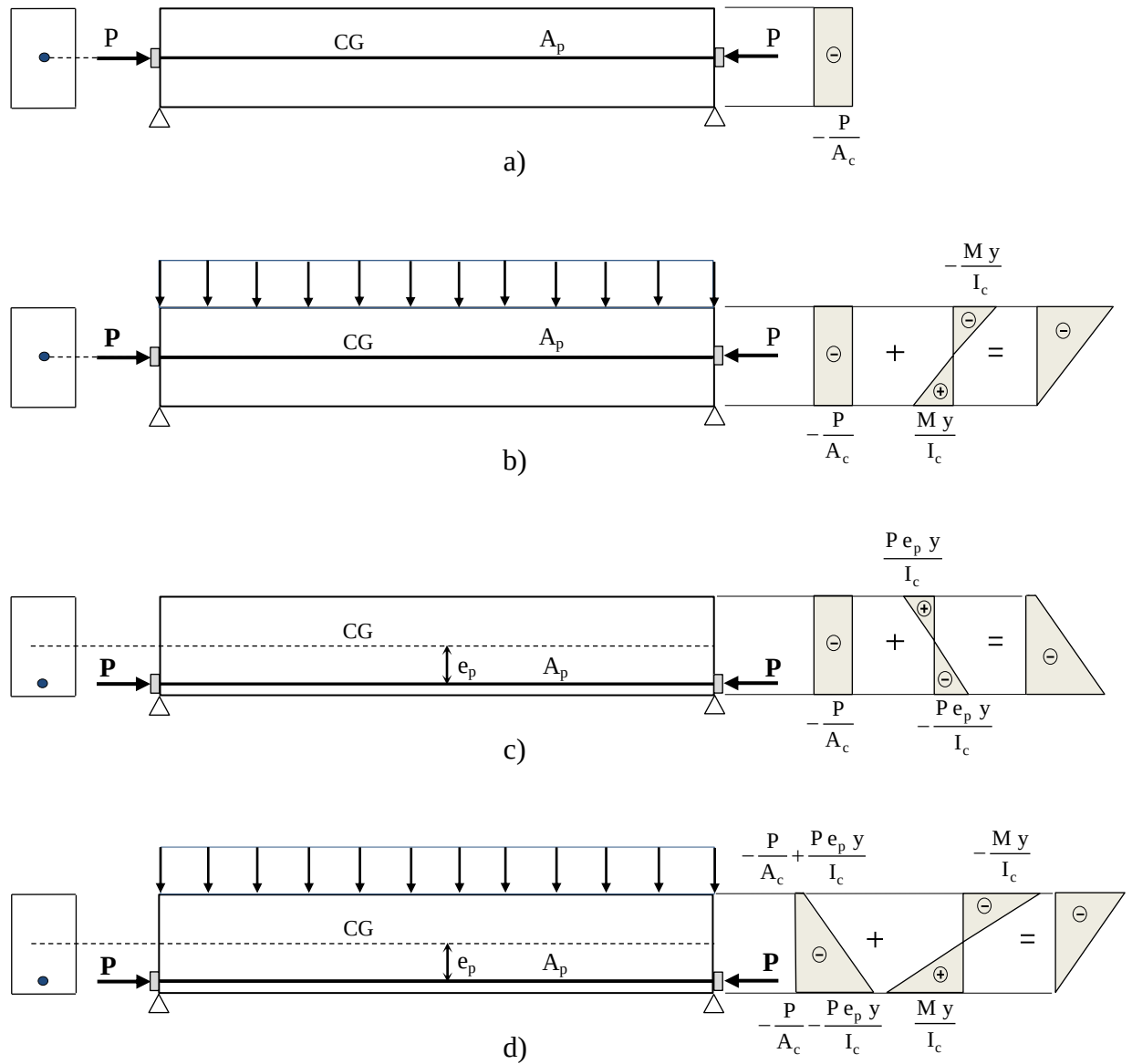


Figura 1.66 – Diagramas de tensões elásticas em viga retangular com armadura de protensão reta: a) armadura posicionada no CG da seção, **sem** carregamento externo; b) seção do meio do vão, com armadura posicionada no CG da seção e **com** carregamento externo; c) armadura excêntrica, **sem** carregamento externo; d) seção do meio do vão, com armadura excêntrica e **com** carregamento externo.

Com o carregamento externo aplicado sobre a viga as tensões no meio do vão tornam-se (Figura 1.66d):

$$\sigma_b = -\frac{P}{A_c} - \frac{P e_p y}{I_c} + \frac{M y}{I_c} \quad \text{Eq. 1.7}$$

$$\sigma_t = -\frac{P}{A_c} + \frac{P e_p y}{I_c} - \frac{M y}{I_c} \quad \text{Eq. 1.8}$$

Considerando os módulos de resistência à flexão relativos à base (b) e ao topo (t) da seção:

$$W_b = \frac{I_c}{y_b} \quad \text{Eq. 1.9}$$

$$W_t = \frac{I_c}{y_t} \quad \text{Eq. 1.10}$$

e aplicando nas equações Eq. 1.7 e Eq. 1.8:

$$\sigma_b = -\frac{P}{A_c} - \frac{P e_p}{W_b} + \frac{M}{W_b} \quad \text{Eq. 1.11}$$

$$\sigma_t = -\frac{P}{A_c} + \frac{P e_p}{W_t} - \frac{M}{W_t} \quad \text{Eq. 1.12}$$

Na determinação das tensões elásticas, a influência das armaduras longitudinais (ativa e passiva) nas propriedades da seção (A_c , I_c , etc.) deve ser considerada quando a quantidade de armadura for grande e significativa em relação à seção transversal, ou seja, deve-se fazer a homogeneização da seção transversal. Não sendo grande a armadura, a homogeneização pode ser desprezada, pois os erros são pequenos e desprezíveis.^[5]

1.6.1 Exemplo – Tensões Elásticas em Laje

Dimensionar uma laje simplesmente apoiada, com os seguintes dados: altura $h = 30$ cm, altura útil da armadura passiva $d_s = 27$ cm, concreto C50 ($f_{ck} = 50$ MPa), tensão efetiva máxima permitida na armadura de protensão $f_{p,ef} = 1.400$ MPa, aço da armadura passiva CA-50 ($f_{yd} = 435$ MPa), tensão de compressão máxima permitida no concreto $f_{c,máx} = -25$ MPa, vão $\ell = 10$ m, peso específico do concreto $\gamma_{concr} = 25$ kN/m³, carga variável sobre a laje de 7,5 kN/m².²⁷

A laje será calculada tomando-se uma faixa igual à altura ($b = 30$ cm – ver Figura 1.67), de modo que as quantidades de armadura que serão calculadas são relativas à largura de 30 cm.

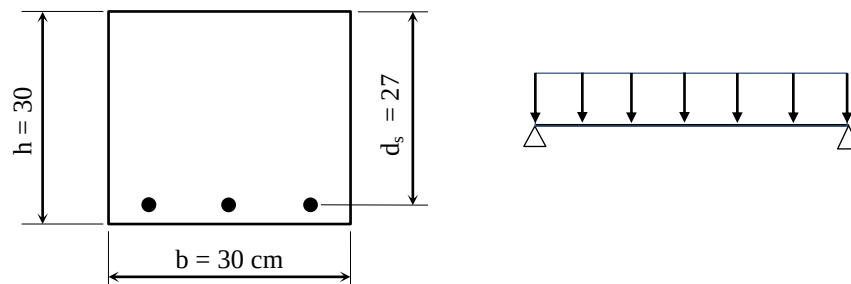


Figura 1.67 – Dimensões (cm) da seção transversal da laje.

Resolução

Carga permanente devida ao peso próprio e momento fletor (M_g) na faixa $b = 30$ cm:

$$g = \gamma_{concr} \cdot A_c = 25 \cdot 0,30 \cdot 0,30 = 2,25 \text{ kN/m}$$

$$M_g = \frac{g \ell^2}{8} = \frac{2,25 \cdot 10^2}{8} = 28,13 \text{ kN.m} = 2.813 \text{ kN.cm}$$

Tensões normais no topo e na base da seção (não fissurada):

$$\sigma_g = \pm \frac{6M_g}{bh^2} = \pm \frac{6 \cdot 2813}{30 \cdot 30^2} = \pm 0,625 \text{ kN/cm}^2 = \pm 6,25 \text{ MPa} \text{ (compressão negativa e tração positiva)}$$

²⁷ Este exemplo toma como base aquele apresentado por NAAMAN, A.E. *Prestressed Concrete Analysis and Design: Fundamentals*. 2nd Edition, Techno Press 3000, Ann Arbor, Michigan, ISBN 0-9674939-1-9, 2004, 1.072 pages.

Carga variável e momento fletor (M_q) na faixa $b = 30$ cm: $q = 7,5 \cdot 0,30 = 2,25$ kN/m

$$M_q = \frac{q \ell^2}{8} = \frac{2,25 \cdot 10^2}{8} = 28,13 \text{ kN.m} = 2.813 \text{ kN.cm}$$

$$M_q = M_g = 2.813 \text{ kN.cm} \rightarrow \sigma_q = \sigma_g = \pm 6,25 \text{ MPa}$$

São apresentados a seguir alguns casos possíveis para o dimensionamento da laje.²⁸

1) Laje não armada (Concreto Simples)

As tensões normais nas fibras extremas (topo e base) da laje estão mostradas na Figura 1.68, devidas ao peso próprio e à carga variável. A tensão final máxima de compressão na borda superior ($-12,5$ MPa) é menor que a tensão máxima de compressão permitida ($f_{c,m\acute{a}x} = -25$ MPa),²⁹ porém, a tensão de tração na borda inferior ($+12,5$ MPa) é maior que a resistência máxima à tração na flexão do concreto (módulo de ruptura), o que faz a laje fissurar e romper. A resistência à tração na flexão do concreto pode ser avaliada pela equação αf_{ct} , com:³⁰

$$\alpha f_{ct} = 1,5 \cdot 0,7 \cdot 0,3 \sqrt[3]{50^2} = 4,28 \text{ MPa} < 12,5 \text{ MPa}, \text{ o que mostra que a laje rompe por tração.}$$

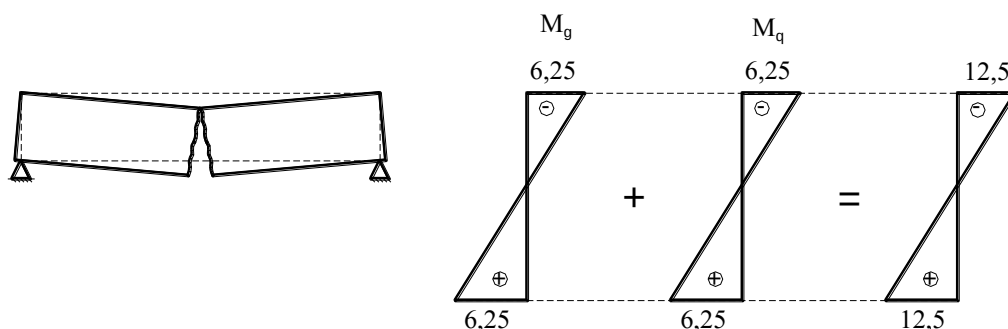


Figura 1.68 – Tensões normais (MPa) nas bordas da laje sem armadura (Concreto Simples), devidas ao peso próprio e carga variável.

2) Laje em Concreto Armado

Considerando a laje em Concreto Armado (Figura 1.69), com $\gamma_f = \gamma_c = 1,4$ e $\gamma_s = 1,15$, a armadura longitudinal de flexão resulta:

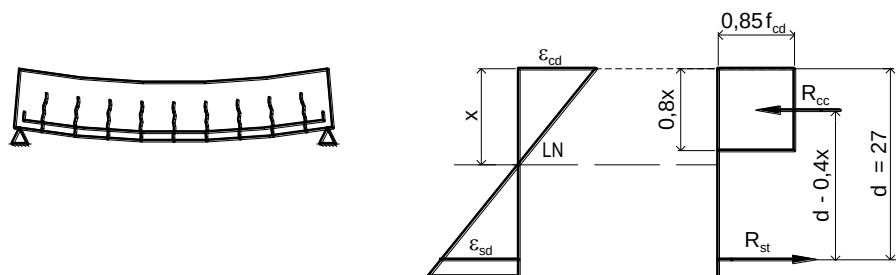


Figura 1.69 – Laje em Concreto Armado no Estado-Limite Último (ELU).

$$M_d = \gamma_f (M_g + M_q) = 1,4 (2.813 + 2.813) = 7.876 \text{ kN.cm}$$

²⁸ Ver também o exemplo numérico apresentado no e-book de Hanai, p.11 a 17.

HANAI, J.B. *Fundamentos do concreto protendido*. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos – USP, Departamento de Engenharia de Estruturas, E-Book, 2005. Disponível em (12/04/21):

https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/2255776/mod_resource/content/1/Fundamentos%20do%20Concreto%20Protendido%20-%20J%20B%20Hanai.pdf

²⁹ A comparação deve ser feita com valores absolutos.

³⁰ Esta equação será apresentada posteriormente.

$$M_d = 0,68b_w \times f_{cd} (d - 0,4x) \quad \rightarrow \quad 7.876 = 0,68 \cdot 30 \cdot x \cdot (5,0/1,4) (27 - 0,4x)$$

$$x = 4,3 \text{ cm} \quad \rightarrow \quad \text{dom. 2} \quad (x_{2\text{lim}} = 0,26d = 0,26 \cdot 27 = 7,0 \text{ cm})$$

$$A_s = \frac{M_d}{\sigma_{sd}(d - 0,4x)} = \frac{7.876}{43,5(27 - 0,4 \cdot 4,3)} = 7,16 \text{ cm}^2 \quad (\text{na largura } b \text{ de } 30 \text{ cm})$$

3) Laje em Concreto Protendido: protensão axial

Assumindo como hipótese que nenhuma tensão de tração é permitida. Para resultar tensão final nula na face inferior da laje (base) é necessário impor uma tensão de compressão, proporcionada pela força de protensão axial (P), de tal modo que (Figura 1.70):

$$-\sigma_{P(\text{base})} = \sigma_{g(\text{base})} + \sigma_{q(\text{base})} = 6,25 + 6,25 = 12,5 \text{ MPa}$$

$$\text{Força de protensão: } P = |\sigma_P| A_c = |-1,25| \cdot 30 \cdot 30 = 1.125 \text{ kN} = 112,5 \text{ tf}$$

$$\text{Área da armadura de protensão: } A_p = \frac{P}{f_{p,\text{ef}}} = \frac{1.125}{140} = 8,04 \text{ cm}^2$$

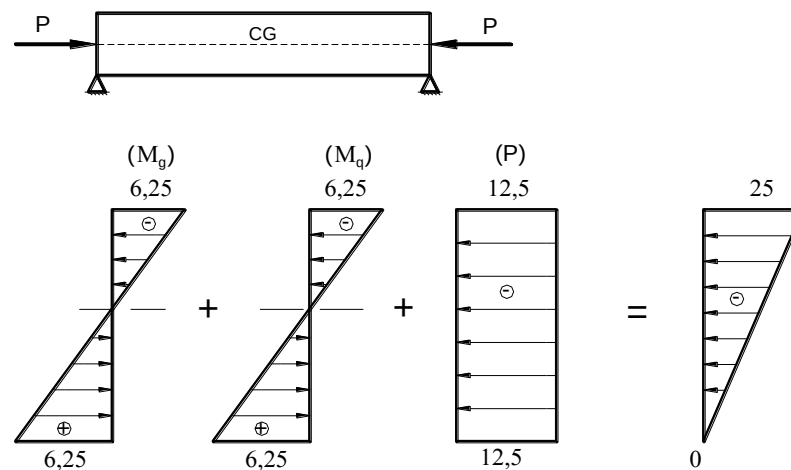


Figura 1.70 – Tensões normais (MPa) na laje com protensão axial.

A força de protensão (P) axial anulou a tensão de tração na base, e aumentou a tensão de compressão na borda superior para -25 MPa , igual à tensão máxima permitida ($f_{c,\text{máx}} = -25 \text{ MPa}$). Uma posição mais conveniente para a força de protensão pode diminuir esta tensão, e diminuir a armadura A_p .

4) Laje em Concreto Protendido: protensão excêntrica

Assumindo a força de protensão (P) no limite do núcleo central de inércia ($h/6$ para seção retangular³¹, Figura 1.71). Considerando como hipótese que a tensão na face inferior da laje deve ser zero, a força de protensão deverá causar uma tensão de compressão de $-12,5 \text{ MPa}$ na face inferior. A força de protensão, portanto, deve ser:³²

$$P = \frac{|\sigma_{P(\text{base})}| A_c}{2} = \frac{|-1,25| \cdot 30^2}{2} = 5625 \text{ kN} = 56,25 \text{ tf}$$

$$\text{Área da armadura de protensão: } A_p = \frac{P}{f_{p,\text{ef}}} = \frac{5625}{140} = 40,2 \text{ cm}^2$$

³¹ A força de protensão posicionada $h/6$ abaixo do CG da seção transversal leva à tensão normal zero na borda superior da laje.

³² Neste caso, a força de protensão é igual à área do triângulo representativo das tensões normais, considerada também a largura b da laje, ou seja, é igual ao volume da cunha representativa das tensões normais de protensão.

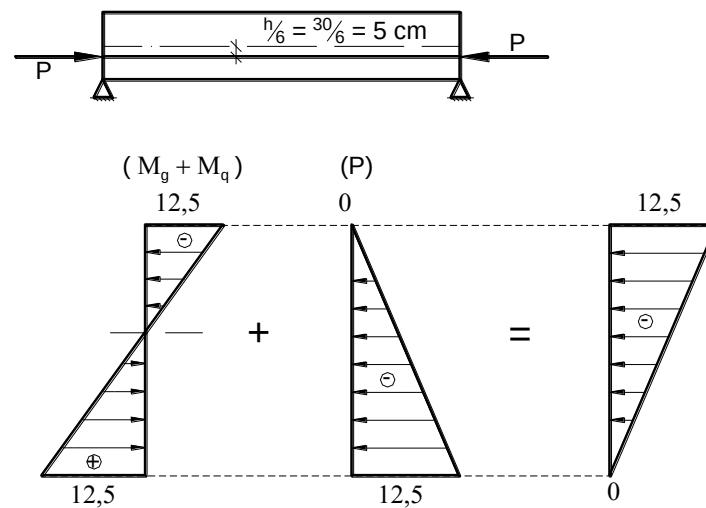


Figura 1.71 – Tensões normais (MPa) na laje com protensão excêntrica, com P posicionada no limite do núcleo central de inércia.

A armadura de protensão ($4,02 \text{ cm}^2$) é metade da armadura do caso anterior. O resultado mostra a grande importância da posição de aplicação da força de protensão. A força de protensão excêntrica também diminuiu a tensão final na borda superior para $-12,5 \text{ MPa}$, menor que $f_{c,\text{máx}}$ (-25 MPa) e metade daquela da protensão axial.

5) Laje em Concreto Protendido: máxima excentricidade da força de protensão

Para resultar tensão zero na base da laje (Figura 1.72), e assumindo $e_p = e_{p,\text{máx}} = 10 \text{ cm}$ e $\sigma_{p(\text{base})} = -12,5 \text{ MPa}$, a força de protensão excêntrica deve ser:

$$\sigma_{p(\text{base})} = -\frac{P}{A_c} - \frac{P \cdot e_p}{\left(\frac{bh^2}{6}\right)} = -\frac{P}{A_c} \left(1 + \frac{6e_p}{h}\right)$$

$$-1,25 = -\frac{P}{30^2} \left(1 + \frac{6 \cdot 10}{30}\right) \rightarrow P = 375 \text{ kN} = 37,5 \text{ tf}$$

$$\text{Área da armadura de protensão: } A_p = \frac{P}{f_{p,\text{ef}}} = \frac{375}{140} = 2,68 \text{ cm}^2$$

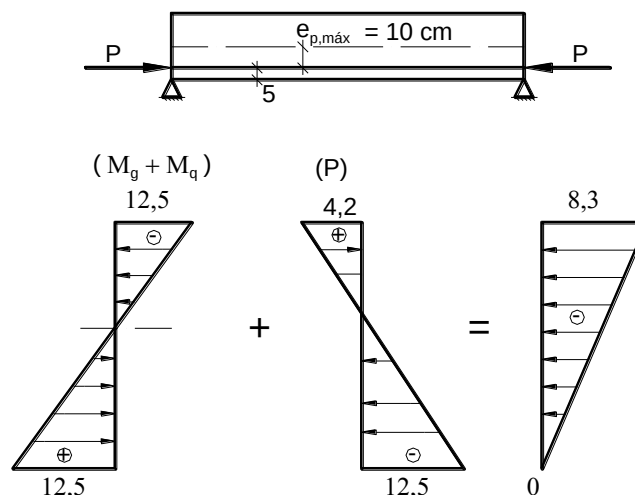


Figura 1.72 – Tensões normais (MPa) na laje com excentricidade máxima da força de protensão.

Tensão normal na borda superior devida à força de protensão:

$$\sigma_{P(\text{topo})} = -\frac{375}{30^2} \left(1 - \frac{6 \cdot 10}{30} \right) = 0,42 \text{ kN/cm}^2 = 4,2 \text{ MPa} \quad (\text{tensão de tração})$$

A força de protensão com a máxima excentricidade causa tensão de tração na borda superior, “combatida” pela tensão de compressão do carregamento total (peso próprio mais a carga variável neste caso). A maior excentricidade da força de protensão diminuiu a tensão final de compressão no topo da laje, de $-12,5$ para $-8,3$ MPa comparando-se com o caso anterior.

6) Laje em Concreto Protendido: tração igual à máxima permitida

Assumindo que uma tensão normal de tração de um certo valor, por exemplo 6,0 MPa (Figura 1.73), seja permitida na borda inferior da laje sob o carregamento de serviço, com $\sigma_{P(\text{base})} = -6,5$ MPa a força de protensão passa a ser:

$$-0,65 = -\frac{P}{30^2} \left(1 + \frac{6 \cdot 10}{30} \right) \rightarrow P = 195 \text{ kN} = 19,5 \text{ tf}$$

$$\text{Área de armadura de protensão: } A_p = \frac{P}{f_{p,\text{ef}}} = \frac{195}{140} = 1,39 \text{ cm}^2$$

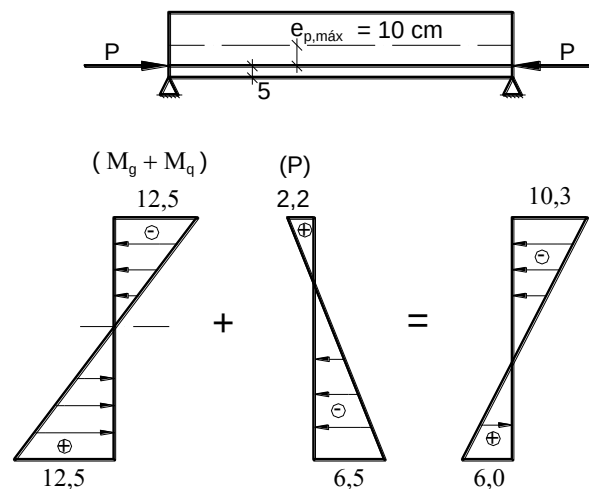


Figura 1.73 – Tensões normais (MPa) na laje com excentricidade máxima e tensão de tração resultante na base.

A Tabela 1.1 apresenta um resumo dos resultados numéricos obtidos para os casos analisados. No caso da laje protendida nota-se que a solução mais econômica é aquela que admite uma tensão de tração na borda inferior, com menor quantidade de armadura de protensão e força de protensão, o que implica em equipamentos mais simples para a aplicação da protensão, embora, por outro lado, resulte em uma flecha maior e a possibilidade de fissuração. Considerando também a solução em Concreto Armado, a escolha deve considerar todos os aspectos, técnicos, econômicos e construtivos.

Tabela 1.1 – Resumo dos resultados numéricos.

Soluções p/ Laje	$\sigma_{c,\text{máx}}$ (MPa)	$\sigma_{t,\text{máx}}$ (MPa)	P (kN)	A_s ou A_p (cm ²)
Não armada ^(*) (Concreto Simples)	- 12,5	12,5	-	-
Concreto Armado	-	-	-	7,16
C.P. – protensão axial	- 25,0	0	1.125	8,04
C.P. – P no limite do núcleo central	- 12,5	0	562,5	4,02
C.P. – P c/ excentricidade máxima	- 8,3	0	375	2,68
C.P. – P c/ tração na borda inferior	- 10,3	6,0	195	1,39

* a laje rompe.

2. MATERIAIS

O Concreto Protendido é composto por concreto simples, armadura ativa (aço de protensão) e armadura passiva (CA-25, 50 ou 60). Podem ser utilizados outros materiais também, como a bainha metálica (ou plástica) e calda de cimento, além dos dispositivos para a ancoragem da armadura ativa.³³

No Concreto Protendido a resistência, as deformações e o comportamento de uma peça em serviço dependem das características e propriedades dos materiais que o constituem, essencialmente do concreto e do aço de protensão. Devem ser conhecidos os fatores que influenciam as resistências mecânicas e o comportamento não linear desses materiais em estágios mais avançados do carregamento. No caso do concreto, é importante conhecer as propriedades que dependem do tempo, como as deformações instantâneas e particularmente a retração e a fluência, pois exercem uma grande influência sobre a perda de protensão no aço, bem como nas deformações e flechas da estrutura ao longo do tempo. Para o projeto das peças é necessário considerar procedimentos para a estimativa numérica do valor da retração e da fluência do concreto, e também para o cálculo da relaxação do aço de protensão, que origina mais uma perda de força de protensão.

2.1 Concreto

No Concreto Protendido é necessário aplicar concretos de resistências à compressão mais elevadas do que no Concreto Armado, resistências que variam entre 40 e 70 MPa. As resistências elevadas do concreto exigem controles de qualidade rigorosos, em todas as etapas envolvidas: seleção e mistura dos materiais, transporte, lançamento, adensamento e cura. Teores elevados de cimento, baixa relação água/cimento, aditivos redutores de água (plastificantes e superplastificantes) e adições minerais (sílica ativa principalmente) são comuns de serem utilizados.

2.1.1 Composição do Concreto

O concreto é um material composto, constituído por cimento, água, agregado miúdo (areia) e agregado graúdo (brita ou pedra), sendo comum a utilização da brita 1 (Figura 2.1), e pode conter adições e aditivos químicos, com a finalidade de melhorar ou modificar suas propriedades básicas. São adições a cinza volante³⁴, a pozolana³⁵, a sílica ativa³⁶, entre outras. O concreto também pode conter outros materiais, como pigmentos coloridos, fibras, agregados especiais, etc.

³³ Apenas as informações mais relevantes são apresentadas neste capítulo, com ênfase aos aços de protensão e às propriedades do concreto que são importantes no projeto das estruturas em Concreto Protendido. Para um estudo mais aprofundado das propriedades do concreto indicamos, entre outros, quatro livros:

1) MEHTA, P.K. ; MONTEIRO, P.J.M. *Concreto – Microestrutura, Propriedades e Materiais*. São Paulo, Instituto Brasileiro do Concreto (IBRACON), 2ª ed., 2014, 782p.

2) NEVILLE, A.M. *Propriedades do concreto*. São Paulo, Ed. Pini, 2ª ed., 1997, 828p.

3) BAUER, L.A.F. *Materiais de Construção*. Rio de Janeiro, Ed. Livros Técnicos e Científicos, 5ª ed., 2 vol., 2000.

4) ISAIA, G.C. (ed.). *Materiais de Construção Civil e Princípios de Ciência e Engenharia de Materiais*. São Paulo, Instituto Brasileiro do Concreto (IBRACON), 3ª ed., 2 vol., 2017.

³⁴ **Cinza volante**: material finamente particulado proveniente da queima de carvão pulverizado em usinas termoeletricas.^{[A] ver abaixo}

³⁵ **Pozolana natural**: “materiais de origem vulcânica, geralmente ácidos, ou de origem sedimentar.”^[A] Existem também pozolanas artificiais.

³⁶ **Sílica ativa**: subproduto resultante do processo de obtenção do ferro-silício e do silício-metálico, o primeiro destinado à produção de aços comuns e o segundo utilizado na fabricação de silicone, semicondutores e células solares.^[A]

A) DAL MOLIN, D.C.C. *Adições minerais*. In: ISAIA, G.C. (ed.). *Concreto: Ciência e Tecnologia*. São Paulo, Instituto Brasileiro do Concreto (IBRACON), 2011, v.1, p.261-309.



Figura 2.1 – Brita 1 de basalto.

Os cinco tipos básicos de cimento Portland existentes no Brasil, mostrados na Tabela 2.1, diferem-se entre si em função da composição. Dependendo da região do Brasil, um tipo pode ser mais comum no comércio, e outro nem mesmo existir. Dentre todos, o cimento CP V-ARI tem destaque, principalmente na fabricação de elementos pré-moldados.

Tabela 2.1 – Tipos de cimento Portland normalizados no Brasil.^[11]

Nome técnico	Identificação do tipo
Comum	CP I ^{a)}
Comum com adição	CP I-S ^{a)}
Composto com escória	CP II-E ^{a)}
Composto com pozolana	CP II-Z ^{a)}
Composto com fíler	CP II-F ^{a)}
Alto-forno	CP III ^{a)}
Pozolânico	CP IV ^{b)}
Alta resistência inicial	CP V-ARI
Branco estrutural	CPB ^{a)}

Notas: a) fabricado nas classes de resistência à compressão de 25, 32 ou 40 MPa; b) fabricado nas classes 25 ou 32 MPa.

Os cinco tipos podem ser resistentes a sulfatos, designados pela sigla RS. Oferecem resistência aos meios agressivos sulfatados, como aqueles de redes de esgoto, água do mar, do solo, etc. Outro aspecto também importante na definição do tipo de cimento refere-se ao calor gerado na hidratação do cimento, onde para grandes volumes de concreto são indicados os cimentos do tipo CP III (alto-forno) e CP IV (pozolânico).³⁷ Os cimentos de baixo calor de hidratação tem sufixo BC, como CP III-40BC.

Os agregados podem ser definidos como os materiais granulosos e inertes constituintes das argamassas e concretos.³⁸ São muito importantes no concreto porque constituem cerca de 70 a 80 % da sua composição, e também porque influenciam várias de suas propriedades. O uso cada vez mais intenso de concreto autoadensável tem colocado os agregados, especialmente os finos, em evidência.^[9] No comércio é comum encontrar as britas com a seguinte numeração e dimensão máxima: brita 0 (pedrisco) – 9,5 mm, brita 1 – 19 mm, brita 2 – 38 mm. No passado era comum a mistura de britas 1 e 2 para a confecção de concretos, hoje porém, a maioria dos concretos feitos para as obras correntes utiliza como agregado graúdo apenas a brita 1. Um aspecto muito importante a ser

³⁷ Para melhor conhecimento sobre o cimento, como fabricação, constituintes, propriedades, tipos, reações químicas, etc., recomendam-se as Referências [11,0,12,13] e as publicações seguintes:
BATTAGIN, A.F. *Cimento Portland*. In: ISAIA, G.C. (ed.). *Concreto: Ciência e Tecnologia*. São Paulo, Instituto Brasileiro do Concreto (IBRACON), 2011, v.1, p.184-232.
CINCOTTO, M.A. *Reações de Hidratação e Pozolânicas*. In: ISAIA, G.C. (ed.). *Concreto: Ciência e Tecnologia*. São Paulo, Instituto Brasileiro do Concreto (IBRACON), 2011, v.1, p.381-413.

³⁸ Ver: SBRIGHI NETO, C. *Agregados Naturais, Britados e Artificiais para Concreto*. In: ISAIA, G.C. (ed.). *Concreto: Ciência e Tecnologia*. São Paulo, Instituto Brasileiro do Concreto (IBRACON), 2011, v.1, p.233-260.

considerado na escolha dos agregados refere-se à questão da reação álcali-agregado³⁹, que afeta o comportamento e a durabilidade do concreto. Análises prévias devem ser feitas a fim de evitar esse problema, que se ocorrer pode trazer sérias consequências para a durabilidade da estrutura ou dos elementos.

2.1.2 Resistência à Compressão

No Concreto Protendido a resistência característica à compressão do concreto (f_{ck}) situa-se mais frequentemente na faixa entre 40 e 50 MPa, o que resulta estruturas com menor peso próprio e possibilidade de vencer vãos maiores. Nas peças pré-fabricadas vêm sendo utilizados concretos com resistências superiores a 50 MPa, que possibilitam a aplicação da protensão em menores idades. Concretos com resistências elevadas são desejáveis no CP porque:

- a) as solicitações prévias causadas pela força de protensão podem ser muito elevadas;
- b) permitem a redução das dimensões das peças, diminuindo o peso próprio, muito importante nos vãos grandes e em peças pré-moldadas;
- c) possuem maiores módulos de elasticidade (E_c), o que diminui as deformações imediatas, a fluência e a retração, ou seja, a flecha e as *perdas de protensão* são menores;
- d) geralmente são mais impermeáveis, o que é importante para diminuir a possibilidade de corrosão do aço de protensão, que, por permanecer sob tensões muito elevadas, é mais suscetível à corrosão.

No projeto de estruturas de concreto o engenheiro projetista estrutural especifica a resistência característica do concreto à compressão aos 28 dias (f_{ck}), e o toma como parâmetro básico no cálculo dos elementos estruturais (vigas, lajes, pilares, etc.). Para a estrutura atender os requisitos de segurança e durabilidade, o concreto da estrutura deve ter a resistência f_{ck} especificada pelo engenheiro estrutural.⁴⁰

No Brasil, a resistência à compressão dos concretos é avaliada por meio de corpos de prova cilíndricos com dimensões de 15 cm de diâmetro por 30 cm de altura, moldados conforme a NBR 5738.⁴¹ Um corpo de prova cilíndrico menor, com dimensões de 10 cm por 20 cm, também é muito utilizado, especialmente no caso de concretos de resistências à compressão elevadas (> 30 MPa).

Em função da resistência característica do concreto à compressão (f_{ck}), a NBR 8953⁴² classifica os concretos nos Grupos I e II. Os concretos convencionais são designados pela letra C, seguida do valor da resistência característica, expressa em MPa, como:

Grupo I: C20, C25, C30, C35, C40, C45, C50;

Grupo II: C55, C60, C70, C80, C90, C100.

A NBR 8953 também define os concretos C10 e C15, que não se aplicam para fins estruturais. A da NBR 6118 aplica-se aos concretos dos dois grupos de resistência, excluído o C100 (ver item 1.2).

2.1.3 Resistência à Tração

O conhecimento da resistência do concreto à tração é uma característica importante, particularmente na determinação da fissuração (momento fletor de primeira fissura e verificação da abertura da fissura), no dimensionamento de vigas à força cortante e na resistência de aderência entre

³⁹ **Reação álcali-agregado:** reação expansiva que ocorre no concreto endurecido, provocando fissuras e deformações, e que se origina do sódio e do potássio presentes no cimento, em reação com alguns tipos de minerais reativos, presentes no agregado. Ver SBRIGHI NETO, C. *Agregados Naturais, Britados e Artificiais para Concreto*. In: ISAIA, G.C. (ed.). *Concreto: Ciência e Tecnologia*. São Paulo, Instituto Brasileiro do Concreto (IBRACON), 2011, v.1, p.233-260.

⁴⁰ Sugestão de leitura: HELENE, P. ; ANDRADE, T. *Concreto de Cimento Portland*. In: ISAIA, G.C. (ed.). *Materiais de Construção Civil e Princípios de Ciência e Engenharia de Materiais*. São Paulo, Instituto Brasileiro do Concreto (IBRACON), 2007, v.2, p.905-944.

⁴¹ Países europeus adotam corpos de prova cúbicos, com arestas de dimensão de 15 ou 20 cm.

⁴² ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *Concreto para fins estruturais - Classificação pela massa específica, por grupos de resistência e consistência*. NBR 8953, ABNT, 2009, 4p.

o concreto e a barra de aço. A resistência do concreto à tração varia entre 8 e 15 % da resistência à compressão.^[12]

São três os tipos de ensaio comumente realizados para a determinação da resistência do concreto à tração: **tração direta** (f_{ct}), **tração indireta** (compressão diametral - $f_{ct,sp}$) e **tração na flexão** ($f_{ct,f}$), sendo o de tração direta menos comum de ser executado. A resistência à tração direta (f_{ct}) pode ser considerada igual a $0,9f_{ct,sp}$ ou $0,7f_{ct,f}$, ou, na falta de resultados de ensaios, a **resistência média à tração direta** ($f_{ct,m}$) pode ser avaliada em função da resistência característica do concreto à compressão (f_{ck}), por meio das expressões (NBR 6118, item 8.2.5):

a) para concretos com $f_{ck} \leq 50$ MPa

$$f_{ct,m} = 0,3 \sqrt[3]{f_{ck}^2} \quad \text{Eq. 2.1}$$

com:

$$f_{ctk,inf} = 0,7f_{ct,m} \quad \text{ou} \quad f_{ctk,sup} = 1,3f_{ct,m} \quad \text{Eq. 2.2}$$

Os valores $f_{ctk,inf}$ e $f_{ctk,sup}$ são os valores mínimo e máximo para a resistência à tração direta.

b) para concretos com $f_{ck} > 50$ MPa

$$f_{ct,m} = 2,12 \ln [1 + 0,1 (f_{ck} + 8)] \quad \text{Eq. 2.3}$$

com $f_{ct,m}$ e f_{ck} em MPa. Sendo $f_{ckj} \geq 7$ MPa, a Eq. 2.1, Eq. 2.2 e a Eq. 2.3 podem também ser usadas para idades diferentes de 28 dias.

No item 17.3.1 a NBR 6118 apresenta o **momento fletor de fissuração** para elementos lineares sujeitos a solicitações normais, para verificação nos Estados-Limites de Serviço. “*Nos estados-limites de serviço as estruturas trabalham parcialmente no estágio I e parcialmente no estágio II. A separação entre esses dois comportamentos é definida pelo momento de fissuração.*”, definido pela expressão aproximada:

$$M_r = \frac{\alpha f_{ct} I_c}{y_t} \quad \text{Eq. 2.4}$$

y_t = distância do centro de gravidade da seção à fibra mais tracionada;

I_c = momento de inércia da seção bruta de concreto;

f_{ct} = resistência à tração direta do concreto, conforme 8.2.5, com o quantil apropriado a cada verificação particular;

α = fator de forma geométrica que correlaciona aproximadamente a resistência à tração na flexão ($f_{ct,f}$) com a resistência à tração direta (f_{ct}), com os seguintes valores em função da forma da seção transversal da peça:

$$\alpha = \begin{cases} 1,2 & \text{para seções T ou duplo T} \\ 1,3 & \text{para seções I ou T invertido} \\ 1,5 & \text{para seções retangulares} \end{cases} \quad \text{Eq. 2.5}$$

“... Para determinação do momento de fissuração, deve ser usado o $f_{ctk,inf}$ no estado-limite de formação de fissuras e o $f_{ct,m}$ no estado-limite de deformação excessiva (ver 8.2.5).” Portanto, o valor da resistência do concreto a ser considerada no cálculo do momento fletor de fissuração é:

$$\alpha f_{ct} = \alpha f_{ctk,inf} = \alpha \cdot 0,7f_{ct,m}$$

$$\alpha f_{ct} = \alpha \cdot 0,7 \cdot 0,3 \sqrt[3]{f_{ck}^2} \quad \text{Eq. 2.6}$$

“No caso da utilização de armaduras ativas, deve ser considerado o efeito da protensão no cálculo do momento de fissuração.”

2.1.4 Massa Específica do Concreto

A **massa específica** dos concretos comuns varia em torno de 2.400 kg/m^3 . Por isso a NBR 6118 (item 8.2.2) determina que se a massa específica real não for conhecida, pode-se adotar o valor de 2.400 kg/m^3 para o Concreto Simples e 2.500 kg/m^3 para o Concreto Armado.⁴³

No caso da massa específica do concreto utilizado ser conhecida, pode-se acrescentar 100 a 150 kg/m^3 de aço para definir o valor da massa específica do Concreto Armado. É importante salientar que a NBR 6118 aplica-se aos concretos com massa específica entre 2.000 e 2.800 kg/m^3 , com materiais secos em estufa.

2.1.5 Módulo de Elasticidade do Concreto

O **módulo de elasticidade** é um parâmetro numérico relativo à medida da deformação que o concreto sofre sob a ação de tensões de compressão. Concretos com maiores resistências à compressão normalmente deformam-se menos que os concretos de baixa resistência, e por isso têm módulos de elasticidade maiores. O módulo de elasticidade depende muito das características e dos materiais componentes dos concretos, como o tipo de agregado, da pasta de cimento e a *zona de transição*⁴⁴ entre a argamassa e os agregados.

A importância da determinação dos módulos de elasticidade está na determinação das deformações nas estruturas de concreto, como nos cálculos de flechas em lajes e vigas, na análise da estabilidade global de edifícios, na determinação de perdas de protensão, etc. O módulo de elasticidade é avaliado por meio do diagrama tensão x deformação do concreto ($\sigma \times \epsilon$, Figura 2.2). Tem destaque o **módulo de elasticidade inicial** (tangente do ângulo α'), e o **módulo de elasticidade secante** (tangente do ângulo α'').

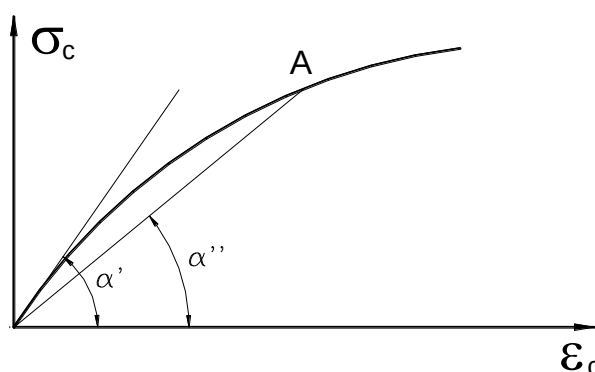


Figura 2.2 – Ângulos para determinação dos módulos de elasticidade do concreto.

Na falta de resultados de ensaios a NBR 6118 (item 8.2.8) permite estimar os valores dos módulos por expressões, sendo o **módulo de elasticidade inicial** aos 28 dias:

⁴³ A norma não cita o Concreto Protendido.

⁴⁴ Zona de transição corresponde à interface de ligação entre o agregado e a pasta de cimento, e se caracteriza como a região mais fraca da microestrutura do concreto, uma região frágil e porosa, onde se desenvolvem as primeiras microfissuras. Tem espessura de cerca de $40\text{-}50 \text{ }\mu\text{m}$. Consultar MEHTA, P.K. ; MONTEIRO, P.J.M. *Concreto – Microestrutura, Propriedades e Materiais*. São Paulo, Instituto Brasileiro do Concreto (IBRACON), 2ª ed., 2014, 782p. ou NEVILLE, A.M. *Propriedades do concreto*. São Paulo, Ed. Pini, 2ª ed., 1997, 828p.

a) para concretos com $f_{ck} \leq 50$ MPa

$$E_{ci} = \alpha_E 5600 \sqrt{f_{ck}} \quad \text{Eq. 2.7}$$

$\alpha_E = 1,2$ para basalto e diabásio;

$\alpha_E = 1,0$ para granito e gnaisse;

$\alpha_E = 0,9$ para calcário;

$\alpha_E = 0,7$ para arenito.

b) para $f_{ck} > 50$ MPa

$$E_{ci} = 21,5 \cdot 10^3 \alpha_E \left(\frac{f_{ck}}{10} + 1,25 \right)^{1/3} \quad \text{Eq. 2.8}$$

com E_{ci} e f_{ck} em MPa.

O **módulo de elasticidade secante** pode ser estimado pela expressão:

$$E_{cs} = \alpha_i E_{ci} \quad \text{Eq. 2.9}$$

$$\alpha_i = 0,8 + 0,2 \frac{f_{ck}}{80} \leq 1,0 \quad \text{Eq. 2.10}$$

“A deformação elástica do concreto depende da composição do traço do concreto, especialmente da natureza dos agregados. Na avaliação do comportamento de um elemento estrutural ou seção transversal, pode ser adotado módulo de elasticidade único, à tração e à compressão, igual ao módulo de deformação secante E_{cs} . No cálculo das **perdas de protensão**, pode ser utilizado em projeto o módulo de elasticidade inicial E_{ci} .” (NBR 6118, item 8.2.8).

“Para tensões de compressão **menores que $0,5f_c$** , pode-se admitir uma relação linear entre tensões e deformações, adotando-se para módulo de elasticidade o **valor secante** dado pela expressão constante em 8.2.8.” (NBR 6118, item 8.2.10.1).

O **módulo de elasticidade inicial em uma idade menor que 28 dias** pode ser avaliado pelas expressões:

a) para $f_{ck} \leq 50$ MPa

$$E_{ci}(t) = E_{ci} \left[\frac{f_{ckj}}{f_{ck}} \right]^{0,5} \quad \text{Eq. 2.11}$$

b) para $f_{ck} > 50$ MPa

$$E_{ci}(t) = E_{ci} \left[\frac{f_{ckj}}{f_{ck}} \right]^{0,3} \quad \text{Eq. 2.12}$$

$E_{ci}(t)$ = estimativa do módulo de elasticidade do concreto em uma idade entre 7 dias e 28 dias;

f_{ckj} = resistência característica do concreto à compressão na idade em que se pretende estimar o módulo de elasticidade, em MPa.

Conforme o Eurocode 2^[19], a variação no módulo de elasticidade pode ser determinada com:

$$E_c(t) = E_{c,28} \left[\frac{f_{cm}(t)}{f_{cm,28}} \right]^{0,3} \quad \text{Eq. 2.13}$$

$E_c(t)$ = módulo de elasticidade em t dias de idade do concreto;⁴⁵

$f_{cm}(t)$ = resistência do concreto à compressão na idade t ;

$f_{cm,28}$ e $E_{c,28}$ = valores aos 28 dias de idade.

2.1.6 Diagrama Tensão-Deformação do Concreto à Compressão

A NBR 6118 (item 8.2.10.1) especifica que para “*tensões de compressão menores que $0,5 f_c$, pode-se admitir uma relação linear entre tensões e deformações, adotando-se para módulo de elasticidade o valor secante*”, dado pela Eq. 2.9.

Para análises de seções transversais de peças de Concreto Armado no Estado-Limite Último, a NBR 6118 (item 8.2.10.1) indica o diagrama tensão-deformação à compressão com valores em função da resistência do concreto, como segue.

a) para concretos com $f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$

O diagrama *parábola-retângulo* é composto por uma parábola do 2º grau que passa pela origem e tem seu vértice no ponto de abscissa $\varepsilon_{c2} = 2 \text{ ‰}$ e ordenada $0,85\eta_c f_{cd}$ e de uma reta entre as deformações 2 ‰ e 3,5 ‰ (ε_{cu}), tangente à parábola e paralela ao eixo das abscissas (Figura 2.3). A equação da parábola do 2º grau é:

$$\sigma_c = 0,85\eta_c f_{cd} \left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}} \right)^2 \right] \quad \text{Eq. 2.14}$$

com f_{cd} sendo a resistência de cálculo do concreto à compressão (a definição de f_{cd} será vista adiante), e η_c com os seguintes valores:

$\eta_c = 1,0$, para $f_{ck} \leq 40 \text{ MPa}$;

$\eta_c = \sqrt[3]{\left(\frac{40}{f_{ck}} \right)}$, para $f_{ck} > 40 \text{ MPa}$.

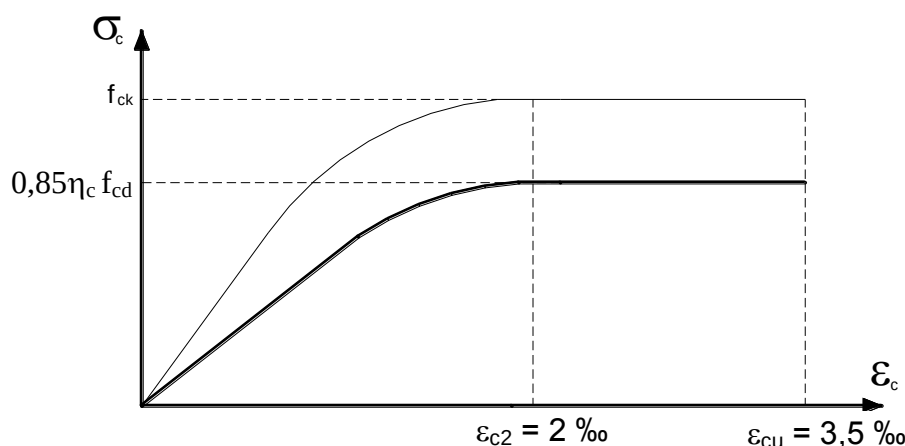


Figura 2.3 – Diagrama tensão-deformação à compressão idealizado para concretos com $f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$.

⁴⁵ A notação da equação foi adaptada. O Eurocode 2 define o módulo de elasticidade secante (E_{cm}), determinado entre $\sigma_c = 0$ e $\sigma_c = 0,4f_{cm}$, para ensaio aos 28 dias de idade, com f_{cm} a resistência média do concreto.

b) para concretos com $f_{ck} > 50$ MPa (até 90 MPa)

O diagrama *parábola-retângulo* é composto por uma parábola que passa pela origem e tem seu vértice correspondente à deformação ε_{c2} e ordenada $0,85\eta_c f_{cd}$, e de uma reta entre as deformações ε_{c2} e ε_{cu} (Figura 2.4).

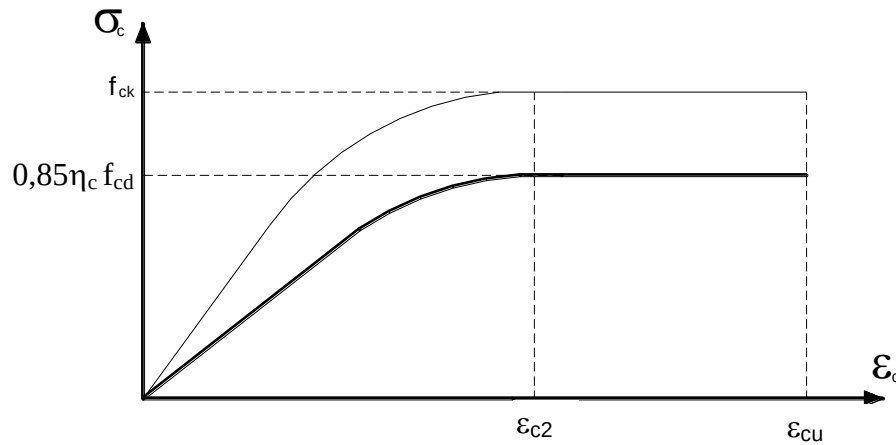


Figura 2.4 – Diagrama tensão–deformação à compressão idealizado para concretos com $f_{ck} > 50$ MPa.

A equação da parábola é:

$$\sigma_c = 0,85\eta_c f_{cd} \left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}} \right)^n \right] \quad \text{Eq. 2.15}$$

$$n = 1,4 + 23,4 \left[\frac{(90 - f_{ck})}{100} \right]^4 \quad \text{Eq. 2.16}$$

$$\varepsilon_{c2} = 2,0 \text{ ‰} + 0,085 \text{ ‰} (f_{ck} - 50)^{0,53} \quad \text{Eq. 2.17}$$

$$\varepsilon_{cu} = 2,6 \text{ ‰} + 35 \text{ ‰} \left[\frac{(90 - f_{ck})}{100} \right]^4 \quad \text{Eq. 2.18}$$

No item 8.2.10.1 a NBR 6118 também apresenta um diagrama alternativo no caso de se fazer a análise estrutural como não linear, para compressão simples de curta duração. No caso de cargas de longa duração os efeitos da fluência devem ser convenientemente considerados.

A NBR 6118 (item 17.2.2) admite a substituição dos diagramas *parábola-retângulo* mostrados na Figura 2.3 e Figura 2.4, por um mais simples, conhecido como *retangular simplificado* (Figura 2.5), com profundidade $y = \lambda x$, onde:

$$\begin{aligned} \lambda &= 0,8 && \rightarrow \text{para } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa (concretos do Grupo I);} \\ \lambda &= 0,8 - (f_{ck} - 50)/400 && \rightarrow \text{para } f_{ck} > 50 \text{ MPa (concretos do Grupo II).} \end{aligned} \quad \text{Eq. 2.19}$$

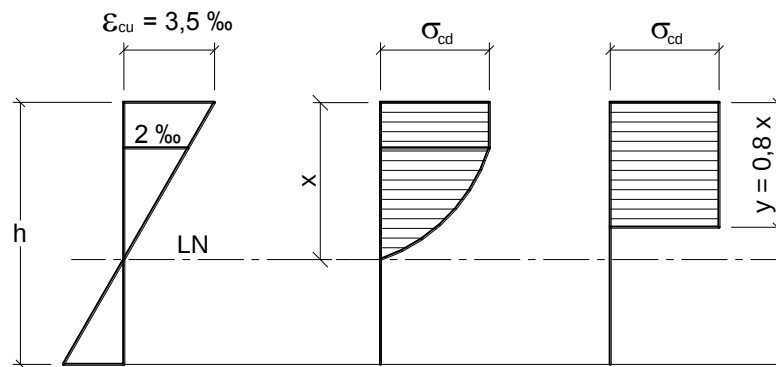


Figura 2.5 – Diagramas $\sigma \times \varepsilon$ parábola-retângulo e retangular simplificado para distribuição de tensões de compressão no concreto, para concretos do Grupo I de resistência ($f_{ck} \leq 50$ MPa).

A tensão de compressão no concreto (σ_{cd}) pode ser tomada como:

a) no caso da largura da seção, medida paralelamente à linha neutra, não diminuir da linha neutra em direção à borda comprimida (Figura 2.6), a tensão é:

$$\sigma_{cd} = 0,85 \eta_c f_{cd} = \frac{0,85 \eta_c f_{ck}}{\gamma_c} \rightarrow \text{para concretos do Grupo I } (f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}); \quad \text{Eq. 2.20}$$

$$\sigma_{cd} = 0,85 [1 - (f_{ck} - 50)/200] \eta_c f_{cd} \rightarrow \text{para concretos do Grupo II } (f_{ck} > 50 \text{ MPa}).$$

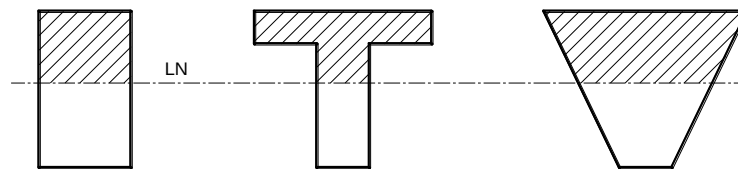


Figura 2.6 – Seções onde a largura não diminui da linha neutra em direção à borda comprimida.

b) em caso contrário, isto é, quando a seção diminui (Figura 2.7), a tensão é:

$$\sigma_{cd} = 0,9 \cdot 0,85 \eta_c f_{cd} = \frac{0,9 \cdot 0,85 \eta_c f_{ck}}{\gamma_c} \rightarrow \text{para concretos do Grupo I } (f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}); \quad \text{Eq. 2.21}$$

$$\sigma_{cd} = 0,9 \cdot 0,85 [1 - (f_{ck} - 50)/200] \eta_c f_{cd} \rightarrow \text{para concretos do Grupo II } (f_{ck} > 50 \text{ MPa}).$$

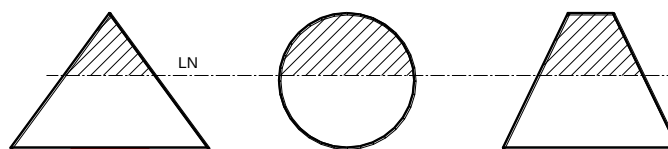


Figura 2.7 – Seções onde a largura diminui da linha neutra em direção à borda comprimida.

2.1.7 Parâmetros de Projeto

No projeto das estruturas de Concreto Protendido, os seguintes parâmetros são importantes, e devem ser especificadas pelo projetista:

- a) resistências características à compressão (f_{ckj}) e à tração (f_{ctkj}), na idade j da aplicação da protensão e na idade de 28 dias;
- b) módulo de elasticidade do concreto na idade t_o ($E_{ci}(t_o)$), quando se aplica uma ação permanente importante, como a força de protensão, bem como também aos 28 dias de idade;
- c) relação a/c do concreto;
- d) cobrimentos das armaduras (c).

2.1.8 Deformações do Concreto

As deformações que ocorrem no concreto, principalmente as causadas pela retração e pela fluência, são particularmente importantes no estudo e no projeto das peças em Concreto Protendido. A **retração** configura-se em uma diminuição do volume de concreto, sendo causada principalmente pela perda de água por evaporação durante o endurecimento do concreto. A **fluência**⁴⁶ é a deformação no concreto ao longo do tempo causada por tensões de compressão mantidas constantes ao longo do tempo. A retração e a fluência aumentam a deformação axial e a curvatura de seções transversais de peças em Concreto Armado e Protendido, redistribuição de tensões locais entre o concreto e a armadura, e aumentos significativos nos deslocamentos verticais (flechas) e nas perdas de força de protensão.^{[1]47}

A Figura 2.8 mostra as deformações que ocorrem no concreto de um corpo de prova submetido a tensões de compressão e temperatura mantidas constantes ao longo do tempo. A deformação por **retração** (ε_{cs}) inicia-se após o lançamento do concreto ou após a cura úmida, no tempo t_d da Figura 2.8, e continua a aumentar ao longo do tempo em uma taxa decrescente. Quando a tensão de compressão σ_{co} é aplicada no instante t_o ocorre um salto no diagrama, correspondente à chamada **deformação imediata** (instantânea - ε_{ci}), sendo seguida pelo aumento gradual da deformação por **fluência** (ε_{cc}), e assim como a retração, com uma taxa decrescente ao longo do tempo. Portanto, se a tensão é mantida constante, o concreto apresenta deformações dependentes do tempo adicionais àquelas por retração e imediata, que podem superar em várias vezes a imediata. Ocorre também a deformação causada pela temperatura (ε_{CT}), não tratada neste item. As deformações podem ser consideradas independentes e determinadas separadamente, o que não é correto, mas é aceitável, e combinadas para a obtenção da deformação total.^[1] Com a temperatura sendo considerada constante, a **deformação total** do concreto ($\varepsilon_c(t)$), não fissurado e carregado axialmente, em um tempo qualquer t é:

$$\varepsilon_c(t) = \varepsilon_{cs}(t) + \varepsilon_{ci}(t) + \varepsilon_{cc}(t) \quad \text{Eq. 2.22}$$

A previsão do comportamento de peças de concreto quanto às deformações dependentes do tempo depende da história de como as tensões são aplicadas, bem como das propriedades dos materiais, e por meio de métodos mais ou menos precisos as deformações podem ser determinadas. Os apoios e as armaduras existentes na peça restringem a fluência e a retração, e assim modificam a história das tensões aplicadas.

Se as tensões iniciais são removidas após um período curto de tempo, a **deformação elástica imediata** é recuperada rapidamente, como mostrado na Figura 2.9. No caso da deformação por **fluência**, se o carregamento é removido após um período de tempo, uma parte é gradualmente recuperada, e outra parte não é recuperável (Figura 2.9).^[2] A **fluência** praticamente cessa após alguns anos, sendo assim expressa pela **fluência no infinito** ($\varepsilon_{cc,\infty}$), tomada ao longo do tempo de 30 anos, ou no tempo da vida útil da peça.

⁴⁶ Informações adicionais sobre **fluência** e **retração** estão apresentadas nos itens 2.1.8.2 e 2.1.8.3, respectivamente, e no item 5.5.3 estão apresentados processos para cálculo das perdas de protensão por retração e fluência.

⁴⁷ O texto deste item está apresentado conforme a Ref. [1].

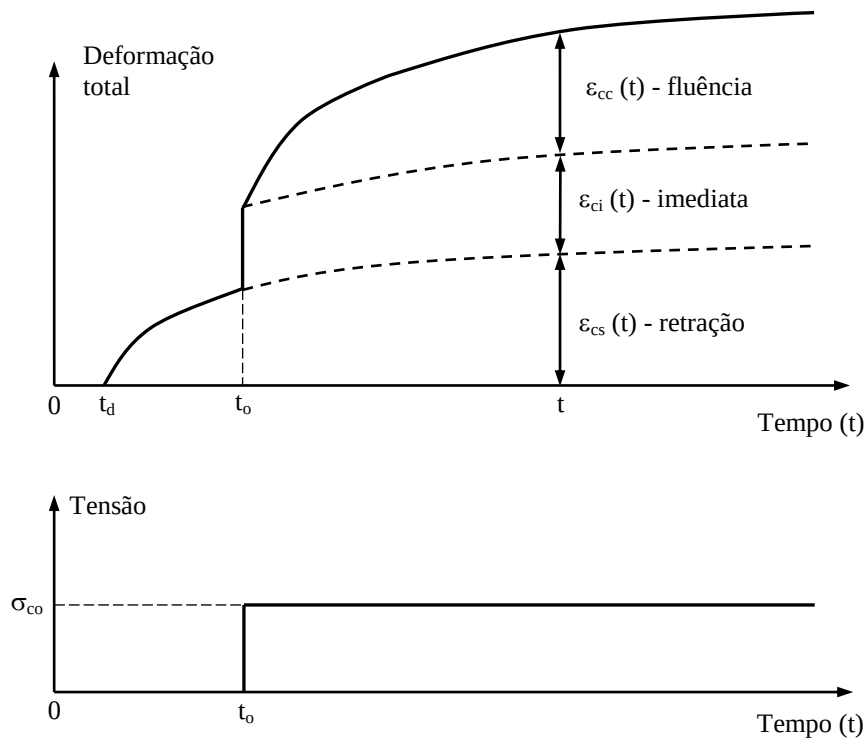


Figura 2.8 – Deformações no concreto em função do tempo quando submetido a tensões constantes ao longo do tempo.^[1]

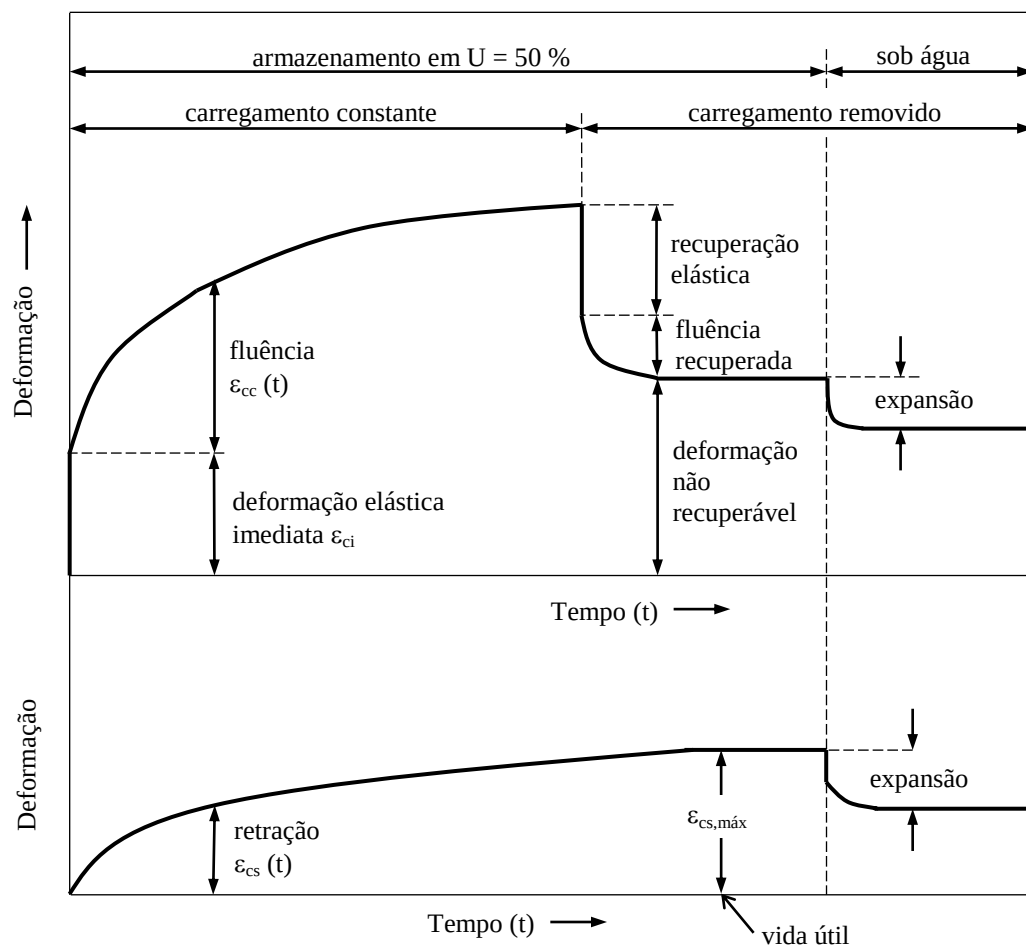


Figura 2.9 – Variação esquemática da retração e fluência do concreto ao longo do tempo.^[2]

2.1.8.1 Deformação Imediata

A **deformação imediata** do concreto depende da intensidade da tensão de compressão aplicada, da taxa de aplicação, da idade do concreto e da relação *tensão x deformação imediata* do concreto. Nas estruturas de concreto, as tensões de compressão causadas pelos carregamentos atuantes nas peças em serviço, geralmente não excedem a metade da resistência do concreto à compressão ($0,5f_c$), de forma que o comportamento elástico linear para o concreto pode ser assumido durante a ocorrência da **deformação imediata**, dada por:

$$\varepsilon_{ci}(t) = \frac{\sigma_c(t)}{E_c} \quad \text{Eq. 2.23}$$

No caso de tensões σ_c de tração, embora a deformação imediata ocorrida antes de iniciada a fissura apresente comportamentos elásticos e inelásticos, em projetos comuns o comportamento do concreto pode ser considerado como elástico e frágil, e para tensões de tração menores do que a resistência do concreto, a relação entre a deformação imediata e a tensão de tração pode ser assumida linear. É usual assumir o módulo de elasticidade do concreto à tração igual ao módulo para compressão, e a pré-fissuração à deformação imediata à tração pode ser também determinada com a Eq. 2.23.

2.1.8.2 Fluência

Como comentado no item anterior, a retração é uma deformação natural do concreto, que ocorre mesmo na ausência de carregamento externo. A **fluência**, por outro lado, é uma deformação que ocorre somente com a existência de carregamento externo, aquele que causa tensão de compressão sobre o concreto. A fluência depende de vários fatores além do tempo: umidade relativa do ar, traço, tipos dos agregados, dimensões e forma da peça, idade do concreto na aplicação da carga, etc., e da mesma forma que a retração, a fluência pode ser reduzida com armadura complementar.

Define-se **fluência** como o *aumento da deformação de encurtamento no concreto ao longo do tempo quando submetido à tensão de compressão permanente e constante*. É muito importante no estudo de flechas e no projeto de peças protendidas, pois a protensão aplica tensões de compressão no concreto, que causam fluência e assim uma redução do alongamento da armadura de protensão, e, conseqüentemente há uma perda de força de protensão.

A Figura 2.10 mostra que após ocorrida a deformação por fluência, uma parcela da deformação é recuperável, mas uma parcela é irreversível, ou irreversível.

Na medida da deformação por fluência no concreto é usual a aplicação do **coeficiente de fluência** $\varphi(t; t_0)$,⁴⁸ e em um corpo de prova de concreto sob tensão de compressão (σ_{co}) constante no tempo e inicialmente aplicada no tempo t_0 , no tempo t o **coeficiente de fluência** é:

$$\varphi(t; t_0) = \frac{\varepsilon_{cc}(t; t_0)}{\varepsilon_{ci}(t_0)} \quad \text{Eq. 2.24}$$

e considerando a Eq. 2.23, a **deformação por fluência** no tempo t , causada pela tensão σ_{co} aplicada inicialmente em t_0 , é:

$$\varepsilon_{cc}(t; t_0) = \varphi(t; t_0) \varepsilon_{ci}(t_0) = \varphi(t; t_0) \frac{\sigma_{co}}{E_c(t_0)} \quad \text{Eq. 2.25}$$

$E_c(t_0)$ = módulo de elasticidade no tempo t_0 .

⁴⁸ A determinação do **coeficiente de fluência** conforme a NBR 6118 está apresentada no item 5.5.3.

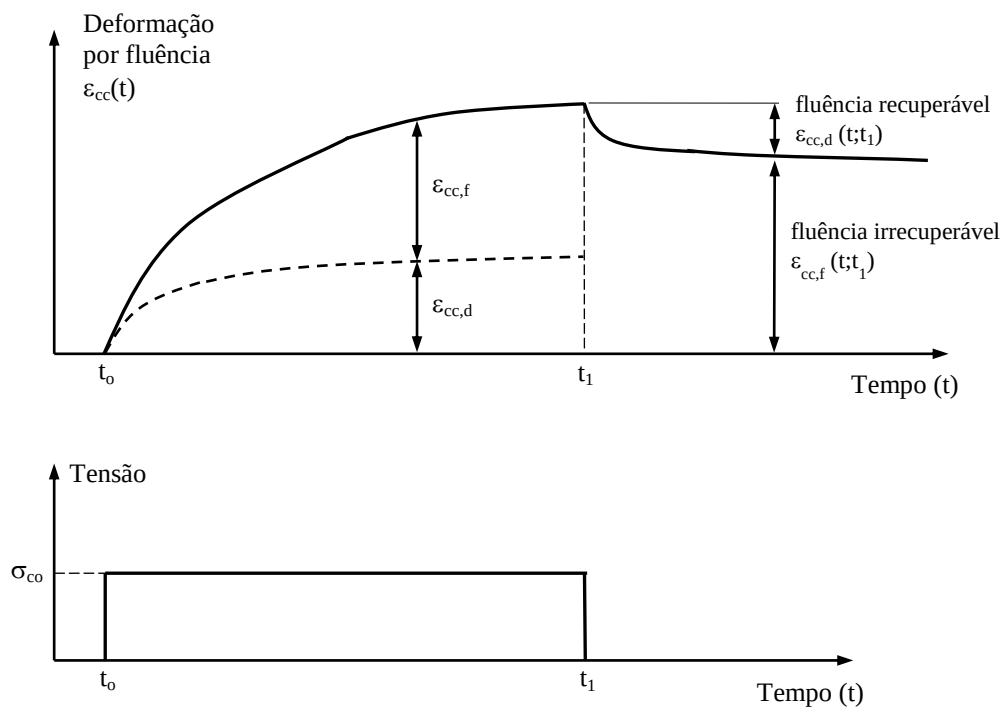


Figura 2.10 – Fluência recuperável e não recuperável.^[1]

O **coeficiente de fluência** φ aumenta com o tempo de maneira decrescente e o valor final é $\varphi(t_\infty; t_0) = \varepsilon_{cc}(t_\infty; t_0) / \varepsilon_{ci}(t_0)$, e o tempo $t = \infty$ é muitas vezes tomado como 30 anos, com a faixa de valores variando usualmente entre 1,5 e 4,0.⁴⁹ A **deformação por fluência** (ε_{cc}) depende da idade do concreto no instante do primeiro carregamento, como mostrado na Figura 2.11, e do mesmo modo também o **coeficiente de fluência** φ , ou seja, a deformação e o coeficiente diminuem com o aumento da idade de aplicação do primeiro carregamento.^[1]

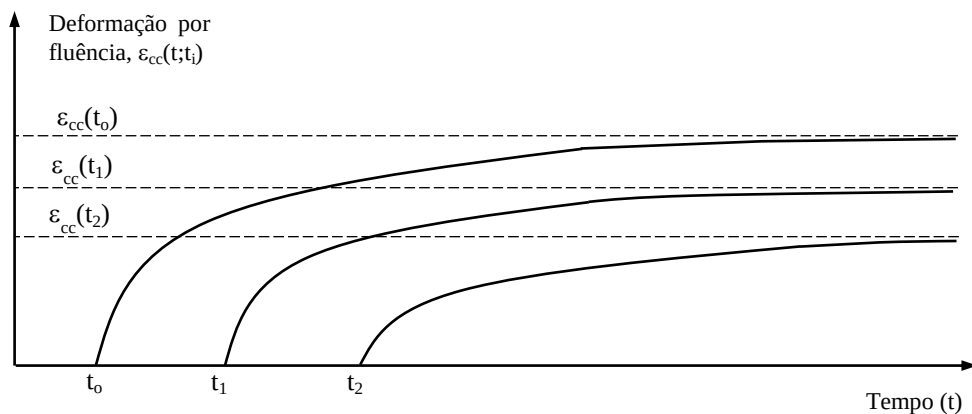


Figura 2.11 – Efeito da idade do primeiro carregamento sobre o coeficiente de fluência (φ).^[1]

Considerando a Eq. 2.23 e a Eq. 2.25, a soma da **deformação imediata** (ε_{ci}) com a **deformação por fluência** (ε_{cc}) causada pela tensão σ_{co} mantida constante e aplicada inicialmente na idade t_0 , é dada por:

$$\varepsilon_{ci}(t) + \varepsilon_{cc}(t; t_0) = \frac{\sigma_{co}}{E_c(t_0)} [1 + \varphi(t; t_0)] = \frac{\sigma_{co}}{E_{c,ef}(t; t_0)} \quad \text{Eq. 2.26}$$

onde $E_{c,ef}(t; t_0)$ é o **módulo de elasticidade efetivo do concreto**, dado por:

⁴⁹ O valor preconizado pela NBR 6118 para o **coeficiente de fluência** (φ) está apresentado no item 5.5.3.

$$E_{c,ef}(t; t_0) = \frac{E_c(t_0)}{1 + \varphi(t; t_0)} \quad \text{Eq. 2.27}$$

Se a tensão σ_{co} for aplicada gradualmente no concreto durante um período de tempo, a deformação por fluência é diminuída, porque o concreto envelhece durante esse tempo, e isso requer um ajuste no **coeficiente de fluência** (φ), de modo que para um incremento de tensão $\Delta\sigma_c(t)$ aplicado ao concreto gradualmente, iniciado no tempo t_0 , a deformação dependente da carga pode ser determinada modificando a Eq. 2.26:

$$\varepsilon_{ci}(t) + \varepsilon_{cc}(t; t_0) = \frac{\Delta\sigma_c(t)}{E_c(t_0)} [1 + \chi(t; t_0) \varphi(t; t_0)] = \frac{\Delta\sigma_c(t)}{\bar{E}_{c,ef}(t; t_0)} \quad \text{Eq. 2.28}$$

onde o **módulo de elasticidade efetivo do concreto ajustado com a idade** é dado por:

$$\bar{E}_{c,ef}(t; t_0) = \frac{E_c(t_0)}{1 + \chi(t; t_0) \varphi(t; t_0)} \quad \text{Eq. 2.29}$$

com $\chi(t; t_0)$ = **coeficiente de envelhecimento**, o qual depende da taxa de aplicação da tensão gradualmente aplicada e da idade da primeira aplicação, sendo um valor que varia de 0,4 a 1,0. Para peças submetidas a cargas mantidas constantemente ao longo do tempo, onde a mudança de tensão no concreto é causada pela restrição que armaduras aderentes ao concreto impõem à retração e à fluência, o **coeficiente de envelhecimento** pode ser aproximado para $\chi(t_k; t_0) = 0,65$, quando o tempo t_k excede 100 dias, de modo que vale também para o tempo $t = \infty$. E em situações onde a deformação é mantida constante e a tensão no concreto é relaxada, o **coeficiente de envelhecimento final** pode ser tomado como $\chi(t_\infty; t_0) = 0,80$.^[1]

2.1.8.3 Retração

Sob ação dos carregamentos e de forças da natureza, o concreto apresenta deformações que aumentam ou diminuem o seu volume, que geralmente originam fissuras. Dependendo da abertura e do ambiente a que a peça está exposta, as fissuras podem ser prejudiciais à durabilidade e à estética. As principais causas de deformações no concreto são a retração, a fluência e por variação de temperatura, adicionais àquelas causadas pelos esforços solicitantes.

Define-se **retração** como a diminuição de volume do concreto ao longo do tempo. É a deformação ε_{cs} na Figura 2.9.⁵⁰ As causas para a retração são de origens diferentes, sendo a principal a chamada *retração hidráulica* (ou *retração por secagem*), cuja origem é o fato de que os concretos, para apresentarem a trabalhabilidade requerida, têm uma quantidade de água maior que a necessária ($a/c \approx 0,26$, ou seja, o concreto necessita de aproximadamente 26 litros de água para a hidratação de 100 kg de cimento). A água não utilizada na hidratação do cimento evapora ao longo do tempo, e causa diminuição de volume do concreto.⁵¹ É importante salientar que a retração ocorre mesmo na ausência de cargas sobre o concreto, ou seja, se caracteriza como um fenômeno natural do material.

Quando uma peça encurta por efeito da retração, a armadura de protensão também encurta, e ocorre então uma perda de força de protensão, de grande importância no projeto das peças protendidas.

A retração é afetada por vários fatores: relação a/c , umidade e temperatura do ambiente, traço, tipo dos agregados e do cimento, dimensões e forma da peça, etc. Os efeitos da retração podem ser diminuídos executando uma **cura** cuidadosa, durante pelo menos os primeiros sete dias após a

⁵⁰ A determinação da deformação por **retração** está apresentada no item 5.5.3, conforme a NBR 6118.

⁵¹ Há também a *retração química*, decorrente do fato das reações de hidratação do cimento ocorrerem com diminuição de volume, e a *retração por carbonatação*, onde componentes secundários do cimento reagem com o gás carbônico presente na atmosfera, originando também uma diminuição de volume do concreto. São causas menos intensas e restritas basicamente ao período de cura do concreto. Ver DINIZ, J.Z.F. ; FERNANDES, J.F. ; KUPERMAN, S.C. *Retração e Fluência*. In: ISAIA, G.C. (ed.). *Concreto: Ciência e Tecnologia*. São Paulo, Instituto Brasileiro do Concreto (IBRACON), 2011, v.1, p.672-703.

concretagem da peça.⁵² Uma armadura complementar, chamada **armadura de pele**, também contribui para diminuir os efeitos da retração.

Nas estruturas comuns e de pequenas espessuras, o fenômeno da retração é considerado praticamente concluído no período de dois a quatro anos. Para a cura úmida, cerca de 50 % da retração total ocorre no primeiro mês, e aproximadamente 90 % no primeiro ano.^[2]

A deformação por retração máxima (ou última) assume valores médios de 8×10^{-4} para **cura úmida** e $7,3 \times 10^{-4}$ para **cura térmica a vapor**, com umidade relativa de 40 % (U). Naaman^[2] sugere nesses tipos de cura respectivamente os valores de 6×10^{-4} e 4×10^{-4} para os concretos comumente aplicados nas peças protendidas.

2.1.9 Fadiga no Concreto

Alguns elementos de concreto, como por exemplo os dormentes ferroviários, e algumas estruturas, particularmente as pontes, são submetidos a intenso carregamento dinâmico durante a vida útil, que causa fadiga nos materiais.⁵³

O carregamento dinâmico que leva à **fadiga dos materiais** é definido como uma sequência de repetições de carga que podem causar uma ruptura por fadiga em cerca de 100 ou mais ciclos de carga (ACI C.215^[15]). Neville^[13] define como: “quando um material se rompe sob um número repetido de solicitações, todas elas menores do que a resistência, se diz que houve ruptura por fadiga”.

O Estado-Limite Último de fadiga pode ser associado com a ruptura da armadura ou do concreto. O concreto simples, quando submetido a carregamento repetido, pode apresentar fissuração excessiva e eventualmente ruir após um suficiente número de ciclos de força, mesmo se a força máxima for menor que a força correspondente à resistência estática do elemento.

A resistência do concreto à fadiga é definida como uma fração da resistência estática que ele pode suportar repetidamente para um dado número de ciclos (usualmente 2×10^6 ciclos). A resistência à fadiga é influenciada pela diferença entre o carregamento máximo e mínimo, frequência do carregamento repetido, história do carregamento, propriedades do material e condições ambientais.

A ruptura do concreto por fadiga é caracterizada por deformações maiores e maior fissuração, se comparada à ruptura do concreto sob carregamento estático. Porém, a ruptura do concreto não é tão crítica quanto a ruptura por fadiga dos metais. Foi observado que o concreto sob compressão direta pode suportar flutuações de tensões entre 0 e 50 % de sua resistência estática, por dez milhões de ciclos, e para outras tensões, a resistência à fadiga é estimada em cerca de 55 % da sua resistência estática.^[2] Também foi observado que a ruptura do concreto por fadiga à compressão é rara na prática. Para projeto, a variação de tensão limite sugerida pelo ACI C.215^[15] pode ser:

$$\Delta f_{cr} = 0,4f'_c - \frac{f_{c,min}}{2} \quad \text{Eq. 2.30}$$

onde f'_c é resistência do concreto à compressão e $f_{c,min}$ é a tensão mínima.^[2]

O projeto para fadiga pode ser facilitado pelo diagrama chamado Goodman modificado (Figura 2.12). Para uma tensão mínima de 18 %, por exemplo, a máxima tensão que o concreto pode suportar por 1×10^6 ciclos sem ruptura, é tomada no diagrama como 58 % da resistência estática. Quando a mínima tensão é elevada, diminui a variação de tensão que o concreto pode suportar.

⁵² Cura do concreto são os cuidados que devem ser tomados no período de endurecimento do concreto, visando impedir que a água evapore e o cimento não seja corretamente hidratado.

⁵³ Alguns estudos da fadiga são importantes, como: comportamento dos materiais, determinação das tensões (principalmente em fios de protensão na seção fissurada), e vigas protendidas.

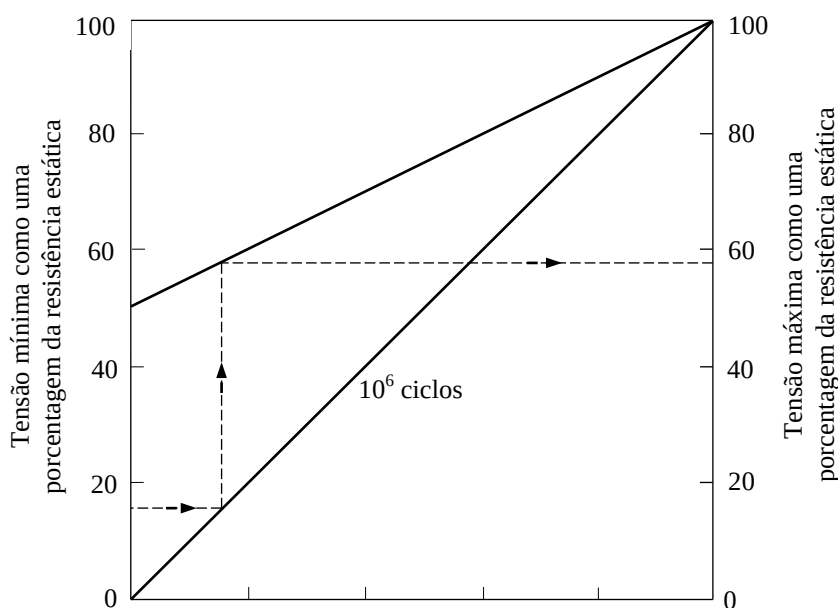


Figura 2.12 – Diagrama de Goodman modificado para o concreto (Fonte: ACI C.215^[15]).

2.1.10 Efeitos da Temperatura e Cura Térmica

Todo material tem um coeficiente chamado **coeficiente de dilatação térmica**, com o qual se pode calcular variações de volume e de comprimento de peças fabricadas com aquele material. O coeficiente define a deformação correspondente a uma variação de temperatura de 1° C. No caso do concreto, para efeito de análise estrutural, o **coeficiente de dilatação térmica** (α_{te}) pode ser admitido como $10^{-5}/^{\circ}\text{C}$ (NBR 6118, item 8.2.3).

O concreto aquecido até 200 °C não experimenta alterações físicas e químicas importantes, perde a água livre em 100 °C e mantém suas características mecânicas. Sob temperaturas baixas geralmente as resistências do concreto aumentam.^[2]

A cura deve ser feita para evitar a evaporação da água do concreto, de modo a possibilitar a hidratação do cimento. Quando feita a cura térmica a vapor, normalmente em ambiente de fábrica de peças pré-moldadas protendidas, o objetivo é de liberar as fôrmas o mais rapidamente possível, para a fabricação de novas peças, em ritmo de produção em série. Há portanto, a necessidade de transferência da protensão para a peça, e neste caso a cura térmica é indicada, pois possibilita o rápido ganho de resistência do concreto, que para a transferência da protensão deve estar compreendida entre 65 e 80 % da resistência à compressão aos 28 dias.^[2]

A cura térmica possibilita ciclos de 24 horas na utilização das fôrmas, como mostrado na Figura 2.13. A elevação da temperatura, em uma taxa de 5 a 15 °C, é iniciada cerca de quatro a seis horas após o lançamento do concreto na fôrma. Durante cerca de 13 horas a temperatura máxima em torno de 65 a 70 °C é mantida, sendo seguida pelo resfriamento da peça. O processo todo ocorre no período em torno de 18 horas.

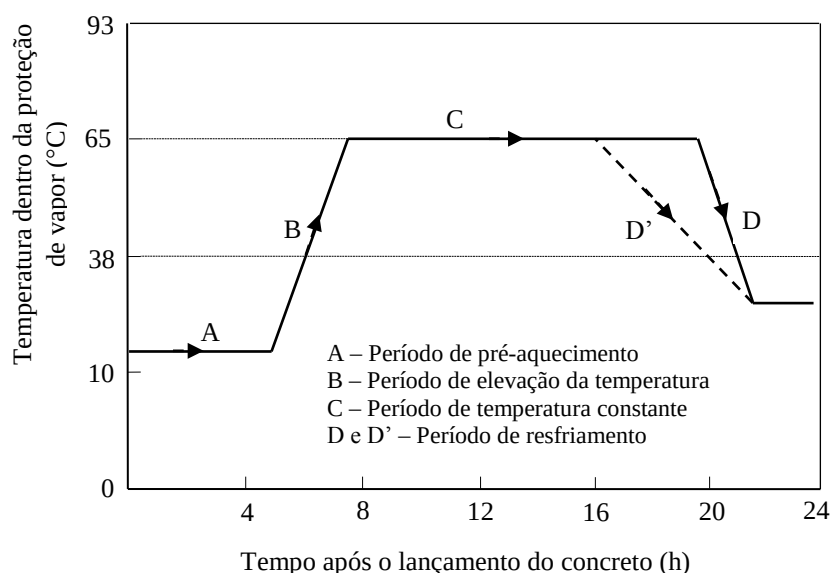


Figura 2.13 – Ciclo de temperatura x tempo na cura térmica a vapor.^[2]

2.1.11 Peças Protendidas Pré-fabricadas

Nas peças protendidas pré-moldadas⁵⁴ é muito comum a aplicação do cimento CP V ARI (alta resistência inicial), para possibilitar a aplicação da força de protensão na peça em um menor período de tempo após a concretagem. O cimento ARI proporciona a um dia de idade do concreto a resistência em torno de 50 % daquela aos 28 dias, e cerca de 80 % aos três dias de idade.

O concreto autoadensável vem sendo a cada dia mais aplicado nas fábricas de pré-moldados, devido às várias vantagens que proporciona, como maior rapidez na confecção da peça (facilita o preenchimento da fôrma e elimina a etapa de adensamento), redução de mão de obra e a melhor qualidade que proporciona na aparência das peças.

Nas peças pré-moldadas de Concreto Protendido, a cura do concreto deve ser ainda mais cuidadosa, a fim de garantir a qualidade que os concretos de resistências mais elevadas requerem. A cura térmica a vapor é frequente na fabricação dos pré-moldados, para a produção de maior quantidade de peças. A cura térmica, aliada ao cimento ARI, proporciona em 24 h cerca de 70 % da resistência à compressão aos 28 dias de cura normal.

2.2 Aços para Armadura Ativa

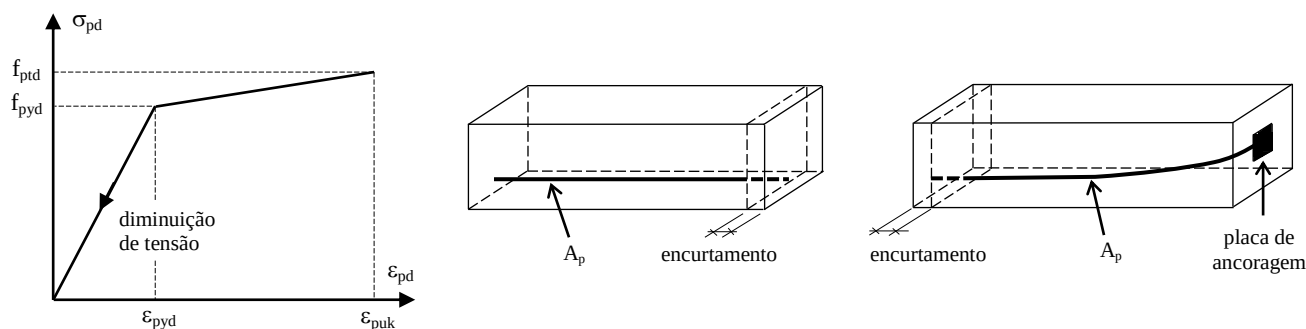
A retração e a fluência do concreto causam deformações de encurtamento nas peças protendidas, e devido à ligação entre a armadura de protensão e o concreto, o encurtamento ocorre também na armadura, sendo causa de perda de tensão na armadura, de 150 a 300 MPa^[1] (Figura 2.14). Outras várias fontes de perdas de protensão existem, como relaxação do aço, atrito na movimentação de cordoalhas pós-tensionadas no interior da bainha, escorregamento nos dispositivos de ancoragem, etc., de modo que o aço de protensão necessita ser capaz de suportar uma tensão inicial muito elevada,⁵⁵ acompanhada de uma grande capacidade de alongamento ainda no regime elástico, para apesar da diminuição de tensão devida às perdas de protensão, protender as peças eficientemente.

⁵⁴ A NBR 9062 faz uma distinção entre pré-fabricados e pré-moldados, definindo o primeiro como aquele produzido com rígido controle de qualidade, e o segundo aquele que requer um controle de qualidade menos rigoroso. Apesar desta diferença, o termo pré-moldado é de uso mais comum no Brasil.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *Projeto e execução de estruturas de concreto pré-moldado*. NBR 9062, ABNT, 2017, 86p.

⁵⁵ A resistência à tração dos aços atuais encontra-se tipicamente entre 1.000 e 1.900 MPa. Até meados do século passado, as peças protendidas não apresentavam eficiência, devido à baixa resistência dos aços, às perdas de protensão por deformações do concreto e aos concretos de baixa resistência e qualidade utilizados naquela época.

Devem também apresentar boa aderência com o concreto, baixa relaxação e boa resistência à fadiga.^{[25]56}



a) diagrama $\sigma \times \epsilon$ de A_p ;

b) transferência da protensão por meio da aderência da armadura com o concreto;

c) transferência da protensão por meio de dispositivos de ancoragem (placa de aço).

Figura 2.14 – Deformação de encurtamento na peça por retração e fluência do concreto causa perda de tensão na armadura de protensão.

Existem basicamente três tipos de aços de protensão: **fios trefilados**, **cordoalhas** (fios enrolados em forma de hélice) e **barras de alta resistência**, que apresentam diagramas *tensão x deformação* semelhantes (Figura 2.15). Os três aços têm um trecho elástico inicial similar, com um elevado limite elástico e não apresentam um patamar de escoamento bem definido. Sendo assim, de acordo com o Eurocode 2^[19], é considerada uma tensão de início de escoamento convencional ($f_{p0,1k}$) correspondente à deformação residual de 0,1 % (1 ‰)⁵⁷, geralmente entre 80 e 88 % da resistência mínima à tração do aço (f_{ptk}). A deformação de alongamento última alcança valores típicos entre 3,5 e 7 %, conforme o aço. A tensão na armadura de protensão após a transferência da protensão para a peça usualmente encontra-se entre 70 e 80 % da resistência mínima à tração (f_{ptk}).^[1]

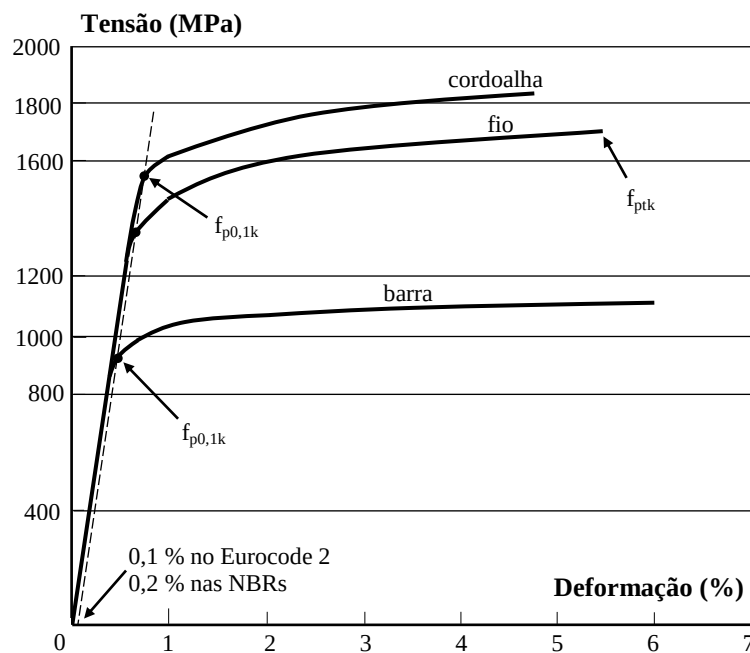


Figura 2.15 – Diagrama tensão x deformação típico dos aços de protensão.^[1]

⁵⁶ Para um melhor conhecimento dos aços aplicados como armadura ativa recomendamos a leitura, entre outros, de: CAUDURO, E.L. *Aços para Protensão*. In: ISAIA, G.C. (ed.). *Concreto: Ensino, Pesquisa e Realizações*. São Paulo, Instituto Brasileiro do Concreto (IBRACON), 2005, v.1, p.265-294.

⁵⁷ A normas brasileiras NBR 7482 para fios e NBR 7483 para cordoalhas consideram o valor 0,2 %.

O aço de protensão, ao permanecer sob alto nível de tensão e deformação de alongamento constante ao longo do tempo nas peças, sofre fluência, e consequentemente ocorre uma perda de deformação elástica do aço, ou seja, uma perda de tensão, a qual é denominada **relaxação**.⁵⁸ A NBR 7484 define a **relaxação isotérmica** como “perda de força ocorrida em um corpo de prova submetido a uma dada força inicial e mantido com comprimento e temperatura constantes. É normalmente expressa em porcentagem da força inicial para uma determinada temperatura e duração.” A **relaxação** aumenta significativamente com o aumento da tensão e da temperatura no aço. A fim de minimizar as perdas de protensão, aços de relaxação baixa (RB) têm sido utilizados em substituição aos de relaxação normal (RN), sendo que os aços de relaxação baixa (RB) têm cerca de apenas 25 % da relaxação do aço de relaxação normal (RN).

2.2.1 Normas Brasileiras

Os três tipos de aço de protensão fabricados no Brasil têm suas características apresentadas nas seguintes normas brasileiras:⁵⁹

- NBR 7482/08: *Fios de aço para Concreto Protendido - Especificação*;
- NBR 7483/08: *Cordoalhas de aço para Concreto Protendido - Especificação*;
- NBR 7484/09: *Barras, cordoalhas e fios de aço destinados a armaduras de protensão - Método de ensaio de relaxação isotérmica*;
- NBR 6349/08: *Barras, cordoalhas e fios de aço para armaduras de protensão – Ensaio de tração*.

2.2.2 Definições

Algumas definições das propriedades mecânicas são importantes para o entendimento das características dos aços de protensão, e conforme a NBR 6349 tem-se:

- alongamento permanente ou remanescente (ΔL_p)**: “alongamento específico ou percentual, medido após a retirada de uma força estabelecida (alongamento não elástico)”, Figura 2.16.

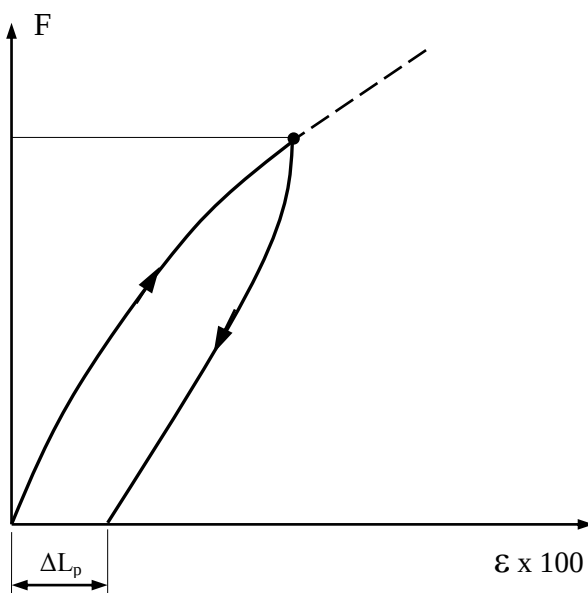


Figura 2.16 – Diagrama força x alongamento permanente. (NBR 6349)

No diagrama *força x deformação* mostrado na Figura 2.17 encontram-se as seguintes variáveis:

⁵⁸ A **relaxação** é definida como a perda de tensão com o tempo em um aço estirado, sob comprimento e temperatura constantes. Quanto maior a tensão ou a temperatura, maior a relaxação do aço. A perda por relaxação está apresentada no item 5.5.2.

⁵⁹ Não existe uma norma brasileira ABNT para as barras especiais de protensão.

b) **deformação após ruptura** (ϵ_R): “deformação remanescente, após a ocorrência da ruptura sobre a base de medida contendo a seção fraturada.” Não se aplica a cordoalhas.

c) **deformação total na ruptura** (ϵ_T): “alongamento, sob força, no momento da ruptura, que inclui os alongamentos elástico e plástico.”

d) **força máxima, força de ruptura ou força de resistência** ($F_{\text{máx}}$): “maior força suportada pelo corpo de prova tracionado até a ruptura.”

e) **força a 0,2 %** ($F_{0,2}$): “força correspondente à deformação de 0,2 %, determinada por uma reta paralela à tangente que passa na origem do diagrama força – deformação, expressa em Newton. Este valor é denominado limite convencional de escoamento.”

f) **força a 1,0 % de alongamento** (F_1): “força correspondente ao alongamento de 1 % medido no diagrama força – deformação. Esta força nos aços destinados a armaduras de protensão pode ser considerada equivalente ao limite convencional de escoamento ($F_{0,2}$).”

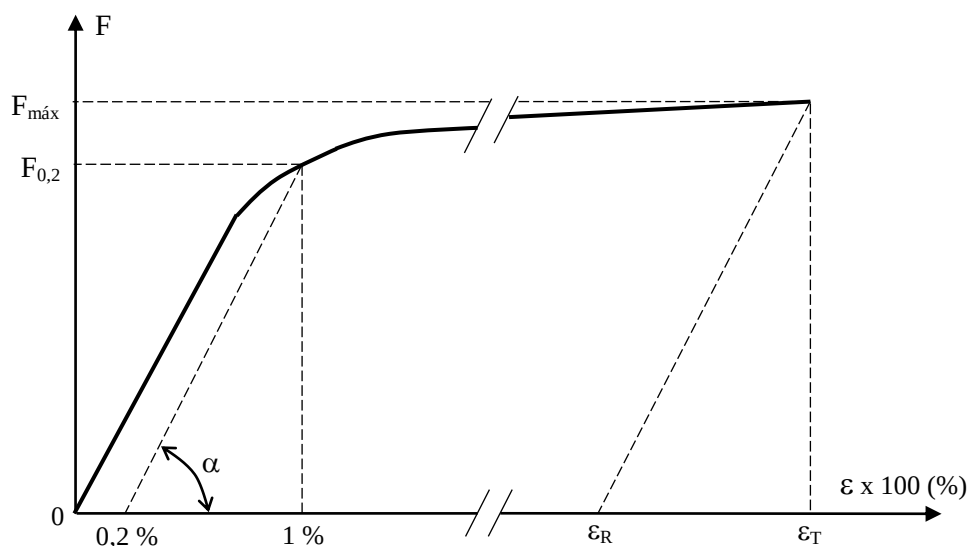


Figura 2.17 – Diagrama típico de ensaio de tração de aços de protensão. (NBR 6349)

2.2.3 Fios

A NBR 7482 fixa os requisitos para fabricação, encomenda, fornecimento e recebimento de **fios** de aço de alta resistência, de seção circular, encruados a frio por trefilação⁶⁰, com superfície lisa (L) ou entalhada (E), destinados à armadura de protensão. Os diâmetros especificados (mm) são de 4, 5, 6, 7, 8 e 9 mm, fornecidos em rolos ou bobinas (Figura 2.18), e nas seguintes categorias: CP-145, CP-150, CP-160, CP-170 e CP-175, onde os números indicam a resistência característica mínima à tração (f_{ptk}), em kN/cm^2 (ou kgf/mm^2), e CP indica Concreto Protendido. Conforme o comportamento quanto à relaxação, são classificados em relaxação normal (RN) ou relaxação baixa (RB). A norma também indica que o módulo de elasticidade dos fios (E_p) é de 205 GPa.

⁶⁰ **Trefilação**: “consiste na passagem tracionada de um fio obtido por laminação, chamado de fio-máquina, por uma ou mais fieiras metálicas. A cada passagem em cada fieira seu diâmetro é reduzido e é aumentada sua resistência. A microestrutura do aço, formada por grãos microscópicos, vai encruando devido à deformação a frio (trefilação), conseguindo-se, com essa operação, quase dobrar a tensão de ruptura do fio.”^[25]

Para conhecimento da produção de aços estruturais recomendamos: PINHO, F.O. ; PANNONI, F.D. *Produtos Metálicos Estruturais*. In: ISAIA, G.C. (ed.). *Materiais de Construção Civil e Princípios de Ciência e Engenharia de Materiais*. São Paulo, Instituto Brasileiro do Concreto (IBRACON), 2007, v.2, p.1113-1148.



Figura 2.18 – Rolo de fio (o de maior diâmetro) e rolo de cordoalha não engraxada. (Catálogo ArcelorMittal^[8])

Na Tabela 2.2 e Tabela 2.3 são mostradas as características dos **fios** fabricados por empresas brasileiras. Exemplo: CP-175 RB 5 E - fio para Concreto Protendido (CP), categoria 175 (resistência característica mínima à tração (f_{ptk}) de 175 kN/cm² (1.750 MPa), de relaxação baixa (RB), diâmetro nominal de 5 mm e entalhado (E). A NBR 7482 apresenta duas tabelas (Tabela 2 e Tabela 3) com as características mecânicas que os fios de RN e RB devem apresentar, com valores que os aços dos fabricantes devem atender.

Tabela 2.2 – Especificação de **fios** do fabricante ArcelorMittal. (Fonte: Catálogo ArcelorMittal^[8])

ESPECIFICAÇÕES DOS PRODUTOS - FIOS PARA PROTENSÃO							
Produto	Diâmetro nominal (mm)	Área aprox. (mm ²)	Área mínima (mm ²)	Massa aprox. (kg/1.000 m)	Carga mínima de ruptura (kN)	Carga mínima a 1% de deformação (kN)	Alongamento após ruptura (%)
Fio CP RB (Relaxação Baixa)							
CP 145 RB	9,0	63,6	62,9	500	91,2	82,1	6,0
CP 150 RB	8,0	50,3	49,6	395	74,5	67,0	6,0
CP 170 RB	7,0	38,5	37,9	302	64,5	58,0	5,0
CP 175 RB	4,0	12,6	12,3	99	21,4	19,3	5,0
	5,0	19,6	19,2	154	33,7	30,3	5,0
	6,0	28,3	27,8	222	48,7	43,8	5,0
*CP 190 RB	4,0	12,6	12,3	99	23,4	20,8	5,0
	5,0	19,6	19,2	154	36,5	32,5	5,0
	6,0	28,3	27,8	222	52,0	47,5	5,0

* Os fios podem ser fabricados sob consulta.
 1- Todos os fios especificados acima podem ser fabricados lisos ou entalhados.
 2- A profundidade do entalhe pode ser especificada pelo cliente.

Tabela 2.3 – Especificação de fios do fabricante Awa. (Fonte: Awa - <https://site.awacomercial.com.br/fio-de-aco-para-protensao/>)

Propriedades Mecânicas	Diâmetro Nominal (mm)	Área de Seção Nominal (mm ²)	Massa Nominal (Kg/1000m)	Carga Mínima de Ruptura (KN)	Carga Mínima a 1% de Alongamento (KN)	Along. Mínimo Após Ruptura (%)	Módulo de Elasticidade (GPa)
CP-175 RB 4E	4	12,6	98,7	21,0	18,9	5,0	195-215
CP-175 RB 5E	5	19,6	154,0	33,0	29,7	5,0	195-215
CP-175 RB 6E	6	28,3	222,0	47,7	43,0	5,0	195-215
CP-170 RB 7E	7	38,3	302,0	63,3	56,9	5,0	195-215

A Tabela 2.4 mostra as características de acondicionamento de fios do fabricante brasileiro.⁶¹ Os rolos devem ter etiquetas identificando a categoria do aço, tipo de relaxação, acabamento superficial, diâmetro, etc.

Tabela 2.4 – Dados do acondicionamento dos **fios**. (Fonte: Catálogo ArcelorMittal^[8])

ACONDICIONAMENTO				
Diâmetro nominal do fio CP RB (mm)	Peso nominal (kg)	Diâmetro interno (cm)	Diâmetro externo (cm)	Largura do rolo (cm)
4,0 - 5,0 - 6,0 - 7,0 - 8,0 - 9,0	1.100	180	210	30
4,0 - 5,0 - 6,0 - 7,0 - 8,0 - 9,0	2.200	180	230	40

1- O peso do produto final depende do rolo de fio máquina (matéria-prima), que pode variar até 10%.
2- As medidas do acondicionamento acima são apenas referências, podendo ter variações.

2.2.4 Cordoalhas

A NBR 7483 fixa os requisitos para fabricação, encomenda, fornecimento e recebimento de **cordoalhas** de aço de alta resistência de três e sete fios, destinadas a armaduras de protensão. Podem ser engraxadas⁶² e não engraxadas (Figura 2.19 e Figura 2.20). Os diâmetros nominais⁶³ especificados são de 9,5, 12,7 e 15,2 mm para cordoalhas de sete fios, fornecidas em rolos (Figura 2.21) e nas categorias CP-190 e CP-210, onde os números indicam a resistência característica mínima à tração (f_{ptk}), em kN/cm² (ou kgf/mm²), e CP indica Concreto Protendido. As cordoalhas são produzidas sempre na condição de relaxação baixa (RB). A norma também indica que o módulo de elasticidade das cordoalhas (E_p) é de 200 GPa.



Figura 2.19 – Cordoalha de sete fios. (Catálogo ArcelorMittal^[8])

⁶¹ Existem ainda as seguintes normas relativas ao acondicionamento de fios e cordoalhas: NBR 6236/2017 - *Madeira para carretéis para fios, cordoalhas e cabos - Requisitos*; NBR 7310/2011 - *Armazenamento, transporte e utilização de bobinas com fios, cabos ou cordoalhas de aço*; NBR 7309/2011 - *Armazenamento, transporte e movimentação dos elementos componentes dos carretéis de madeira para fios, cabos ou cordoalhas de aço*.

⁶² As **cordoalhas engraxadas** possuem uma camada de graxa e são revestidas de PEAD (polietileno de alta densidade) extrudado diretamente sobre a cordoalha já engraxada; as características mecânicas são idênticas às das cordoalhas não engraxadas e conforme a norma NBR 7483. O revestimento plástico evita a aderência da cordoalha com o concreto, para criar a **protensão sem aderência**, e a graxa tem a finalidade de diminuir o atrito com o revestimento plástico durante a operação e estiramento (alongamento) da cordoalha.

⁶³ Diâmetro de cordoalha é o diâmetro da circunferência que a circunscreve.



Figura 2.20 – Cordoalha de três fios.



a) cordoalha **não engraxada**;
(Fonte: Fotografia do Autor)



b) cordoalha **engraxada**.
(Fonte: Catálogo ArcelorMittal^[8])

Figura 2.21 – Rolos de cordoalhas.

Os fios são fabricados encruados a frio por trefilação a partir de fio-máquina de aço-carbono, e encordoados juntos em forma de hélice, com um fio central e seis periféricos no caso de cordoalhas de sete fios. As características das cordoalhas fabricadas por empresas brasileiras estão mostradas na Tabela 2.5 e Tabela 2.6 (cordoalhas **não engraxadas**) e na Tabela 2.7 e Tabela 2.8 (cordoalhas **engraxadas**). A cordoalha de sete fios, no diâmetro de 12,7 mm, é a de aplicação mais comum. Exemplos: CP-190 RB 12,7 - cordoalha de sete fios para Concreto Protendido (CP), categoria 190 (resistência característica mínima à tração (f_{ptk}) de 190 kN/cm² (1.900 MPa), de relaxação baixa (RB) e diâmetro nominal de 12,7 mm; CP-190 RB 3 x 3,0 - cordoalha para Concreto Protendido, categoria 190 (f_{ptk} = 1.900 MPa), relaxação baixa e composta por três fios de diâmetro nominal 3 mm por fio.

A NBR 7483 apresenta uma tabela (Tabela 1) com as características mecânicas que as cordoalhas devem apresentar, devendo os valores ser atendidos pelas cordoalhas dos fabricantes.

Tabela 2.5 – Especificação de cordoalhas não engraxadas do fabricante ArcelorMittal.
(Fonte: Catálogo ArcelorMittal^[8])

ESPECIFICAÇÕES DOS PRODUTOS - CORDOALHAS NUAS PARA PROTENSÃO							
Produto	Diâmetro nominal (mm)	Área aprox. (mm²)	Área mínima (mm²)	Massa aprox. (kg/1.000 m)	Carga mínima de ruptura (kN)	Carga mínima a 1% de deformação (kN)	Alongamento após ruptura (%)
Cordoalha 3 fios CP 190							
Cord. CP 190 RB 3 X 3,0	6,5	22	22	171	41	37	3,5
Cord. CP 190 RB 3 X 3,5	7,6	30	30	238	57	51	3,5
Cord. CP 190 RB 3 X 4,0	8,8	38	38	304	71	64	3,5
Cord. CP 190 RB 3 X 4,5	9,6	47	46	366	88	79	3,5
Cord. CP 190 RB 3 X 5,0	11,1	67	66	520	125	112	3,5
Cordoalha 7 fios CP 190							
Cord. CP 190 RB 9,3	9,3	52	21	406	97	85	3,5
Cord. CP 190 RB 9,5	9,5	56	55	441	104	94	3,5
Cord. CP 190 RB 12,5	12,5	93	91	726	173	152	3,5
Cord. CP 190 RB 12,7	12,7	101	99	792	187	169	3,5
Cord. CP 190 RB 15,20	15,2	143	140	1126	266	239	3,5
Cord. CP 190 RB 15,70	15,7	150	147	1172	279	246	3,5
Cord. CP 190 RB 15,20 Entalhada	15,2	143	140	1126	266	239	3,5
Cord. CP 190 RB 15,70 Entalhada	15,7	150	147	1172	279	246	3,5
Cordoalha 7 fios CP 210							
Cord. CP 210 RB 9,50	9,5	56	55	441	113	102	3,5
Cord. CP 210 RB 12,70	12,7	101	99	792	203	183	3,5
Cord. CP 210 RB 15,20	15,2	143	140	1126	288	259	3,5
Cord. CP 210 RB 15,70	15,70	150	147	1172	303	273	3,5

Tabela 2.6 – Especificação de cordoalhas não engraxadas Awa.
(Fonte: Awa - <https://site.awacomercial.com.br/cordoalha-de-aco-para-protensao/>)

Propriedades Mecânicas	Número de Fios	Diâmetro nominal (mm)	Área de Seção de Aço (mm²)			Massa (KG/1000m) Nominal	Mínima a 1% de Alongamento	Carga Mínima de Ruptura (KN)	Along. Mínimo Após Ruptura (%) Lo = 600mm	Módulo de Elasticidade (GPa)
			Mínimo	Nominal	Máximo					
CP-190 RB 9,5	7	9,5	54,9	56,2	57,3	441,0	92,1	102,3	3,5%	182-205
CP-190 RB 12,7	7	12,7	98,6	100,9	102,9	792,0	165,3	183,7	3,5%	182-205
CP-190 RB 15,2	7	15,2	139,9	143,4	146,3	1126,0	234,6	260,7	3,5%	182-205
CP-190 RB 15,7	7	15,7	147	150	153	1310,0	247,0	274,0	3,5%	182-205
CP-210 RB 12,7	7	12,7	98,6	100,9	102,9	792,0	183,0	203,0	3,5%	182-205
CP-210 RB 15,2	7	15,2	139,9	143,4	146,3	1126,0	259,0	288,0	3,5%	182-205
CP-190 RB 3x3	3	3x3	21,5	21,8	22,8	171	36,1	40,1	3,5%	182-205
CP-190 RB 3x4	3	3x4	37,6	38,7	39,8	304	63,1	70,1	3,5%	182-205

Tabela 2.7 – Especificação de **cordoalhas engraxadas**. (Fonte: Catálogo ArcelorMittal^[8])

ESPECIFICAÇÕES DOS PRODUTOS - CORDOALHAS PARA PROTENSÃO ENGRAXADAS E PLASTIFICADAS								
Produto	Diâmetro nominal (mm)	Área aprox. (mm ²)	Área mínima (mm ²)	Massa aprox. de aço (kg/1.000m)	Massa aprox. da cordoalha plastificada e engraxada (kg/1.000m)	Carga mínima de ruptura (kN)	Carga mínima a 1% de deformação (kN)	Alongamento após ruptura (%)
Cordoalha 7 fios CP 190								
Cord. CP 190 RB 12,70	12,7	101	99	792	890	187	169	3,5
Cord. CP 190 RB 15,20	15,2	143	140	1126	1240	265	239	3,5
Cord. CP 190 RB 15,70	15,7	150	147	1172	1310	279	246	3,5
Cordoalha 7 fios CP 210								
Cord. CP 210 RB 12,70	12,7	101	99	792	890	203	183	3,5
Cord. CP 210 RB 15,20	15,2	143	140	1126	1240	288	259	3,5
Cord. CP 210 RB 15,70	15,70	150	147	1172	1310	303	273	3,5

Tabela 2.8 – Especificação de **cordoalhas engraxadas** do fabricante Awa. (Fonte: Awa - <https://site.awacomercial.com.br/cordoalha-engraxada/>)

Propriedades Mecânicas	Número de Fios	Diâmetro nominal (mm)	Área de Seção de Aço (mm ²)			Massa (KG/1000m) Nominal	Mínima a 1% de Alongamento	Carga Mínima de Ruptura (KN)	Along. Mínimo Após Ruptura (%) Lo = 600mm	Módulo de Elasticidade (GPA)
			Mínimo	Nominal	Máximo					
CP-190 RB 12,7	7	12,7	98,6	100,9	102,9	890,0	165,3	183,7	3,5%	182-205
CP-190 RB 15,2	7	15,2	139,9	143,4	146,3	1240,0	234,6	260,7	3,5%	182-205
CP-190 RB 15,7	7	15,7	147	150	153	1310,0	247,0	274,0	3,5%	182-205
CP-210 RB 12,7	7	12,7	98,6	100,9	102,9	890,0	183,0	203,0	3,5%	182-205
CP-210 RB 15,2	7	15,2	139,9	143,4	146,3	1240,0	259,0	288,0	3,5%	182-205

A Tabela 2.9 e Tabela 2.10 mostram as características de acondicionamento das cordoalhas não engraxadas e engraxadas de um fabricante brasileiro. Os rolos devem ter etiquetas identificando o número de fios da cordoalha, categoria (190 ou 210), relaxação (RB), diâmetro nominal, etc.

Tabela 2.9 – Dados do acondicionamento de **cordoalhas não engraxadas**. (Fonte: Catálogo ArcelorMittal^[8])

Figura 2.15 – Dados do acondicionamento de cordoalhas nuas engastadas. (Fonte: Catálogo Aneorometa)

ACONDICIONAMENTO DE CORDOALHAS NUAS PARA PROTENSÃO					
Tipo de cordoalha	Peso (kg)		Diâmetro interno (cm)	Diâmetro externo (cm)	Largura do rolo (cm)
3 e 7 fios	1.800	3.000	76	120	80

1- O peso do rolo pode variar, dependendo da metragem em que foi produzido.
 2- O diâmetro externo do rolo depende do peso.
 3- Rolos com peso menor ou maior podem ser fabricados, desde que isso seja previamente acordado entre cliente e produtor.

Tabela 2.10 – Dados do acondicionamento de **cordoalhas engraxadas**. (Fonte: Catálogo ArcelorMittal^[8])

ACONDICIONAMENTO DE CORDOALHAS ENGRAXADAS E PLASTIFICADAS PARA PROTENSÃO					
Tipo de cordoalha	Peso (kg)		Diâmetro interno (cm)	Diâmetro externo (cm)	Largura do rolo (cm)
Cordoalhas de 7 fios engraxadas e plastificadas	1.500	2.500	76	130	79

1- O peso do rolo pode variar, dependendo da metragem em que foi produzido.
2- O diâmetro externo do rolo depende do peso.
3- Rolos com peso entre 1.000 kg e 2.500 kg podem ser fabricados, desde que isso seja previamente acordado entre cliente e produtor.

2.2.5 Barras Especiais

As **barras** são produzidas laminadas à quente com aços especiais que proporcionam altas resistências. Existem em diferentes diâmetros e têm a superfície com nervuras, que melhoram a aderência com o concreto e possibilitam a aplicação de porcas, para fixação em placas de ancoragem. O comprimento é limitado em até 12 m. A Figura 2.22 até a Figura 2.26 mostram os dispositivos de ancoragem (placas e porcas de aço), luva de emenda de barra, bainha e cilindro hidráulico utilizados no sistema de protensão com barra.



Figura 2.22 – Barra de aço Dywidag, com dispositivos de ancoragem. (Fonte: Catálogo Dywidag^[6])

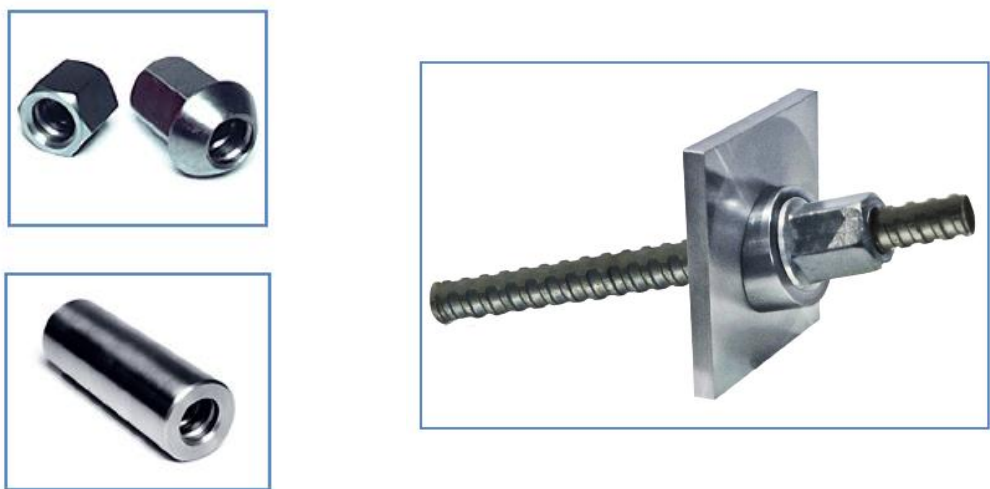


Figura 2.23 – Barra de aço Dywidag, com dispositivos de ancoragem. (Fonte: Catálogo Dywidag^[6])



Figura 2.24 – Sistema Protende de protensão com barra de aço especial.
(Fonte: Protende - <https://www.protende.com.br/protbar-sistema-de-protensao>)



Figura 2.25 – Barra de aço Protende em bainha e dispositivos de ancoragem.
(Fonte: Protende - <https://www.protende.com.br/protbar-sistema-de-protensao>)

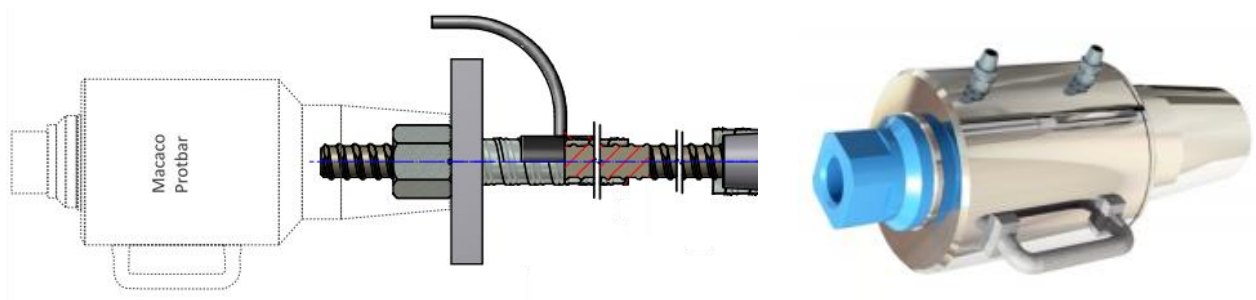


Figura 2.26 – Detalhe do cilindro (macaco) hidráulico para estiramento de barra de aço Protende.
(Fonte: Protende - <http://protende.engenharia.ws/CAT%C3%81LOGO%20PROTBAR.pdf>)

A Tabela 2.11 até a Tabela 2.13 mostram as características das barras produzidas por diferentes empresas brasileiras.

Tabela 2.11 – Especificação de **barras** do sistema Dywidag. (Fonte: Catálogo Dywidag^[6])

Ø Nominal	Tensão de Escoamento [Kgf/mm ² [MPa]]	Tensão de Ruptura [Kgf/mm ² [MPa]]	Carga de Escoamento [tf]	Carga de Ruptura [tf]	Passo [mm]	Área da Seção Transversal ^{a)} [mm ²]	Peso ^{b)} [Kg/m]
DW 15 mm	90 [900]	110 [1.100]	16	19	10	177	1,41
DW 32 mm	95 [950]	105 [1.050]	76	84	16	804	6,31
DW 36 mm	95 [950]	105 [1.050]	97	107	18	1.018	8,27
DW 40 mm*	95 [950]	105 [1.050]	119	132	20	1.257	10,21
DW 47 mm	95 [950]	105 [1.050]	165	182	21	1.735	14,10

a) área calculada
b) peso teórico nominal

Módulo de Elasticidade: E = 20.500 Kgf/mm² +/- 5%

Tabela 2.12 – Especificação das **barras** PSB 930/1080 e 1080/1230 do sistema Protende. (Fonte: Protende - <http://protende.engenharia.ws/CAT%C3%81LOGO%20PROTBAR.pdf>)

Propriedades	Ø25mm		Ø32mm		Ø36mm		Ø40mm	
Classe ISO 6934-5	930/1080	1080/1230	930/1080	1080/1230	930/1080	1080/1230	930/1080	1080/1230
Tensão de escoamento mín. (MPa)	930	1080	930	1080	930	1080	930	1080
Tensão de ruptura mín. (MPa)	1080	1230	1080	1230	1080	1230	1080	1230
Área da seção transversal (mm ²)	491	491	804	804	1018	1018	1256	1256
Carga de escoamento (kN)	456	530	748	868	1004	1099	1168	1356
Carga de ruptura (kN)	530	604	868	989	1099	1252	1356	1545
Relaxação 1000h	≤3%	≤3%	≤3%	≤3%	≤3%	≤3%	≤3%	≤3%
Peso da barra (kg/m)	4,1	4,1	6,65	6,65	8,41	8,41	10,34	10,34
Carga máx. permanente (tf)*	24	28	39	45	39	57	60	70
Carga máx. provisória (tf)*	28	32	45	52	57	66	70	82
Carga de protensão (tf)**	38	44	63	71	79	90	98	111

*Conforme Norma NBR-5629
**Conforme Norma NBR-6118

Tabela 2.13 – Especificação da **barra** PSB 830/1030 do sistema Protende. (Fonte: Protende - <https://www.protende.com.br/protbar-sistema-de-protensao>)

PROPRIEDADES	Ø25mm	Ø32mm	Ø36mm	Ø40mm
CLASSE ISO 6934-5	830/1030	830/1030	830/1030	830/1030
TENSÃO DE ESCOAMENTO MÍN. (Mpa)	830	830	830	830
TENSÃO DE RUPTURA MÍN. (Mpa)	1030	1030	1030	1030
ÁREA DA SEÇÃO TRANSVERSAL (mm ²)	491	804	1018	1256
CARGA DE ESCOAMENTO (Kn)	407	667	844	104
CARGA DE RUPTURA (Kn)	505	828	105	130
RELAXAÇÃO 1000h	≤3%	≤3%	≤3%	≤3%
PESO DA BARRA (kg/m)	4,1	6,65	8,41	10,34
CARGA MÁX. PERMANENTE (tf)*	21	35	44	54
CARGA MÁX. PROVISÓRIA (tf)*	25	40	51	63

* Conforme Norma NBR-5629

Dimensões sujeitas a modificações

2.2.6 Massa Específica, Coeficiente de Dilatação Térmica e Módulo de Elasticidade

Para os aços de armadura ativa a NBR 6118 considera a **massa específica** de 7.850 kg/m³, e **coeficiente de dilatação térmica** (α_{te}) de 10⁻⁵/°C, para intervalos de temperatura entre - 20°C e 100°C. Para o **módulo de elasticidade** (E_p) a norma permite adotar 200 GPa (200.000 MPa = 20.000

kN/cm^2) para fios e cordoalhas, quando o valor não for obtido em ensaio ou não for fornecido pelo fabricante. No item 8.4.6 a norma apresenta características de ductilidade do aço, e no 8.4.7 apresenta a resistência à fadiga.

2.2.7 Diagrama tensão-deformação

A NBR 6118 (item 8.4.5) especifica que “O diagrama tensão-deformação deve ser fornecido pelo fabricante ou obtido através de ensaios realizados segundo a ABNT NBR 6349.” Na falta do diagrama a NBR 6118 permite utilizar um diagrama simplificado (Figura 2.27), nos Estados-Limite de Serviço e Último, para intervalos de temperaturas entre -20°C e 150°C .

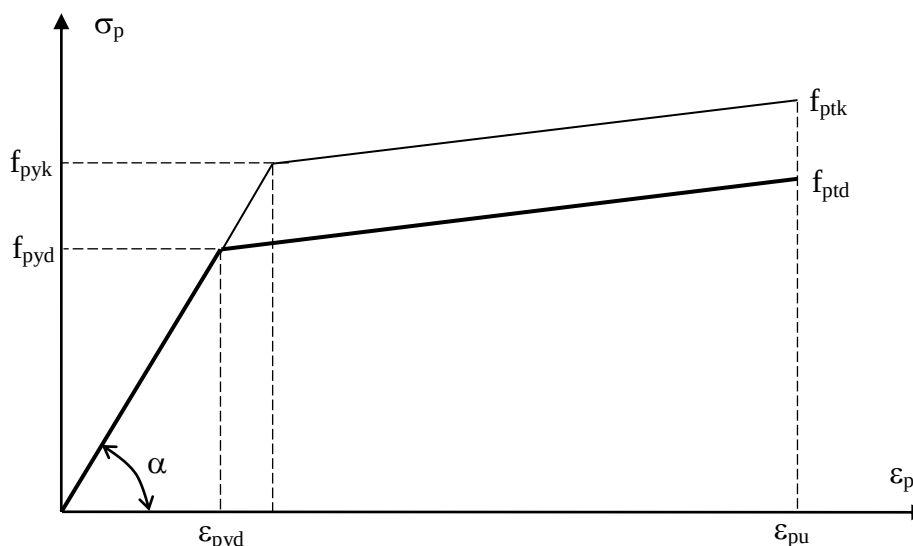


Figura 2.27 – Diagrama tensão-deformação simplificado indicado pela NBR 6118 para aços de protensão.

“Os valores característicos da resistência ao escoamento convencional f_{pyk} , da resistência à tração f_{ptk} e o alongamento após ruptura ϵ_{uk} das cordoalhas devem satisfazer os valores mínimos estabelecidos na ABNT NBR 7483. Os valores de f_{pyk} , f_{ptk} e do alongamento após ruptura ϵ_{uk} dos fios devem atender ao que é especificado na ABNT NBR 7482.” (NBR 6118, item 8.4.5)

Do diagrama da Figura 2.27 podem ser feitas as seguintes considerações:

a) f_{ptk} = resistência característica mínima à tração; f_{pyk} = resistência característica de início de escoamento convencional, correspondente à deformação residual de 0,2 % (obtida com a força F_1 relativa ao alongamento de 1 % (ver Figura 2.17), podendo ser determinada com as seguintes relações: $f_{pyk} = 0,85f_{ptk}$ para fios de relaxação normal (RN), $f_{pyk} = 0,90f_{ptk}$ para fios de relaxação baixa (RB) e cordoalhas de três ou sete fios.⁶⁴ No caso de barras, a relações variam (em torno de 0,85) conforme a resistência e diâmetro da barra, devendo ser obtidas diretamente nas tabelas dos fabricantes; $f_{ptd} = f_{ptk}/\gamma_s$ = resistência mínima de cálculo à tração; $f_{pyd} = f_{pyk}/\gamma_s$ = resistência de início de escoamento de cálculo;

b) módulo de elasticidade $E_p = \text{tg } \alpha = 200 \text{ GPa}$ para fios e cordoalhas (na falta de dados do fabricante e de ensaio segundo a NBR 6118). Também 200 GPa para as cordoalhas conforme a NBR 7483, e $E_p = 205 \text{ GPa}$ para fios conforme a NBR 7482;

c) $\epsilon_{pyd} = f_{pyd}/E_p$ = deformação de início de escoamento de cálculo;

⁶⁴ Relações entre resistências obtidas na Tabela 2 e Tabela 3 da NBR 7482 (fios) e Tabela 1 da NBR 7483 (cordoalhas). Essas relações também podem ser obtidas diretamente nas tabelas dos fabricantes com as características mecânicas dos aços, dividindo a carga mínima a 1 % de deformação (ou carga de escoamento) pela carga mínima de ruptura.

d) ε_{puk} = deformação de alongamento último relativa à ruptura do aço, podendo ser tomado como 5 ou 6 % para fios (conforme a Tabela 2 e Tabela 3 da NBR 7482), e 3,5 % para cordoalhas (conforme a Tabela 1 da NBR 7483).⁶⁵

2.2.8 Fadiga nos Aços de Protensão

Fadiga é o “processo de deterioração das propriedades mecânicas de materiais sob tensões flutuantes, induzidas geralmente por aplicação repetitiva de cargas variáveis na estrutura.”^[2]

A diferença entre as tensões máxima e mínima (tensões flutuantes) aplicadas pelo carregamento cíclico (repetitivo) determina a chamada **variação de tensão** (S). Abaixo de um determinado valor S de variação de tensão, alguns materiais não rompem até um quase infinito número de ciclos (N), que especifica a **resistência limite à fadiga** do material (*endurance limit*), ou seja, corresponde à variação de tensão (S) para a qual o material não rompe para um número infinito de ciclos. Os aços de protensão não apresentam essa resistência, ou seja, não existe (ou não foi achado) um valor de variação de tensão abaixo do qual o aço não rompe.

Pode-se também definir a **resistência à fadiga** de um material (*fatigue life*) como o número de ciclos de tensão necessários para a sua ruptura. O valor de 2 milhões de ciclos tem sido comumente tomado (inclusive para elementos estruturais) para a resistência à fadiga mínima que um material deve apresentar, ou seja, o material não deve romper por fadiga antes dos 2 milhões de ciclos. Esse valor pode alcançar os 10 milhões de ciclos para determinadas aplicações.

Os diagramas comuns quando do estudo da fadiga é o S x N (variação de tensão x número de ciclos), o de Goodman (Figura 2.28) mostra a variação de tensão (S) e as tensões mínima e máxima no material, para um determinado número de ciclos (N), e o de Smith (Figura 2.29), que mostra a tensão média em substituição à tensão mínima.

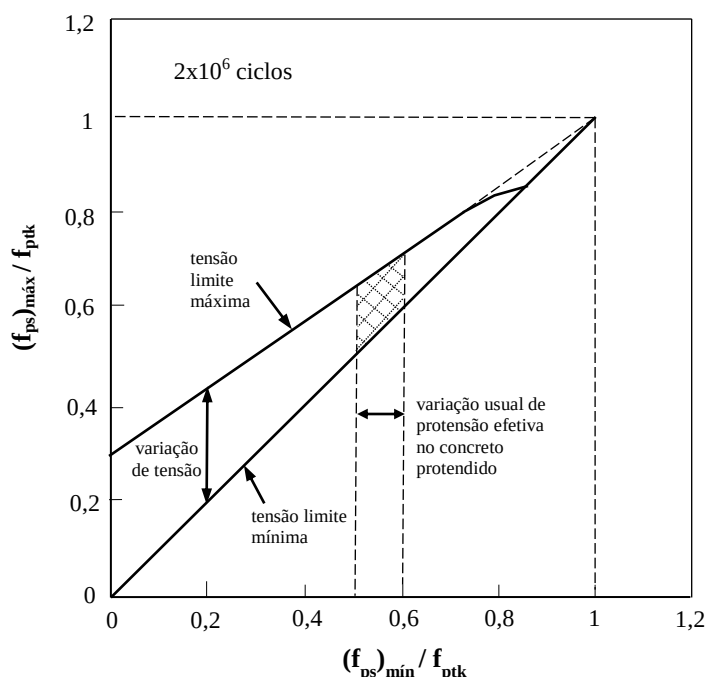


Figura 2.28 – Diagrama típico de Goodman para fios e cordoalhas de protensão.^[2]

Nas peças protendidas, a tensão mínima no aço de protensão situa-se geralmente entre 50 e 60 % da resistência do aço (f_{ptk}). No diagrama da Figura 2.28 observa-se que para uma tensão mínima de 55 %, a variação de tensão de 13 % é aceitável. O ACI C. 215^[15] apresenta as seguintes recomendações para a variação de tensão máxima (Δf_{pr}):

⁶⁵ O Eurocode 2 considera $\varepsilon_{pud} = 0,9\varepsilon_{puk}$ como deformação limite para o diagrama com valores de cálculo.

$$\Delta f_{pr} = 0,10f_{ptk} \quad \text{– para cordoalhas}$$

$$\Delta f_{pr} = 0,12f_{ptk} \quad \text{– para fios.}$$

Eq. 2.31

Para peças com *protensão completa* não fissurados os limites de variação de tensão máxima da Eq. 2.31 podem ser conservativos. No entanto, no caso de peças com *protensão parcial* e se a fissuração for permitida, os limites podem tornar-se críticos no projeto.^{[2]66}

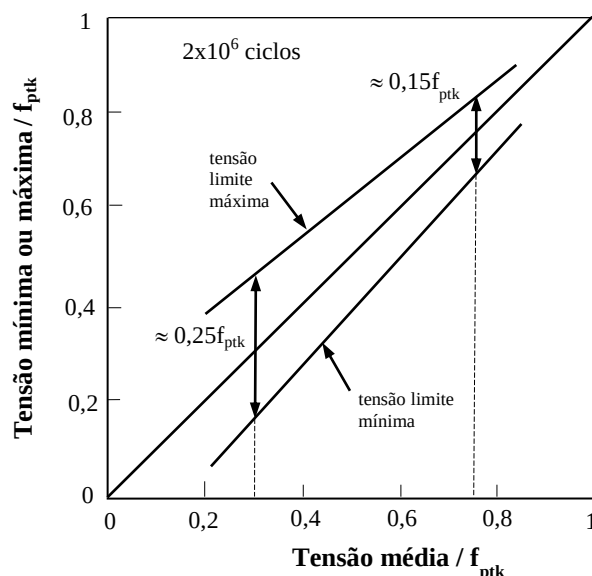


Figura 2.29 – Diagrama típico de Smith para aços de protensão.^[2]

2.3 Aços para Armadura Passiva

Os vergalhões de aço utilizados no Brasil são estabelecidos pela NBR 7480⁶⁷, que estabelece os requisitos exigidos para encomenda, fabricação e fornecimento de barras e fios de aço destinados a armaduras para estruturas de Concreto Armado. As **barras** são os vergalhões “de diâmetro nominal 6,3 mm ou superior, obtidos exclusivamente por laminação a quente⁶⁸ sem o processo posterior de deformação mecânica.” Os **fios** são aqueles de “diâmetro nominal 10,0 mm ou inferior, obtidos a partir de fio-máquina por trefilação⁶⁹ ou laminação a frio.”⁷⁰

A Figura 2.30 mostra barras de aço em segmentos retos e bobinas, e a Figura 2.31 também mostra rolos (bobinas) de barras e fios.

⁶⁶ Naaman^[2] apresenta outras informações práticas relevantes sobre os limites de variação de tensão na armadura de protensão, de forma a evitar a ruptura por fadiga, bem como cita diversas publicações que podem ser consultadas no caso de projeto.

⁶⁷ ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. Aço destinado a armaduras para estruturas de concreto armado - Especificação. NBR 7480, ABNT, 2007, 13p.

⁶⁸ **Laminação:** “Consiste em se passar uma peça metálica entre dois cilindros, modificando sua seção transversal, de modo a obterem-se placas, blocos, tarugos, chapas, perfis estruturais, fios, etc.” (PINHO, F.O. ; PANNONI, F.D. *Produtos Metálicos Estruturais*. In: ISAIA, G.C. (ed.). *Materiais de Construção Civil e Princípios de Ciência e Engenharia de Materiais*. São Paulo, Instituto Brasileiro do Concreto (IBRACON), 2007, v.2, p.1113-1148.)

⁶⁹ **Trefilação:** “processo de conformação mecânica a frio que reduz o fio-máquina através da passagem por orifícios calibrados denominados de matrizes ou feiras.”^[ver MORAIS e REGO na nota seguinte]

⁷⁰ Para um melhor conhecimento dos aços aplicados como armadura passiva recomendamos a leitura, entre outros, de: MORAIS, V.R. ; REGO, L.R.M. *Aços para Concreto Armado*. In: ISAIA, G.C. (ed.). *Concreto: Ensino, Pesquisa e Realizações*. São Paulo, Instituto Brasileiro do Concreto (IBRACON), 2005, v.1, p.233-263. BATISTA, A. ; CAUDURO, E.L. ; BALLESTEROS, D. *Produtos de aço para estruturas de concreto e alvenaria*. In: ISAIA, G.C. (ed.). *Materiais de Construção Civil e Princípios de Ciência e Engenharia de Materiais*. São Paulo, Instituto Brasileiro do Concreto (IBRACON), 2007, v.2, p.1077-1111.



Figura 2.30 – Barras de armadura passiva em forma de segmentos retos e bobinas.
(Fonte: Marka Soluções Pré-fabricadas, Fotografias do Autor)



Figura 2.31 – Armazenamento de barras e fios na forma de rolos (bobinas).
(Fonte: Marka Soluções Pré-fabricadas, Fotografias do Autor)

Conforme a resistência de início de escoamento (f_{yk}), as **barras** de aço são classificadas nas categorias CA-25 e CA-50, e os **fios** de aço na categoria CA-60. O número na sequência de CA (Concreto Armado) indica o f_{yk} , em kgf/mm^2 (ou kN/cm^2). Por indicação da NBR 6118 (item 8.3) os seguintes valores podem ser considerados:

- a) **massa específica:** 7.850 kg/m^3 ;
- b) **coeficiente de dilatação térmica:** $10^{-5}/^\circ\text{C}$ para intervalos de temperatura entre -20°C e 150°C ;
- c) **módulo de elasticidade:** 210 GPa (210.000 MPa) na falta de ensaios ou valores fornecidos pelo fabricante.

2.3.1 Tipo de Superfície Aderente

Conforme a NBR 6118 (8.3.2), “Os fios e barras podem ser lisos, entalhados ou providos de saliências ou mossas.”⁷¹ A configuração e a geometria das saliências ou mossas devem satisfazer também o que é especificado nesta Norma, nas Seções 9 e 23.” E segundo a NBR 7480 (4.2.1.1), “As barras da categoria CA-50 são obrigatoriamente providas de **nervuras** transversais oblíquas, conforme exemplificado na Figura A.1.” (ver Figura 2.32). Os fios CA-60 “podem ser lisos, entalhados ou nervurados, observando-se o atendimento ao coeficiente de conformação superficial⁷² mínimo que consta da Tabela B.3. Os fios de diâmetro nominal igual a $10,0 \text{ mm}$ devem ter obrigatoriamente entalhes ou nervuras.” (NBR 7480, 4.2.2). Os aços da categoria CA-25 devem “ter superfície obrigatoriamente lisa, desprovida de quaisquer tipos de nervuras ou entalhes. Deve-se adotar como coeficiente de conformação superficial para todos os diâmetros valor igual a 1 ($\eta = 1$).” (NBR 7480, 4.2.3)

⁷¹ As **saliências** ou **mossas** são denominadas “nervuras” na NBR 7480, que especifica as características que as nervuras devem apresentar, como ângulos, altura, espaçamento, etc.

⁷² O termo **conformação superficial** (η) da NBR 7480 é denominado **coeficiente de aderência** na NBR 6118.

A capacidade de aderência entre o concreto e o aço depende da rugosidade da superfície do aço, sendo medida pelo **coeficiente de aderência** (η_1), e conforme a NBR 6118 (8.3.2) tem-se: 1,0 para CA-25 e CA-60, e 2,25 para CA-50.



(Fonte: Fotografia do Autor)



(Fonte: Gerdau -

<https://www2.gerdau.com.br/produtos/vergalhao-gerdau>)

a) nervuras na superfície das barras, com identificação do fabricante e da categoria do aço;



b) barras longitudinais e estribos de viga. (Fonte: Marka Soluções Pré-fabricadas, Fotografias do Autor)

Figura 2.32 – Nervuras na superfície de barras de armadura passiva.

2.3.2 Características Geométricas

Os diâmetros nominais (ϕ em mm) padronizados pela NBR 7480 são os indicados na Tabela 2.14, que mostra também os valores nominais para a massa, a área e o perímetro dos fios e barras.

2.3.3 Soldabilidade

Uma característica muito importante quanto aos vergalhões de aço é a questão da possibilidade ou não do material receber solda, porque a armadura soldada apresenta algumas vantagens, bem como desvantagens, em relação às armaduras amarradas com arame recozido, como: maior produtividade da mão de obra, maior rigidez das peças (armadura montada), racionalização do canteiro de obras nos espaços destinados à montagem de armaduras, maior rapidez na execução a obra, etc.^[26] Na Figura 2.32 pode-se observar a letra S na superfície de alguns dos vergalhões, o que significa que o vergalhão é de aço soldável. Os aços CA-25 e CA-60 são geralmente soldáveis. O CA-50 pode ser soldável ou não, dependendo do fabricante, do diâmetro da barra e do tipo de fornecimento (segmento reto ou rolo), devendo-se contactar o fabricante para essa definição.

Tabela 2.14 – Características geométricas nominais dos fios e barras.
(Tabelas B.1 e B.2 da NBR 7480)

Diâmetro (mm)		Massa (kg/m)	Área (mm ²)	Perímetro (mm)
Fios	Barras			
2,4	-	0,036	4,5	7,5
3,4	-	0,071	9,1	10,7
3,8	-	0,089	11,3	11,9
4,2	-	0,109	13,9	13,2
4,6	-	0,130	16,6	14,5
5,0	-	0,154	19,6	17,5
5,5	-	0,187	23,8	17,3
6,0	-	0,222	28,3	18,8
-	6,3	0,245	31,2	19,8
6,4	-	0,253	32,2	20,1
7,0	-	0,302	38,5	22,0
8,0	8,0	0,395	50,3	25,1
9,5	-	0,558	70,9	29,8
10,0	10,0	0,617	78,5	31,4
-	12,5	0,963	122,7	39,3
-	16,0	1,578	201,1	50,3
-	20,0	2,466	314,2	62,8
-	22,0	2,984	380,1	69,1
-	25,0	3,853	490,9	78,5
-	32,0	6,313	804,2	100,5
-	40,0	9,865	1256,6	125,7

2.3.4 Diagrama Tensão-Deformação

Os aços categorias CA-25 e CA-50 (laminados a quente) apresentam patamar de escoamento bem definido (Figura 2.33), e o CA-60 (trefilado ou laminado a frio) a resistência de início de escoamento é determinada com a deformação permanente (residual) de 0,2 %, ou pelo valor da tensão correspondente à deformação de 0,5 %, prevalecendo o primeiro valor em caso de divergência.

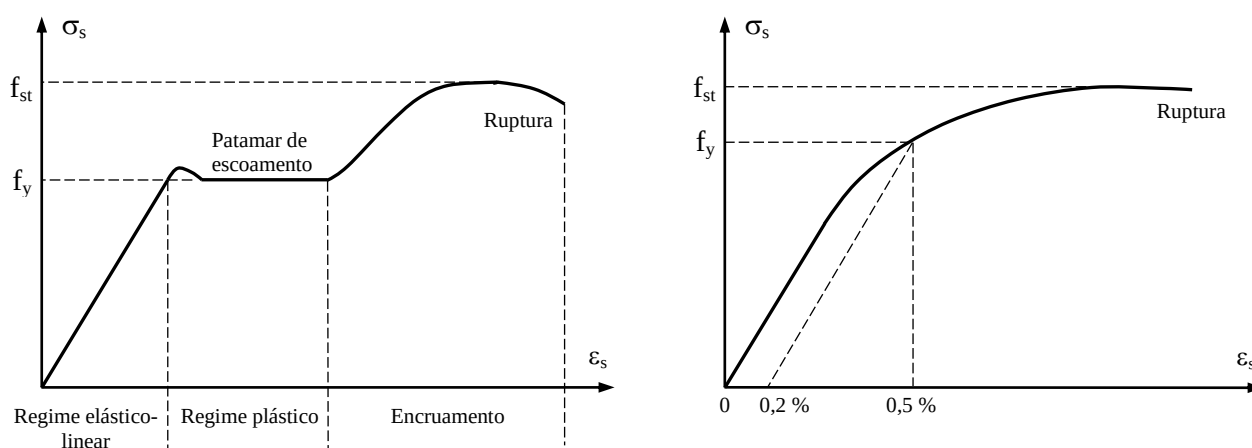


Figura 2.33 – Diagrama tensão-deformação com e sem patamar de escoamento.

De acordo com a NBR 7480, os vergalhões devem atender as características mostradas na Tabela 2.15, onde f_{yk} é a resistência de início de escoamento, f_{stk} é a resistência à tração, ϵ_{uk} é a deformação na ruptura e ϕ é o diâmetro da barra ou fio.

Tabela 2.15 – Propriedades mecânicas exigíveis de barras e fios de aço para armadura passiva.
(Tabela B.3 da NBR 7480)

Categoria	f_{yk} (MPa)	f_{st} (MPa)	ϵ_{uk} em 10ϕ (%)
CA-25	250	$1,20 f_y$	18
CA-50	500	$1,10 f_y$	8
CA-60	600	$1,05 f_y$	5

A NBR 6118 (item 8.3.6) permite, para cálculo nos Estados-Limites de Serviço e Último, utilizar o diagrama $\sigma \times \epsilon$ simplificado mostrado na Figura 2.34, para os aços com ou sem patamar de escoamento.⁷³

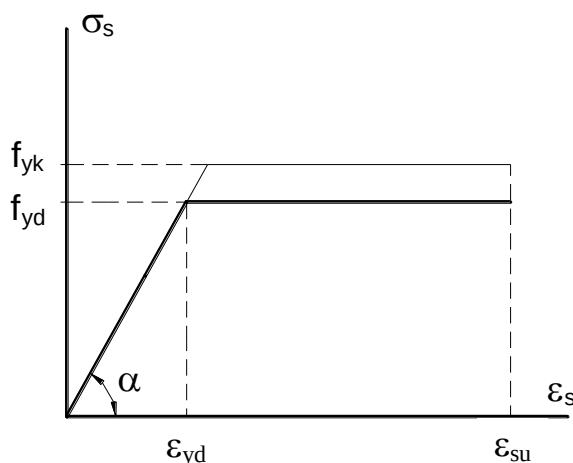


Figura 2.34 – Diagrama tensão-deformação para aços de armaduras passivas com ou sem patamar de escoamento.

A deformação última (ϵ_{su}) é limitada a 10 ‰ (10 mm/m) para a tração (deformação de alongamento, ver Figura 17.1 da NBR 6118, item 17.2.2). Para a compressão a deformação última é 3,5 ‰ para concretos com $f_{ck} \leq 50$ MPa, e para concretos com $f_{ck} > 50$ MPa deve ser aplicada a Eq. 2.18 para definir o valor de ϵ_{su} . O módulo de elasticidade é dado pela tangente do ângulo α , assumido como 210.000 MPa conforme a NBR 6118.

Considerando a lei de Hooke ($\sigma = \epsilon E$) no trecho elástico, a deformação de início de escoamento do aço (ϵ_{yd} – valor de cálculo) correspondente à tensão de início de escoamento é dada por:

$$\epsilon_{yd} = \frac{f_{yd}}{E_s} \quad \text{Eq. 2.32}$$

$$\text{com } f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s}$$

A deformação de início de escoamento de cálculo (ϵ_{yd}) é 1,04 ‰ para o aço CA-25, 2,07 ‰ para o CA-50 e 2,48 ‰ para o CA-60.

2.4 Bainha

A bainha é um tubo rígido ou flexível, dentro do qual a armadura de protensão é colocada, com a função de proteger e isolar as cordoalhas do concreto exterior, além de possibilitar a movimentação das cordoalhas durante a protensão (Figura 2.35). A fim de criar aderência entre o concreto da peça e a armadura de protensão, a bainha pode ser preenchida com calda de cimento, o que origina a chamada **pós-tensão com aderência posterior**. Quando não preenchidas com calda de cimento, tem-

⁷³ O valor de f_{yk} para os aços sem patamar de escoamento é o valor da tensão correspondente à deformação permanente de 0,2 ‰ (NBR 6118, item 8.3.6).

se a **pós-tensão sem aderência**. São fabricadas em aço galvanizado (ou material plástico), com espessura de 0,2 a 0,4 mm. Os diâmetros variam de 35 à 150 mm, ou conforme o fabricante, e possuem uma superfície ondulada em hélice para possibilitar luvas rosqueadas nas emendas, aumentar a rigidez e melhor a aderência com o concreto e a calda de cimento.

A NBR 6118 (18.6.2.1) apresenta prescrições para a bainha conforme as seguintes situações:

a) Protensão interna com armadura aderente

“As bainhas da armadura de protensão devem ser metálicas, projetadas com diâmetro adequado à livre movimentação dos cabos, ao sistema executivo empregado e capazes de resistir, sem deformação apreciável, à pressão do concreto fresco e aos esforços de montagem. Além disso, devem ser estanques relativamente à pasta e à argamassa por ocasião da concretagem.”

b) Protensão interna com armadura não aderente

“As bainhas podem ser de material plástico com proteção adequada da armadura.”

c) Protensão externa

“As bainhas podem ser de material plástico resistente às intempéries e com proteção adequada da armadura.”



(Fonte: Dywidag, <https://www.dywidag.com.br>)



(Fonte: Mac, <http://www.macprotensao.com.br>)



(Fonte: Stenzowski, <http://www.stenzowski.com.br>)

Figura 2.35 – Bainha metálica.

2.5 Calda de Cimento

A calda, ou nata de cimento injetada no interior da bainha, tem como função proporcionar a aderência entre a armadura de protensão e o concreto da peça, na pós-tração, e proteger a armadura contra a corrosão (Figura 2.36). Cerca de 36 a 44 kg de água são utilizados para cada 100 kg de cimento. A norma NBR 7681 (*Calda de cimento para injeção*) fixa as condições exigidas para as caldas.



(Fonte: Mac, <http://www.macprotensao.com.br/produto/16>)



(Fonte: Protende, <http://www.protende.com.br/equipamentos-para-protensao>)
Figura 2.36 – Misturador e bomba para injeção de calda de cimento.

3. CRITÉRIOS DE PROJETO

Com este capítulo pretende-se apresentar os principais critérios para projeto que devem ser considerados conforme a NBR 6118, como a classe de agressividade do ambiente, cobrimento de concreto, Estados-Limites, domínios de deformação, ações nas estruturas, tensões admissíveis dos materiais, escolha do nível de protensão, etc., com alguns temas já conhecidos pelo estudante.

3.1 Agressividade do Ambiente, Qualidade do Concreto e Cobrimento

No projeto de uma estrutura em concreto, o projetista tem que definir logo de início alguns parâmetros essenciais, entre eles a classe de agressividade do ambiente na qual a estrutura, ou partes dela, estará inserida, o que lhe auxilia a definir os parâmetros do concreto a ser aplicado, como a resistência à compressão (f_{ck}), relação água/cimento máxima (a/c), e o cobrimento (c) das armaduras pelo concreto, conforme a NBR 6118, como apresentado a seguir.

3.1.1 Agressividade do Ambiente

Segundo a NBR 6118 (item 6.4.1), “A agressividade ambiental está relacionada às ações físicas e químicas que atuam sobre as estruturas de concreto, independentemente das ações mecânicas, das variações volumétricas de origem térmica, da retração hidráulica e outras previstas no dimensionamento das estruturas.”

“Nos projetos das estruturas correntes, a agressividade ambiental deve ser classificada de acordo com o apresentado na Tabela 6.1 e pode ser avaliada, simplificada, segundo as condições de exposição da estrutura ou de suas partes.” (item 6.4.2). A Tabela 6.1 da norma está apresentada na Tabela 3.1.

Tabela 3.1 - Classes de agressividade ambiental – CAA (NBR 6118, Tabela 6.1).

Classe de agressividade ambiental	Agressividade	Classificação geral do tipo de ambiente para efeito de projeto	Risco de deterioração da estrutura
I	Fraca	Rural	Insignificante
		Submerso	
II	Moderada	Urbano ^{1,2}	Pequeno
III	Forte	Marinho ¹	Grande
		Industrial ^{1,2}	
IV	Muito forte	Industrial ^{1,3}	Elevado
		Respingos de maré	

NOTAS: 1) Pode-se admitir um microclima com uma classe de agressividade mais branda (uma classe acima) para ambientes internos (salas, dormitórios, banheiros, cozinhas e áreas de serviço de apartamentos residenciais e conjuntos comerciais ou ambientes com concreto revestido com argamassa e pintura).
 2) Pode-se admitir uma classe de agressividade mais branda (uma classe acima) em obras em regiões de clima seco, com umidade média relativa do ar menor ou igual a 65 %, partes da estrutura protegidas de chuva em ambientes predominantemente secos ou regiões onde raramente chove.
 3) Ambientes quimicamente agressivos, tanques industriais, galvanoplastia, branqueamento em indústrias de celulose e papel, armazéns de fertilizantes, indústrias químicas, elementos em contato com solo contaminado ou água subterrânea contaminada.

“O responsável pelo projeto estrutural, de posse de dados relativos ao ambiente em que será construída a estrutura, pode considerar classificação mais agressiva que a estabelecida na Tabela 6.1.” (item 6.4.3).

3.1.2 Qualidade do Concreto de Cobrimento

Segundo a NBR 6118 (item 7.4), “[...] **a durabilidade das estruturas é altamente dependente das características do concreto e da espessura e qualidade do concreto do cobrimento da armadura.** Ensaios comprobatórios de desempenho da durabilidade da estrutura frente ao tipo e classe de agressividade prevista em projeto devem estabelecer os parâmetros mínimos a serem atendidos. Na falta destes e devido à existência de uma forte correspondência entre a relação água/cimento e a resistência à compressão do concreto e sua durabilidade, permite-se que sejam adotados simultaneamente os requisitos mínimos expressos na Tabela 7.1.”, aqui apresentada como Tabela 3.2.

Tabela 3.2 - Correspondência entre classe de agressividade ambiental e qualidade do Concreto Armado. (NBR 6118, Tabela 7.1).

Concreto ¹	Tipo ^{2,3}	Classe de agressividade ambiental (CAA)			
		I	II	III	IV
Relação água/cimento em massa	CA	$\leq 0,65$	$\leq 0,60$	$\leq 0,55$	$\leq 0,45$
	CP	$\leq 0,60$	$\leq 0,55$	$\leq 0,50$	$\leq 0,45$
Classe de concreto (NBR 8953)	CA	$\geq C20$	$\geq C25$	$\geq C30$	$\geq C40$
	CP	$\geq C25$	$\geq C30$	$\geq C35$	$\geq C40$

NOTAS: 1) O concreto empregado na execução das estruturas deve cumprir com os requisitos estabelecidos na NBR 12655.⁷⁴
 2) CA corresponde a componentes e elementos estruturais de Concreto Armado.
 3) CP corresponde a componentes e elementos estruturais de Concreto Protendido.

“O risco e a evolução da corrosão do aço na região das fissuras de flexão transversais à armadura principal dependem essencialmente da qualidade e da espessura do concreto de cobrimento da armadura. Aberturas características limites de fissuras na superfície do concreto, dadas em 13.4.2, em componentes ou elementos de concreto armado, são satisfatórias para as exigências de durabilidade.” (NBR 6118, item 7.6.1)

“A proteção das **armaduras ativas externas** deve ser garantida pela bainha, completada por graute, calda de cimento Portland sem adições ou graxa especialmente formulada para esse fim. Atenção especial deve ser dedicada à proteção contra corrosão das ancoragens das armaduras ativas.” (itens 7.4.5 e 7.4.6).

3.1.3 Espessura do Cobrimento da Armadura

Define-se **cobrimento** de armadura a espessura da camada de concreto responsável pela proteção da armadura num elemento. Essa camada inicia-se a partir da face mais externa da barra de aço e se estende até a superfície externa do elemento em contato com o meio ambiente. Em vigas e pilares é comum a espessura do cobrimento iniciar na face externa dos estribos da armadura transversal, como mostrado na Figura 3.1.

A NBR 6118 (item 7.4.7.1) define o **cobrimento mínimo** da armadura como “o menor valor que deve ser respeitado ao longo de todo o elemento considerado.” E no item 7.4.7.2: “Para garantir o cobrimento mínimo ($c_{\min}$), o projeto e a execução devem considerar o cobrimento nominal (c_{nom}), que é o cobrimento mínimo acrescido da tolerância de execução (Δc).”:

$$c_{\text{nom}} = c_{\min} + \Delta c \quad \text{Eq. 3.1}$$

⁷⁴ ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. Concreto de cimento Portland - Preparo, controle, recebimento e aceitação - Procedimento. NBR 12655, ABNT, 2015, 23p.

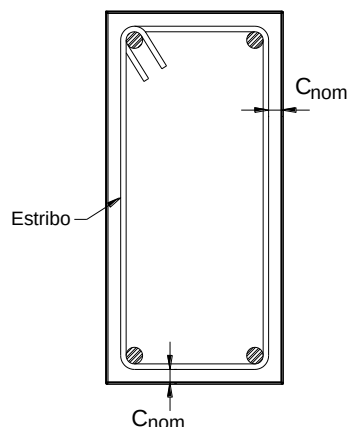


Figura 3.1 – Cobrimento da armadura.

As dimensões das armaduras e os espaçadores devem respeitar os cobrimentos nominais. “Nas obras correntes o valor de Δc deve ser maior ou igual a 10 mm.” (item 7.4.7.3). No entanto, “Para estruturas projetadas de acordo com a ABNT NBR 9062,⁷⁵ quando houver um controle adequado de qualidade e limites rígidos de tolerância da variabilidade das medidas durante a execução, pode ser adotado o valor $\Delta c = 5$ mm, mas a exigência de controle rigoroso deve ser explicitada nos desenhos de projeto. Permite-se, então, a redução dos cobrimentos nominais, conforme a Tabela 7.2, em 5 mm.” (item 7.4.7.4).

A NBR 6118 (itens 7.4.7.5) ainda estabelece que “O cobrimento nominal de uma determinada barra deve sempre ser:”

$$\begin{aligned} c_{\text{nom}} &\geq \phi_{\text{barra}} \\ c_{\text{nom}} &\geq \phi_{\text{feixe}} = \phi_n = \phi \sqrt{n} \\ c_{\text{nom}} &\geq 0,5 \phi_{\text{bainha}} \end{aligned} \quad \text{Eq. 3.2}$$

No item 7.4.7.6: “A dimensão máxima característica do agregado graúdo utilizado no concreto não pode superar em 20 % a espessura nominal do cobrimento, ou seja:”

$$d_{\text{máx}} \leq 1,2 c_{\text{nom}} \quad \text{Eq. 3.3}$$

A Tabela 3.3 (NBR 6118, item 7.4.7.2) apresenta valores de **cobrimento nominal** com tolerância de execução (Δc) de 10 mm, em função da classe de agressividade ambiental.

“**Para concretos de classe de resistência superior à mínima exigida, os cobrimentos definidos na Tabela 7.2 podem ser reduzidos em até 5 mm.**” (item 7.4.7.6). “No caso de elementos estruturais pré-fabricados, os valores relativos ao cobrimento das armaduras (Tabela 7.2) devem seguir o disposto na ABNT NBR 9062.” (item 7.4.7.7).

⁷⁵ ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *Projeto e execução de estruturas de concreto pré-moldado*. NBR 9062, ABNT, 2017, 86p.

Tabela 3.3 - Correspondência entre classe de agressividade ambiental e cobrimento nominal para $\Delta c = 10 \text{ mm}$ (NBR 6118, Tabela 7.2).

Tipo de estrutura	Componente ou elemento	Classe de agressividade ambiental (CAA)			
		I	II	III	IV ^c
		Cobrimento nominal (mm)			
Concreto Armado	Laje ^b	20	25	35	45
	Viga ^b /Pilar	25	30	40	50
	Elementos estruturais em contato com o solo ^d	30		40	50
Concreto Protendido ^a	Laje	25	30	40	50
	Viga/Pilar	30	35	45	55

Notas: “a) Cobrimento nominal da bainha ou dos fios, cabos e cordoalhas. O cobrimento da armadura passiva deve respeitar os cobrimentos para concreto armado.
b) Para a face superior de lajes e vigas que serão revestidas com argamassa de contrapiso, com revestimentos finais secos tipo carpete e madeira, com argamassa de revestimento e acabamento, como pisos de elevado desempenho, pisos cerâmicos, pisos asfálticos e outros, as exigências desta Tabela podem ser substituídas pelas de 7.4.7.5, respeitado um cobrimento nominal $\geq 15 \text{ mm}$.
c) Nas superfícies expostas a ambientes agressivos, como reservatórios, estações de tratamento de água e esgoto, condutos de esgoto, canaletas de efluentes e outras obras em ambientes química e intensamente agressivos, devem ser atendidos os cobrimentos da classe de agressividade IV.
d) No trecho dos pilares em contato com o solo junto aos elementos de fundação, a armadura deve ter cobrimento nominal $\geq 45 \text{ mm}$.”

3.2 Estados-Limites

Os Estados-Limites devem ser considerados no projeto das estruturas em Concreto Protendido, relativamente à verificação da segurança e das condições em serviço. Apresentam-se a seguir as definições dos Estados-Limites conforme descritos no item 3.2 da NBR 6118.

3.2.1 Estado-Limite Último (ELU)

O Estado-Limite Último é o “estado-limite relacionado ao colapso, ou a qualquer outra forma de ruína estrutural, que determine a paralisação do uso da estrutura.”⁷⁶

3.2.2 Estado-Limite de Serviço (ELS)

Os Estados-Limites de Serviço são definidos pela NBR 6118 (item 10.4) como “aqueles relacionados ao conforto do usuário e à durabilidade, aparência e boa utilização das estruturas, seja em relação aos usuários, seja em relação às máquinas e aos equipamentos suportados pelas estruturas. A segurança das estruturas de concreto pode exigir a verificação de alguns estados-limites de serviço definidos em 3.2. Em construções especiais pode ser necessário verificar a segurança em relação a outros estados-limites de serviço não definidos nesta Norma.”

Quando uma estrutura alcança um Estado-Limite de Serviço, a sua utilização pode ficar comprometida, mesmo que ainda não tenha esgotada sua capacidade resistente, ou seja, a estrutura pode não mais oferecer condições de conforto e durabilidade. Os Estados-Limites de Serviço definidos pela NBR 6118 (item 3.2) são:

a) **Estado-Limite de Formação de Fissuras (ELS-F):** “estado em que se inicia a formação de fissuras. Admite-se que este estado-limite é atingido quando a tensão de tração máxima na seção

⁷⁶ No item 10.3 a NBR 6118 apresenta os Estados-Limites Últimos que a segurança das estruturas de concreto deve sempre ser verificada.

transversal for igual a $f_{ct,f}$ (ver 13.4.2 e 17.3.4).”, onde $f_{ct,f}$ é a resistência do concreto à tração na flexão;

b) **Estado-Limite de Abertura das Fissuras (ELS-W):** “estado em que as fissuras se apresentam com aberturas iguais aos máximos especificados em 13.4.2 (ver 17.3.3).” No caso das estruturas de Concreto Protendido com *protensão parcial*, a abertura de fissura característica está limitada a 0,2 mm, a fim de não prejudicar a estética e a durabilidade;

c) **Estado-Limite de Deformações Excessivas (ELS-DEF):** “estado em que as deformações atingem os limites estabelecidos para a utilização normal, dados em 13.3 (ver 17.3.2).” Os elementos fletidos como as vigas e as lajes apresentam flechas em serviço. O cuidado que o projetista estrutural deve ter é de limitar as flechas aos valores aceitáveis da norma, que não prejudiquem a estética e causem insegurança aos usuários;

d) **Estado-Limite de Descompressão (ELS-D):** “estado no qual, em um ou mais pontos da seção transversal, a tensão normal é nula, não havendo tração no restante da seção. Verificação usual no caso do concreto protendido (ver 13.4.2).” Situação onde a seção comprimida pela protensão vai sendo descomprimida pela ação dos carregamentos externos, até atingir o ELS-D (Figura 3.2). Esta verificação deve ser feita no Estádio I (concreto não fissurado, comportamento elástico linear dos materiais), conforme o item 17.3.4 da NBR 6118.

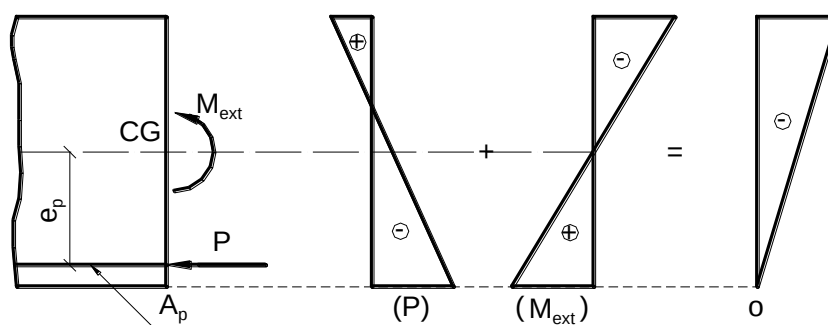


Figura 3.2 – Tensões normais devidas à força de protensão (P) e ao momento fletor externo (M_{ext}), com tensão nula em um ponto.

e) **Estado-Limite de Descompressão Parcial (ELS-DP):** “estado no qual garante-se a compressão na seção transversal, na região onde existem armaduras ativas. Essa região deve se estender até uma distância a_p da face mais próxima da cordoalha ou da bainha de protensão (ver Figura 3.1 e Tabela 13.4).” A Figura 3.3 ilustra a dimensão a_p , e conforme indicação contida na Tabela 13.4 da NBR 6118, a critério do projetista, o ELS-D pode ser substituído pelo ELS-DP com $a_p = 50$ mm.

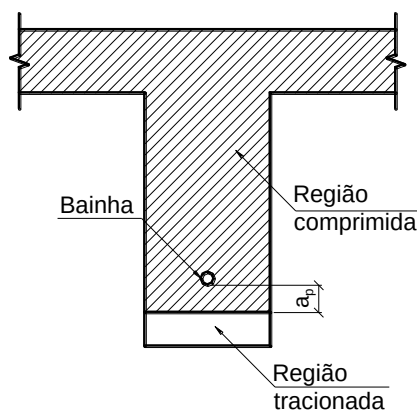


Figura 3.3 – Dimensão a_p no ELS-DP.

f) **Estado-Limite de Compressão Excessiva (ELS-CE):** “estado em que as tensões de compressão atingem o limite convencional estabelecido. Usual no caso do concreto protendido na ocasião da aplicação da protensão (ver 17.2.4.3.2.a).”

Quando o concreto é submetido a tensões de compressão inicia-se um processo de danificação progressiva, principalmente pelo crescimento de microfissuras a partir de falhas pré-existentes no concreto e na interface pasta-agregados. Processo este responsável pelo comportamento não linear do concreto e pelo efeito Rüsck. Sob tensões superiores a 50 % da resistência à compressão, acentua-se a microfissuração interna do concreto. Quando as tensões ficam acima de 70 % a microfissuração torna-se instável.^[4,12] Por isso que no projeto das peças protendidas em serviço é geralmente adotada a tensão de apenas 50 ou 60 % da resistência característica do concreto à compressão.

A NBR 6118 (item 17.2.4.3.2) fixa o limite de $0,7f_{ckj}$ (para $f_{ck} \leq 50$ MPa) para verificação simplificada no Estado-Limite Último no ato da protensão (corresponde ao instante da transferência da protensão para o concreto da peça).

g) **Estado-Limite de Vibrações Excessivas (ELS-VE):** “estado em que as vibrações atingem os limites estabelecidos para a utilização normal da construção (ver 23.3).” O projetista deverá limitar as vibrações de tal modo que não prejudiquem o conforto dos usuários na utilização das estruturas.

3.2.3 Domínios de Deformações

No item 17.2 a NBR 6118 estabelece critérios para a determinação dos esforços resistentes das seções de vigas, pilares e tirantes, submetidas à força normal e momentos fletores.⁷⁷ Dentre as hipóteses básicas admitidas na análise dos esforços resistentes está que o “*estado-limite último é caracterizado quando a distribuição das deformações na seção transversal pertencer a um dos domínios ...*” Os domínios, em número de oito, mostrados na Figura 3.4, são representações da distribuição de deformações que ocorrem nas seções transversais de vigas, pilares e tirantes, quando submetidos a tensões normais. As deformações são de alongamento e de encurtamento, oriundas de tensões normais de tração e de compressão, respectivamente.

As possíveis formas de ruptura convencional podem ocorrer por deformação plástica da armadura sob tensões de tração (reta a e domínios 1 ou 2), ou pelo encurtamento limite do concreto (reta b e domínios 3, 4, 4a ou 5).

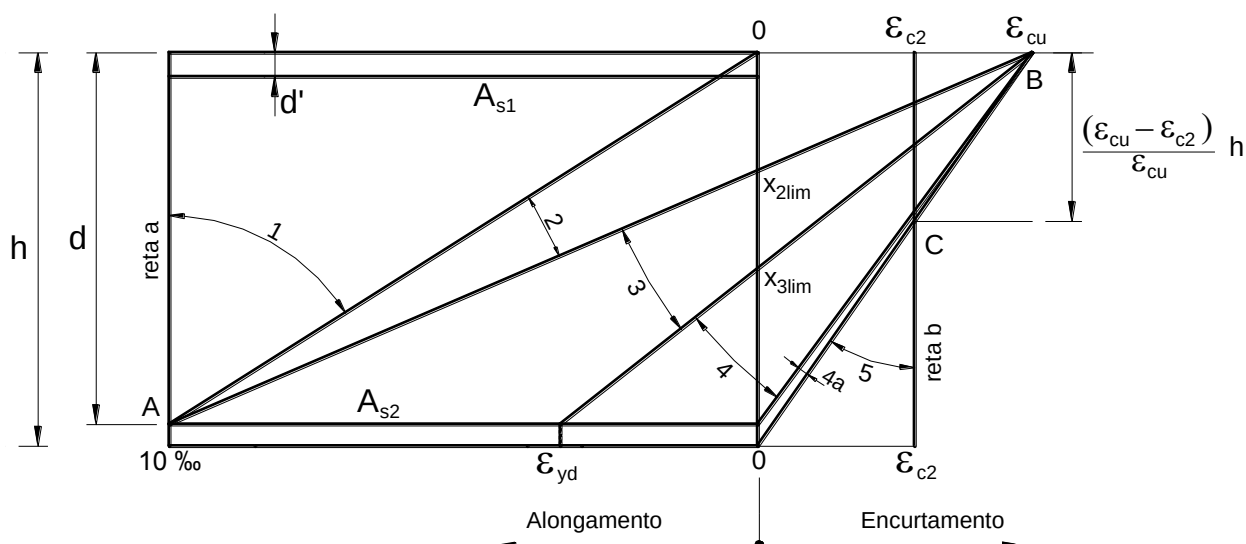


Figura 3.4 – Diagramas possíveis dos domínios de deformações.

⁷⁷ **Solicitação normal** é definida como os esforços solicitantes que produzem tensões normais nas seções transversais das peças. Os esforços podem ser o momento fletor e a força normal.

As deformações limites (ou últimas) são de 3,5 ‰ para o encurtamento no concreto comprimido para os concretos do Grupo I de resistência ($f_{ck} \leq 50$ MPa) e 10 ‰ para o alongamento na armadura tracionada, e como são valores últimos diz-se que os diagramas de deformações correspondem ao Estado-Limite Último.⁷⁸

O desenho dos diagramas de domínios pode ser entendido como uma peça sendo visualizada em vista ou elevação, constituída com duas armaduras longitudinais próximas às faces superior e inferior da peça (A_{s1} e A_{s2}). A posição da linha neutra é dada pelo valor de x , contado a partir da fibra mais comprimida (se a seção transversal estiver inteiramente ou parcialmente comprimida) ou menos tracionada da peça (se a seção transversal estiver inteiramente tracionada). No caso específico da Figura 3.4, x é contado a partir da face superior. Em função dos vários domínios, a linha neutra estará compreendida no intervalo entre $-\infty$ (lado superior no desenho da Figura 3.4) e $+\infty$ (lado inferior do desenho). Quando $0 \leq x \leq h$, a linha neutra estará posicionada nas faces ou dentro da seção transversal. As características da cada um dos oito domínios são descritas a seguir.

3.2.3.1 Reta a

O caso de solicitação da **reta a** é a tração uniforme (tração simples ou tração axial), com a força normal de tração aplicada no centro de gravidade da seção transversal (Figura 3.5). A linha neutra (LN) encontra-se no infinito ($x = -\infty$), e todos os pontos da seção transversal, inclusive as armaduras (A_{s1} e A_{s2}), estão com deformação de alongamento igual à máxima permitida ($\epsilon_{s1} = \epsilon_{s2} = 10$ ‰), o que significa que as duas armaduras estão com tensão de tração igual à de início de escoamento do aço de armadura passiva (f_{yd}). A tensão f_{yd} é a máxima permitida e proporciona o dimensionamento mais econômico, como mostrado na Figura 3.6. Como exemplo de **reta a** tem-se o tirante.

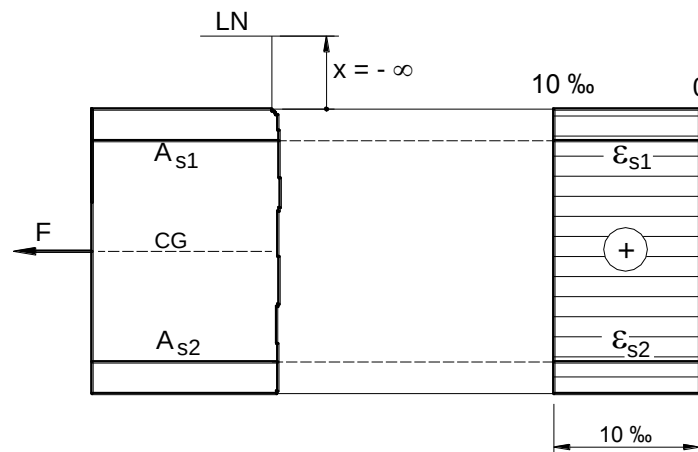


Figura 3.5 – Tração uniforme representativa do domínio reta a.

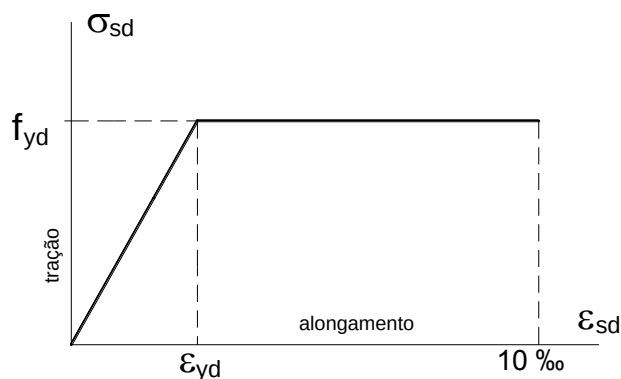


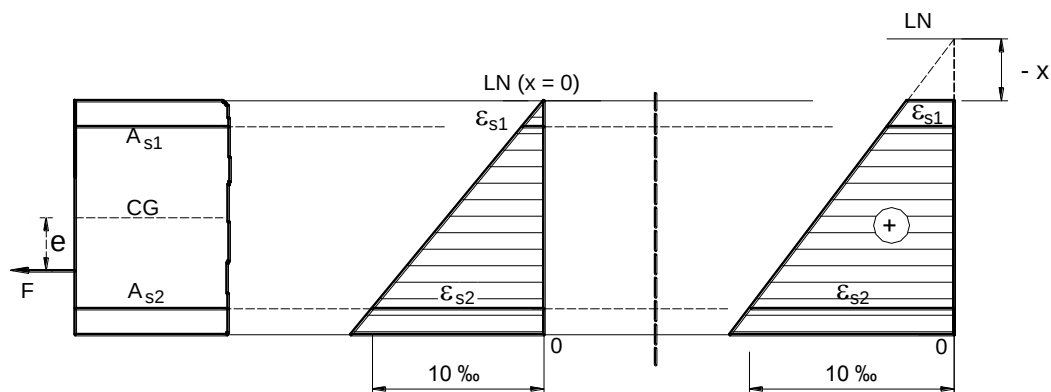
Figura 3.6 – Diagrama tensão – deformação do aço de armadura passiva.

⁷⁸ Os diagramas são válidos para todos os elementos estruturais submetidos a solicitações normais, como a tração e a compressão uniformes e as flexões simples e compostas.

3.2.3.2 Domínio 1

O **domínio 1** ocorre quando a força normal de tração não está aplicada no centro de gravidade da seção transversal (CG), isto é, existe uma excentricidade da força normal em relação ao centro de gravidade (Figura 3.7). A solicitação é de tração não uniforme que também se diz tração com pequena excentricidade. A seção está inteiramente tracionada, embora com deformações diferentes ao longo da altura da seção.

A deformação de alongamento na armadura mais tracionada (ϵ_{s2}) é fixa e de valor 10 ‰. A linha neutra é externa à seção transversal, com x tendo um valor negativo (Figura 3.7b) e variando no intervalo $-\infty < x < 0$. Com $x = 0$ a seção está no limite entre os domínios 1 e 2 (Figura 3.7a). A capacidade resistente da seção é proporcionada apenas pelas armaduras, pois o concreto encontra-se inteiramente tracionado. O tirante é o elemento estrutural deste domínio.



a) linha neutra com $x = 0$; b) linha neutra com $-x$.
Figura 3.7 – Tração não uniforme no domínio 1.

3.2.3.3 Domínio 2

No **domínio 2** ocorrem os casos de solicitação de flexão simples e tração ou compressão com grande excentricidade (Figura 3.8). A seção transversal tem parte tracionada e parte comprimida e o Estado-Limite Último é caracterizado pela deformação de alongamento fixa em 10 ‰ na armadura tracionada ($\epsilon_{s2} = 10 \text{ ‰}$). Em função da posição da linha neutra, que pode variar de zero a x_{2lim} ($0 < x < x_{2lim}$), a deformação de encurtamento na fibra mais comprimida varia de zero até ϵ_{cu} . No limite entre os domínios 2 e 3, com $x = x_{2lim}$, as deformações são os valores últimos, 10 ‰ na armadura tracionada e ϵ_{cu} no concreto da borda comprimida.

Como $\epsilon_{s2} = 10 \text{ ‰}$, a tensão na armadura tracionada é igual à máxima permitida (f_{yd} - Figura 3.6). Por outro lado, o concreto comprimido tem folga, pois $\epsilon_{cd} < \epsilon_{cu}$.

O domínio 2 pode ser subdividido em 2a e 2b em função da deformação de encurtamento na borda comprimida. No domínio 2a considera-se a deformação variando de zero a ϵ_{c2} e no domínio 2b de ϵ_{c2} a ϵ_{cu} .

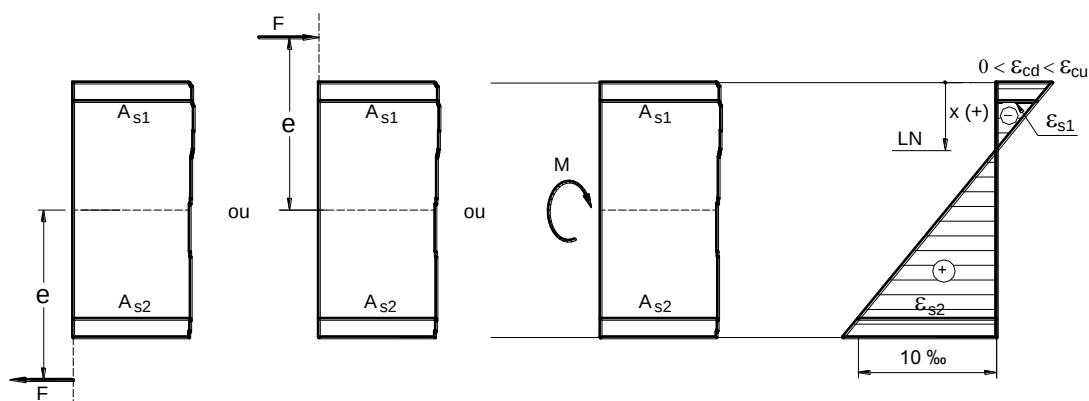


Figura 3.8 – Casos de solicitação e diagrama genérico de deformações do domínio 2.

3.2.3.4 Domínio 3

Os casos de solicitação do **domínio 3** são os mesmos do domínio 2, ou seja, flexão simples e tração ou compressão com grande excentricidade (Figura 3.9). A seção transversal tem parte tracionada e parte comprimida e o Estado-Limite Último é caracterizado pela deformação de encurtamento fixa em ϵ_{cu} no concreto da borda comprimida. A deformação de alongamento na armadura tracionada (ϵ_{s2}) varia da deformação de início de escoamento do aço (ϵ_{yd}) até o valor máximo de 10 ‰ ($\epsilon_{yd} < \epsilon_{s2} < 10 \text{ ‰}$), o que significa que na situação última a ruptura do concreto comprimido ocorre simultaneamente com o escoamento da armadura tracionada. A tensão na armadura tracionada é igual à máxima permitida (f_{yd} - Figura 3.6). A posição da linha neutra varia entre x_{2lim} e x_{3lim} ($x_{2lim} < x < x_{3lim}$).

A armadura comprimida (A_{s1}), por estar próxima à borda comprimida, tem deformação de encurtamento pouco menor que ϵ_{cu} .

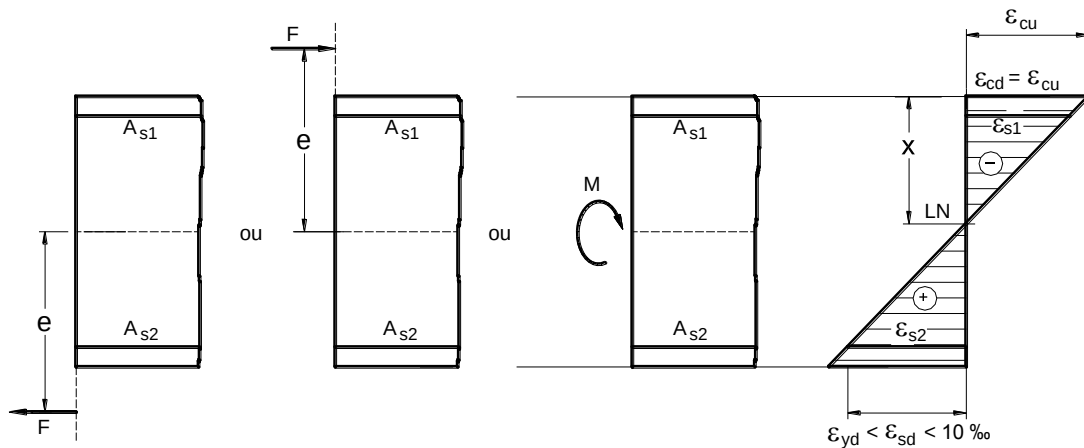


Figura 3.9 – Casos de solicitação e diagrama genérico de deformações do domínio 3.

3.2.3.5 Domínio 4

No **domínio 4** os casos de solicitação são a flexão simples e a compressão com grande excentricidade (Figura 3.10). A seção transversal tem parte tracionada e parte comprimida e o Estado-Limite Último é caracterizado pela deformação de encurtamento fixa em ϵ_{cu} no concreto da borda comprimida. A deformação de alongamento na armadura tracionada (ϵ_{s2}) varia de zero até a deformação de início de escoamento do aço ($0 < \epsilon_{s2} < \epsilon_{yd}$), o que significa que a tensão na armadura é menor que a máxima permitida (f_{yd} - Figura 3.6). A posição da linha neutra varia entre x_{3lim} e a altura útil d ($x_{3lim} < x < d$).

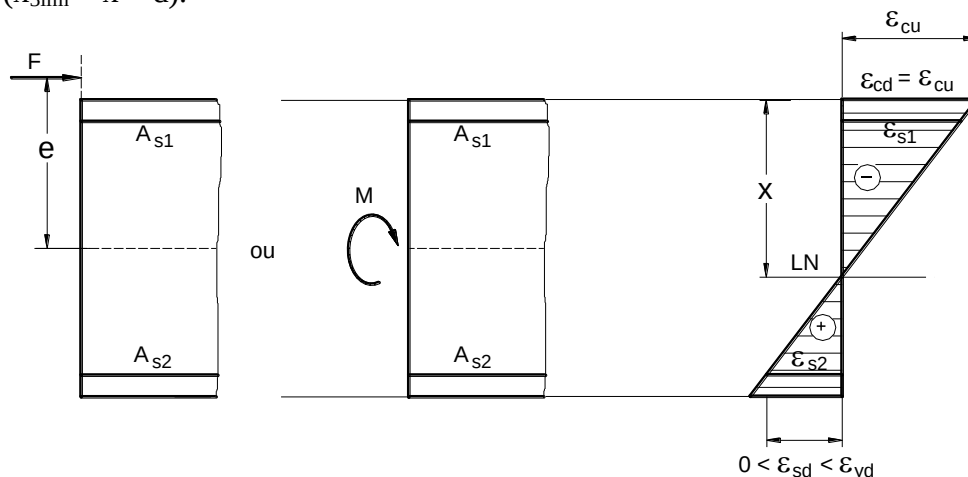


Figura 3.10 – Casos de solicitação e diagrama genérico de deformações do domínio 4.

3.2.3.6 Domínio 4a

No **domínio 4a** a solicitação é a compressão com pequena excentricidade (Figura 3.11). A seção transversal tem a maior parte comprimida e apenas uma pequena parte tracionada, e o Estado-Limite Último é caracterizado pela deformação de encurtamento fixa em ϵ_{cu} no concreto da borda comprimida. A linha neutra varia entre d e h e passa na região de cobrimento da armadura menos comprimida ($d < x < h$). Ambas as armaduras encontram-se comprimidas, embora a armadura próxima à linha neutra tenha tensão muito pequena.

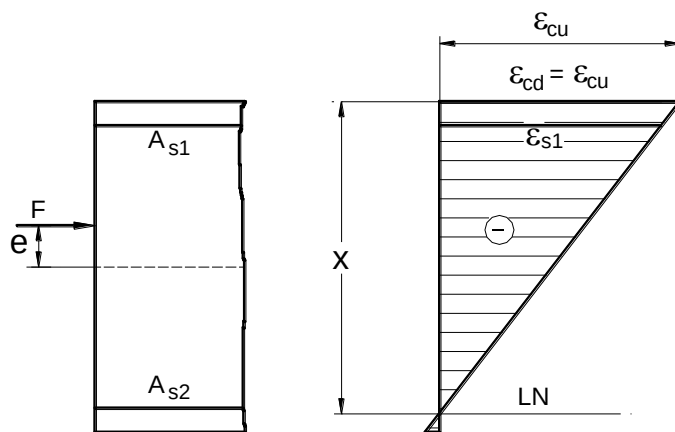
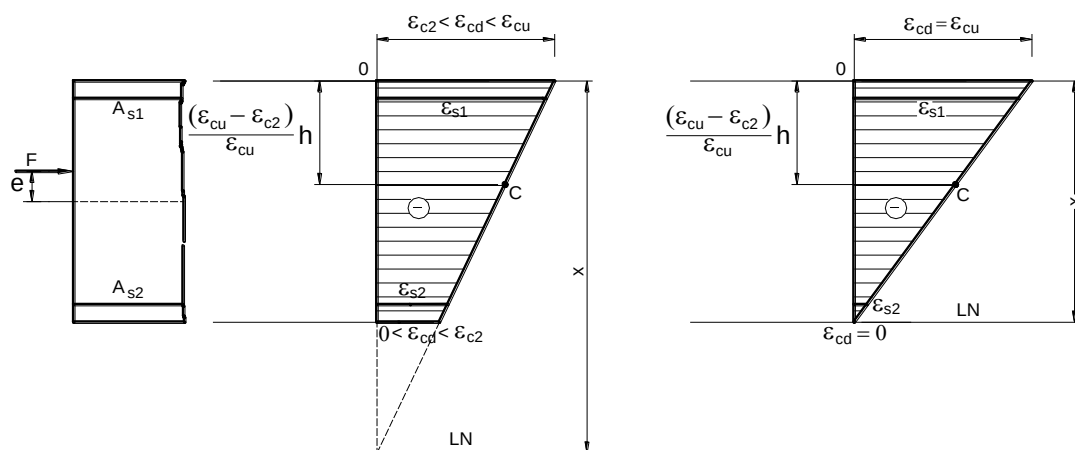


Figura 3.11 – Solicitação e diagrama genérico de deformações do domínio 4a.

3.2.3.7 Domínio 5

A solicitação é a compressão não uniforme ou compressão com pequena excentricidade (Figura 3.12). A linha neutra não corta a seção transversal e varia de h até $+\infty$. A seção está inteiramente comprimida, bem como as armaduras ϵ_{s1} e ϵ_{s2} . O que caracteriza o domínio 5 é o ponto C, e a linha inclinada do diagrama de deformações passa sempre por este ponto. A deformação de encurtamento na borda mais comprimida varia de ϵ_{c2} a ϵ_{cu} e na borda menos comprimida varia de zero a ϵ_{c2} , em função da posição da linha neutra.



a) linha neutra com $x > h$; b) linha neutra com $x = h$.
Figura 3.12 – Compressão não uniforme no domínio 5.

3.2.3.8 Reta b

A solicitação é a compressão uniforme (compressão simples ou compressão axial), com a força normal de compressão aplicada no centro de gravidade da seção transversal (Figura 3.13). A linha neutra encontra-se no $+\infty$, e todos os pontos da seção transversal estão com deformação de encurtamento igual a 2 ‰. As duas armaduras, portanto, estão sob a mesma deformação (ϵ_{c2}) e a mesma tensão de compressão (σ_{sd}).

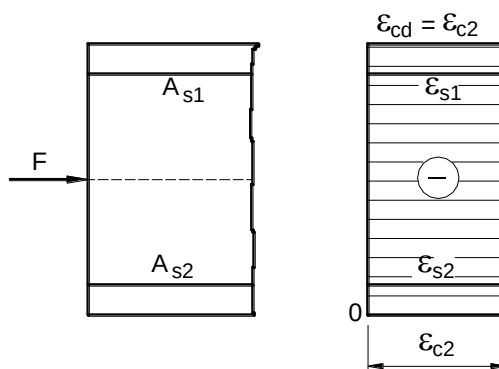


Figura 3.13 – Compressão uniforme na reta b.

3.3 Ações nas Estruturas

Neste item são estudados os tipos de ações que atuam nas estruturas de concreto, que originam os esforços solicitantes. O texto toma como base o item 11 – Ações, da NBR 6118, bem como também a NBR 8681.^{[16]79}

Conforme a NBR 8681, as **ações** são definidas como as “*causas que provocam o aparecimento de esforços ou deformações nas estruturas. Do ponto de vista prático, as forças e as deformações impostas pelas ações são consideradas como se fossem as próprias ações. As deformações impostas são por vezes designadas por ações indiretas e as forças, por ações diretas.*”⁸⁰ **Deformações impostas** são aquelas oriundas de variações de temperatura na estrutura, retração e fluência do concreto, recalques de apoio, etc.

Segundo a NBR 6118 (item 11.2.1): “*Na análise estrutural deve ser considerada a influência de todas as ações que possam produzir efeitos significativos para a segurança da estrutura em exame, levando-se em conta os possíveis estados-limites últimos e os de serviço.*”

Conforme a NBR 8681, as ações a considerar classificam-se em: **permanentes, variáveis e excepcionais**. “*Para cada tipo de construção, as ações a considerar devem respeitar suas peculiaridades e as normas a ela aplicáveis.*” Portanto, no projeto das estruturas, bem como dos elementos estruturais, devem ser consideradas todas ações possíveis de ocorrência, desde o início da construção até o final da vida útil, provenientes de diferentes origens ou causas. Além das permanentes (peso próprio, paredes, lajes, etc.) e variáveis de utilização, devem ser consideradas as provenientes do vento, de possíveis tremores de terra, pressão do solo, água ou de outros líquidos, forças de impacto e explosões, aquelas que podem ocorrer durante a construção, as deformações provenientes da retração e fluência no concreto, deformações por variação de temperatura, recalques de apoio e movimentações das fundações, de incêndios, carregamentos dinâmicos, etc., bem como as forças de protensão no caso de peças protendidas.

3.3.1 Ações Permanentes

“**Ações permanentes** são as que ocorrem com valores praticamente constantes durante toda a vida da construção.” (NBR 6118, item 11.3.1), e recebem o símbolo G (ou comumente também g). Ou seja, são aquelas que atuam permanentemente ao longo do tempo, e além do peso próprio dos elementos, devem ser incluídos o peso de elementos construtivos fixos, como paredes, e instalações permanentes. “*Também são consideradas permanentes as ações que crescem no tempo, tendendo a um valor-limite constante. As ações permanentes devem ser consideradas com seus valores representativos mais desfavoráveis para a segurança.*” As **ações permanentes** são divididas em diretas e indiretas.

⁷⁹ ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *Ações e segurança nas estruturas – Procedimento*. NBR 8681, ABNT, 2003, 28p. O estudante deve ver as duas normas durante o estudo do texto aqui contido sobre Ações.

⁸⁰ Na norma Eurocode 1, **ação** significa qualquer efeito que influencia o desempenho de uma estrutura, e combinações adequadas de ações são especificadas para verificar a estrutura em cada Estado-Limite. EUROPEAN COMMITTEE STANDARDIZATION. *Eurocode 1 – Actions on structures, Part 1-1: General actions – Densities, self-weight, imposed loads on buildings*. 2002.

3.3.1.1 Diretas

“As **ações permanentes diretas** são constituídas pelo peso próprio da estrutura, pelos pesos dos elementos construtivos fixos, das instalações permanentes e dos empuxos permanentes.” (11.3.2), os seja, as cargas impostas sobre a estrutura pelos componentes estruturais e não estruturais. Como **instalações permanentes** pode-se entender os elementos, equipamentos, dispositivos, etc., que não são geralmente movimentados na construção, como equipamentos ou máquinas de grande porte, estruturas de prateleiras de grande porte, etc.

Peso Próprio

Nas construções correntes admite-se que o peso próprio da estrutura seja avaliado considerando-se a **massa específica** para o Concreto Simples de 2.400 kg/m^3 e 2.500 kg/m^3 para o Concreto Armado, conforme apresentado no item 8.2.2 da NBR 6118. *Concretos especiais* devem ter sua massa específica determinada experimentalmente em cada caso particular (ver NBR 12655)⁸¹, acrescentando-se de 100 a 150 kg/m^3 referentes à armadura.

Peso dos Elementos Construtivos Fixos e de Instalações Permanentes

As **massas específicas** dos materiais de construção correntes podem ser avaliadas com base nos valores indicados na Tabela 1 da NBR 6120.⁸² “Os pesos das instalações permanentes são considerados com os valores nominais indicados pelos respectivos fornecedores.” (NBR 6118, item 11.3.2.2).

Empuxos Permanentes

“Consideram-se permanentes os empuxos de terra e outros materiais granulosos quando forem admitidos como não removíveis. Consideram-se representativos os valores característicos $F_{k,sup}$ ou $F_{k,inf}$, conforme a ABNT NBR 8681. O empuxo deve ser considerado conforme as ABNT NBR 6120, ABNT NBR 8681 e ABNT NBR 6122.” (NBR 6118, item 11.3.2.3).

3.3.1.2 Indiretas

“As **ações permanentes indiretas** são constituídas pelas deformações impostas por retração e fluência do concreto, deslocamentos de apoio, imperfeições geométricas e protensão.” (NBR 6118, item 11.3.3).⁸³

Retração do Concreto

No anexo A da NBR 6118 encontram-se os processos simplificados para a consideração dos esforços adicionais provocados pela retração do concreto, e aqui estão apresentados no item 5.5.3.

Conforme a NBR 6118 (11.3.3.1), “Na grande maioria dos casos, permite-se que a retração seja calculada simplificada através da Tabela 8.1, por interpolação. Essa Tabela fornece o valor característico superior da deformação específica de retração entre os instantes t_0 e t_∞ , $\varepsilon_{cs}(t_\infty, t_0)$, em algumas situações usuais (ver Seção 8). Nos casos correntes das obras de concreto armado, em função da restrição à retração do concreto, imposta pela armadura, satisfazendo o mínimo especificado nesta Norma, o valor de $\varepsilon_{cs}(t_\infty, t_0)$ pode ser adotado igual a -15×10^{-5} . Esse valor é válido para elementos estruturais de dimensões usuais, entre 10 cm e 100 cm, sujeitos a umidade

⁸¹ ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *Concreto de cimento Portland - Preparo, controle, recebimento e aceitação – Procedimento*. NBR 12655, ABNT, 2015, 23p.

⁸² ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *Cargas para o cálculo de estruturas de edificações*, NBR 6120. ABNT, 2019, 61p.

⁸³ Deslocamentos de apoio e imperfeições geométricas não estão aqui apresentados.

ambiente não inferior a 75 %. O valor característico inferior da retração do concreto é considerado nulo.

Nos elementos estruturais permanentemente submetidos a diferentes condições de umidade em faces opostas, admite-se variação linear da retração ao longo da espessura do elemento estrutural entre os dois valores correspondentes a cada uma das faces.

As deformações impostas uniformes nas peças, como aquelas decorrentes de retração, bem como temperatura e fluência do concreto, devem ser verificadas. Os efeitos devidos a essas deformações podem ser minimizadas pela criação de juntas de concretagem ou de dilatação. A consideração de deformações impostas diferenciais dentro da mesma peça, decorrentes, por exemplo, de partes com espessuras muito diferentes, devem ser sempre consideradas.”

Fluência do Concreto

No anexo A da NBR 6118 encontram-se os processos simplificados para a consideração dos esforços adicionais provocados pela fluência do concreto, e aqui estão apresentados no item 5.5.3.

Conforme a NBR 6118 (11.3.3.2), “Nos casos em que a tensão $\sigma_c(t_0)$ não varia significativamente, permite-se que essas deformações sejam calculadas simplificadaamente pela expressão:

$$\varepsilon_c(t_\infty, t_0) = \sigma_c(t_0) \left[\frac{1}{E_c(t_0)} + \frac{\varphi(t_\infty, t_0)}{E_c(28)} \right] \quad \text{Eq. 3.4}$$

$\varepsilon_c(t_\infty, t_0)$ é a deformação específica total do concreto entre os instantes t_0 e t_∞ ;

$\sigma_c(t_0)$ é a tensão no concreto devida ao carregamento aplicado em t_0 ;

$\varphi(t_\infty, t_0)$ é o limite para o qual tende o coeficiente de fluência provocado por carregamento aplicado em t_0 .

O valor de $\varphi(t_\infty, t_0)$ pode ser calculado por interpolação dos valores da Tabela 8.1. Essa Tabela fornece o valor característico superior de $\varphi(t_\infty, t_0)$ em algumas situações usuais (ver Seção 8). O valor característico **inferior** de $\varphi(t_\infty, t_0)$ é considerado nulo.”

Protensão

Conforme a NBR 6118 (11.3.3.5), “A ação da protensão deve ser considerada em todas as estruturas protendidas, incluindo, além dos elementos protendidos propriamente ditos, aqueles que sofrem a ação indireta da protensão, isto é, de esforços hiperestáticos de protensão.

O valor da força de protensão deve ser calculado considerando a força inicial e as perdas de protensão conforme estabelecido em 9.6.3.

Os esforços solicitantes gerados pela ação dessa protensão podem ser calculados diretamente a partir da excentricidade do cabo na seção transversal do elemento estrutural e da força de protensão ou através de um conjunto de cargas externas equivalentes, ou ainda através da introdução de deformações impostas correspondentes ao pré-alongamento das armaduras.”

3.3.2 Ações Variáveis

Como o próprio termo indica, **ações variáveis** são aquelas que “apresentam variações significativas em torno de sua média, durante a vida da construção”. (NBR 8681, item 3.6), e recebem a letra Q (ou comumente também o **q**). São exemplos comuns as cargas que são aplicadas sobre as lajes dos pavimentos e as forças do vento. Do mesmo modo como as ações permanentes, as **ações variáveis** são também classificadas em diretas e indiretas.

3.3.2.1 Diretas

“As **ações variáveis diretas** são constituídas pelas cargas previstas para a utilização da edificação e pela ação do vento e da água (quando for considerada variável direta), devendo-se atender às Normas específicas.” (NBR 6118, item 11.4.1). **Cargas acidentais** são definidas na NBR 8681 (item 3.8) como as “ações variáveis que atuam nas construções em função de seu uso (pessoas, mobiliário, veículos, materiais diversos, etc.).” Além da própria NBR 8681 devem também ser consultadas as normas NBR 6120 e NBR 6123.⁸⁴ Na Tabela 2 da NBR 6120 constam os valores mínimos a serem considerados para as cargas de utilização das edificações.

Cargas Previstas para a Utilização da Edificação

“Essas cargas correspondem normalmente a:

- a) cargas verticais de utilização da edificação;
- b) cargas móveis, considerando o impacto vertical;⁸⁵
- c) impacto lateral;⁸⁶
- d) força longitudinal de frenação ou aceleração;⁸⁷
- e) força centrífuga.

Essas cargas devem ser dispostas nas **posições mais desfavoráveis** para o elemento estudado, ressalvadas as simplificações permitidas por Normas Brasileiras específicas.” (NBR 6118, item 11.4.1.1).

Ação do Vento

“Os esforços solicitantes relativos à **ação do vento** devem ser considerados e recomenda-se que sejam determinados de acordo com o prescrito pela ABNT NBR 6123, permitindo-se o emprego de regras simplificadas previstas em Normas Brasileiras específicas.” (NBR 6118, item 11.4.1.2). Do texto da norma acima pode-se concluir que os esforços nas estruturas devidos ao vento devem ser sempre considerados, independentemente do tipo, das dimensões e da altura da construção. A NBR 6123 não prevê regras simplificadas para a consideração do vento em edifícios de concreto.⁸⁸

Ação da Água

“O nível d'água adotado para cálculo de reservatórios, tanques, decantadores e outros deve ser igual ao máximo possível compatível com o sistema de extravasão, considerando apenas o coeficiente $\gamma_f = \gamma_{f3} = 1,2$, conforme ABNT NBR 8681 (ver 11.7 e 11.8). Nas estruturas em que a água de chuva possa ficar retida deve ser considerada a presença de uma lâmina de água correspondente ao nível da drenagem efetivamente garantida pela construção.” (NBR 6118, item 11.4.1.3).

Ações Variáveis Durante a Construção

“As estruturas em que todas as fases construtivas não tenham sua segurança garantida pela verificação da obra pronta devem ter incluídas no projeto as verificações das fases construtivas mais significativas e sua influência na fase final. A verificação de cada uma dessas fases deve ser feita considerando a parte da estrutura já executada e as estruturas provisórias auxiliares com seus

⁸⁴ ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *Forças devidas ao vento em edificações*. NBR 6123, ABNT, 1988 (2013, versão corrigida), 66p.

⁸⁵ Como cargas de veículos, pontes rolantes, pessoas pulando ou dançando em arquibancadas, academias, etc.

⁸⁶ De veículos em pilares de garagens de edifícios, por exemplo.

⁸⁷ De veículos, pontes rolantes, pontes rodoviárias e ferroviárias, etc.

⁸⁸ No estágio atual de desenvolvimento do projeto das estruturas de concreto, a ação do vento é facilmente considerada vias os programas computacionais existentes no país.

respectivos pesos próprios. Além disso, devem ser consideradas as cargas acidentais de execução.” (NBR 6118, item 11.4.1.4).

3.3.2.2 Indiretas

Variações Uniformes de Temperatura

“A **variação da temperatura** da estrutura, causada globalmente pela variação da temperatura da atmosfera e pela insolação direta, é considerada uniforme. Ela depende do local de implantação da construção e das dimensões dos elementos estruturais que a compõem. De maneira genérica podem ser adotados os seguintes valores:

- a) para elementos estruturais cuja menor dimensão não seja superior a 50 cm, deve ser considerada uma oscilação de temperatura em torno da média de 10 °C a 15 °C;
- b) para elementos estruturais maciços ou ocos, com os espaços vazios inteiramente fechados, cuja menor dimensão seja superior a 70 cm, admite-se que essa oscilação seja reduzida respectivamente para 5 °C a 10 °C;
- c) para elementos estruturais cuja menor dimensão esteja entre 50 cm e 70 cm, admite-se que seja feita uma interpolação linear entre os valores acima indicados.

A escolha de um valor entre esses dois limites pode ser feita considerando-se 50 % da diferença entre as temperaturas médias de verão e inverno, no local da obra. Em edifícios de vários andares devem ser respeitadas as exigências construtivas prescritas por esta Norma, para que sejam minimizados os efeitos das variações de temperatura sobre a estrutura da construção.” (NBR 6118, item 11.4.2.1).

Variações não Uniformes de Temperatura

“Nos elementos estruturais em que a temperatura possa ter distribuição significativamente diferente da uniforme, devem ser considerados os efeitos dessa distribuição. Na falta de dados mais precisos, pode ser admitida uma variação linear entre os valores de temperatura adotados, desde que a variação de temperatura considerada entre uma face e outra da estrutura não seja inferior a 5 °C.” (NBR 6118, item 11.4.2.2).

Ações Dinâmicas

“Quando a estrutura, pelas suas condições de uso, está sujeita a **choques ou vibrações**, os respectivos efeitos devem ser considerados na determinação das solicitações e a possibilidade de fadiga deve ser considerada no dimensionamento dos elementos estruturais, de acordo com a Seção 23.” (NBR 6118, item 11.4.2.3).

3.3.3 Ações Excepcionais

“No projeto de estruturas sujeitas a **situações excepcionais** de carregamento, cujos efeitos não possam ser controlados por outros meios, devem ser consideradas **ações excepcionais** com os valores definidos, em cada caso particular, por Normas Brasileiras específicas.” (NBR 6118, item 11.5).

A NBR 8681 (itens 3.7 e 4.2.1.3) define **ações excepcionais** como “as que tem duração extremamente curta e muito baixa probabilidade de ocorrência durante a vida da construção, mas que devem ser consideradas nos projetos de determinadas estruturas. Consideram-se como excepcionais as ações decorrentes de causas tais como explosões, choques de veículos, incêndios, enchentes ou sismos excepcionais. Os incêndios, ao invés de serem tratados como causa de ações excepcionais, também podem ser levados em conta por meio de uma redução da resistência dos materiais constitutivos da estrutura.”

3.3.4 Valores das Ações

3.3.4.1 Valores Característicos

Os **valores característicos** F_k das ações são estabelecidos a seguir em função da variabilidade de suas intensidades.

Ações Permanentes

“Para as **ações permanentes**, os valores característicos devem ser adotados iguais aos valores médios das respectivas distribuições de probabilidade, sejam valores característicos superiores ou inferiores.” (NBR 6118, item 11.6.1.1). Os valores encontram-se definidos na NBR 6118 e NBR 6120. **Valores característicos superiores** são os que correspondem ao quantil de 95 % da distribuição de probabilidades e **valores característicos inferiores** são os que correspondem ao quantil de 5 % da distribuição de probabilidades.

Ações Variáveis

“Os valores característicos das **ações variáveis**, F_{qk} , estabelecidos por consenso e indicados em Normas Brasileiras específicas, correspondem a valores que tem de 25 % a 35 % de probabilidade de serem ultrapassados no sentido desfavorável, durante um período de 50 anos, o que significa que o valor característico F_{qk} é o valor com período médio de retorno de 174 anos a 117 anos, respectivamente.” (NBR 6118, item 11.6.1.2). Os valores encontram-se definidos nas normas NBR 6118 e NBR 6120.

3.3.4.2 Valores Representativos

Conforme a NBR 6118 (item 11.6.2), “As ações são quantificadas por seus **valores representativos**, que podem ser:

- a) os valores característicos conforme definido em 11.6.1;
- b) valores convencionais excepcionais, que são os valores arbitrados para as ações excepcionais;
- c) valores reduzidos, em função da combinação de ações, tais como:

- **verificações de estados-limites últimos**, quando a ação considerada combina com a ação principal. Os valores reduzidos são determinados a partir dos valores característicos pela expressão $\psi_0 F_k$, que considera muito baixa a probabilidade de ocorrência simultânea dos valores característicos de duas ou mais **ações variáveis** de naturezas diferentes (ver 11.7);

- **verificações de estados-limites de serviço**. Estes valores reduzidos são determinados a partir dos valores característicos pelas expressões $\psi_1 F_k$ e $\psi_2 F_k$, que estimam valores frequentes e quase permanentes, respectivamente, de uma ação que acompanha a ação principal.”

Assim, quando diferentes tipos de **ações variáveis** atuam simultaneamente, são combinadas e reduzidas por fatores de combinação (ψ_0 , ψ_1 e ψ_2), e conforme a definição da NBR 6118 (11.1):

ψ_{0j} = fator de redução de combinação para as **ações variáveis diretas** (ver item 3.3.2.1);

ψ_{0e} = fator de redução de combinação para as **ações variáveis indiretas** (ver item 3.3.2.2);

ψ_0 = fator de redução de combinação para ELU;

ψ_1 = fator de redução de **combinação frequente** para ELS;

ψ_2 = fator de redução de **combinação quase permanente** para ELS.

3.3.4.3 Valores de Cálculo

“Os valores de cálculo F_d das ações são obtidos a partir dos valores representativos, multiplicando-os pelos respectivos coeficientes de ponderação γ_f definidos em 11.7.” (NBR 6118 (11.6.3))⁸⁹

3.3.5 Combinações de Ações

“Um carregamento é definido pela **combinação das ações** que têm probabilidades não desprezíveis de atuarem simultaneamente sobre a estrutura, durante um período preestabelecido. A **combinação das ações** deve ser feita de forma que possam ser determinados os efeitos mais desfavoráveis para a estrutura; a **verificação da segurança** em relação aos estados-limites últimos e aos estados-limites de serviço deve ser realizada em função de **combinações últimas** e de **combinações de serviço**, respectivamente.” (NBR 6118, item 11.8.1).

3.3.5.1 Combinações Últimas

“Uma **combinação última** pode ser classificada como normal, especial ou de construção e excepcional.” (NBR 6118, item 11.8.2).

Normais

“Em cada combinação devem estar incluídas as ações permanentes e a ação variável principal, com seus valores característicos e as demais ações variáveis, consideradas secundárias, com seus valores reduzidos de combinação, conforme ABNT NBR 8681.”

Especiais ou de Construção

“Em cada combinação devem estar presentes as ações permanentes e a ação variável especial, quando existir, com seus valores característicos e as demais ações variáveis com probabilidade não desprezível, de ocorrência simultânea, com seus valores reduzidos de combinação, conforme ABNT NBR 8681.”

Excepcionais

“Em cada combinação devem figurar as ações permanentes e a ação variável excepcional, quando existir, com seus valores representativos e as demais ações variáveis com probabilidade não desprezível de ocorrência simultânea, com seus valores reduzidos de combinação, conforme ABNT NBR 8681. Nesse caso se enquadram, entre outras, sismo e incêndio.”

Para facilitar a visualização, essas combinações estão apresentadas na Tabela 3.4. Nas edificações mais comuns, como por exemplo os edifícios residenciais, a **combinação última** a ser considerada de modo geral é a normal. Porém, onde ocorrerem ações especiais, de construção ou excepcionais importantes, elas devem ser consideradas, conforme as definições apresentadas. Por exemplo, na verificação da segurança no Estado-Limite Último com a **combinação normal**, a equação para determinação da ação de cálculo (F_d , ver Tabela 3.4), é composta pelas ações permanentes F_{gk} e F_{egk} , multiplicadas pelos respectivos coeficientes de ponderação γ_g e γ_{eg} (apresentados na Tabela 3.6), e somadas com as ações variáveis F_{q1k} , F_{qjk} e F_{eqk} , multiplicados pelos respectivos coeficientes de ponderação das ações variáveis (γ_q e γ_{eq} - Tabela 3.6) e pelos fatores de redução ψ_{0j} e ψ_{0e} (Tabela 3.7), sendo que a ação variável principal (F_{q1k}) não é reduzida.

⁸⁹ Na sequência, a NBR 6118 apresenta os **coeficientes de ponderação das ações** (γ). No entanto, aqui antes serão apresentadas as combinações de ações, pois os coeficientes de ponderação (ver item 3.3.6) dependem das combinações.

Os significados das notações estão mostrados na Tabela 3.4, onde F_{egk} representa ações relativas a deformações permanentes, como retração, por exemplo. Existe ainda a possibilidade de ocorrerem ações (F_{eqk}) devidas às deformações variáveis impostas ao longo do tempo, como as devidas à temperatura, que devem ser consideradas com valores reduzidos conforme o coeficiente ψ_{oe} (Tabela 3.7 - “Temperatura”).

Tabela 3.4 – Combinações últimas (NBR 6118, Tabela 11.3).

Combinações últimas(ELU)	Descrição	Cálculo das solicitações
Normais	Esgotamento da capacidade resistente para elementos estruturais de Concreto Armado ^a	$F_d = \gamma_g F_{gk} + \gamma_{eg} F_{egk} + \gamma_q (F_{q1k} + \sum \psi_{oj} F_{qjk}) + \gamma_{eq} \psi_{oe} F_{eqk}$
	Esgotamento da capacidade resistente para elementos estruturais de Concreto Protendido	Deve ser considerada, quando necessário, a força de protensão como carregamento externo com os valores $P_{k,max}$ e $P_{k,min}$ para a força desfavorável e favorável, respectivamente, conforme definido na Seção 9
	Perda do equilíbrio como corpo rígido	$\begin{aligned} S(F_{sd}) &\geq S(F_{nd}) \\ F_{sd} &= \gamma_{gs} G_{sk} + R_d \\ F_{nd} &= \gamma_{gn} G_{nk} + \gamma_q Q_{nk} - \gamma_{qs} Q_{s,min}, \text{ onde: } Q_{nk} = Q_{1k} + \sum \psi_{oj} Q_{jk} \end{aligned}$
Especiais ou de construção ^b		$F_d = \gamma_g F_{gk} + \gamma_{eg} F_{egk} + \gamma_q (F_{q1k} + \sum \psi_{oj} F_{qjk}) + \gamma_{eq} \psi_{oe} F_{eqk}$
Excepcionais ^b		$F_d = \gamma_g F_{gk} + \gamma_{eg} F_{egk} + F_{q1exc} + \gamma_q \sum \psi_{oj} F_{qjk} + \gamma_{eq} \psi_{oe} F_{eqk}$
onde: F_d é o valor de cálculo das ações para combinação última; F_{gk} representa as ações permanentes diretas; F_{ek} representa as ações indiretas permanentes como a retração F_{egk} e variáveis como a temperatura F_{eqk}; F_{qk} representa as ações variáveis diretas das quais F_{q1k} é escolhida principal; $\gamma_g, \gamma_{eg}, \gamma_q, \gamma_{eq}$ – ver Tabela 3.6; ψ_{oj}, ψ_{oe} – ver Tabela 3.7; F_{sd} representa as ações estabilizantes; F_{nd} representa as ações não estabilizantes; G_{sk} é o valor característico da ação permanente estabilizante; R_d é o esforço resistente considerado estabilizante, quando houver; G_{nk} é o valor característico da ação permanente instabilizante; $Q_{nk} = Q_{1k} + \sum_{j=2}^m \psi_{oj} Q_{jk}$ Q_{nk} é o valor característico das ações variáveis instabilizantes; Q_{1k} é o valor característico da ação variável instabilizante considerada principal; ψ_{oj} e Q_{jk} são as demais ações variáveis instabilizantes, consideradas com seu valor reduzido; $Q_{s,min}$ é o valor característico mínimo da ação variável estabilizante que acompanha obrigatoriamente uma ação variável instabilizante; a) No caso geral, devem ser consideradas inclusive combinações onde o efeito favorável das cargas permanentes seja reduzido pela consideração de $\gamma_g = 1,0$. No caso de estruturas usuais de edifícios, essas combinações que consideram γ_g reduzido (1,0) não precisam ser consideradas; b) Quando F_{q1k} ou F_{q1exc} atuarem em tempo muito pequeno ou tiverem probabilidade de ocorrência muito baixa, ψ_{oj} pode ser substituído por ψ_{2j}. Este pode ser o caso para ações sísmicas e situação de incêndio.		

3.3.5.2 Combinações de Serviço

As **combinações de serviço** são “classificadas de acordo com sua permanência na estrutura e devem ser verificadas como estabelecido a seguir” (NBR 6118, item 11.8.3.1):

a) “**quase permanentes**: podem atuar durante grande parte do período de vida da estrutura, e sua consideração pode ser necessária na verificação do estado-limite de deformações excessivas;

b) **frequentes**: repetem-se muitas vezes durante o período de vida da estrutura, e sua consideração pode ser necessária na verificação dos estados-limites de formação de fissuras, de abertura de fissuras e de vibrações excessivas. Podem também ser consideradas para verificações de estados-

limites de deformações excessivas decorrentes de vento ou temperatura que podem comprometer as vedações;

c) **raras**: ocorrem algumas vezes durante o período de vida da estrutura, e sua consideração pode ser necessária na verificação do estado-limite de formação de fissuras.”

Para facilitar a visualização, as **combinações de serviço** usuais estão apresentadas na Tabela 3.5.

Tabela 3.5 - Combinações de serviço (NBR 6118, Tabela 11.4).

Combinações de serviço (ELS)	Descrição	Cálculo das solicitações
Quase permanentes (CQP)	Nas combinações quase permanentes de serviço, todas as ações variáveis são consideradas com seus valores quase permanentes $\psi_2 F_{qk}$	$F_{d,ser} = \Sigma F_{gi,k} + \Sigma \psi_{2j} F_{qj,k}$
Frequentes (CF)	Nas combinações frequentes de serviço, a ação variável principal F_{q1} é tomada com seu valor frequente $\psi_1 F_{q1k}$ e todas as demais ações variáveis são tomadas com seus valores quase permanentes $\psi_2 F_{qk}$	$F_{d,ser} = \Sigma F_{gik} + \psi_1 F_{q1k} + \Sigma \psi_{2j} F_{qjk}$
Raras (CR)	Nas combinações raras de serviço, a ação variável principal F_{q1} é tomada com seu valor característico F_{q1k} e todas as demais ações são tomadas com seus valores frequentes $\psi_1 F_{qk}$	$F_{d,ser} = \Sigma F_{gik} + F_{q1k} + \Sigma \psi_{1j} F_{qjk}$
onde: $F_{d,ser}$ é o valor de cálculo das ações para combinações de serviço; F_{q1k} é o valor característico das ações variáveis principais diretas; ψ_1 é o fator de redução de combinação frequente para ELS; ψ_2 é o fator de redução de combinação quase permanente para ELS.		

3.3.6 Coeficientes de Ponderação das Ações

“Os valores de cálculo F_d das ações são obtidos a partir dos valores representativos, multiplicando-os pelos respectivos coeficientes de ponderação γ_f definidos em 11.7.” (item 11.6.3). “As ações devem ser majoradas pelo coeficiente γ_f , cujos valores encontram-se estabelecidos em 11.7.1, 11.7.2 e Tabelas 11.1 e 11.2.” (ver Tabela 3.6 e na Tabela 3.7). É considerado que:

$$\gamma_f = \gamma_{f1} \cdot \gamma_{f2} \cdot \gamma_{f3} \quad \text{Eq. 3.5}$$

sendo os coeficientes parciais definidos como:

γ_{f1} - considera a variabilidade das ações; (ver item 11.1)

γ_{f2} - considera a simultaneidade de atuação das ações;

γ_{f3} - considera os desvios gerados nas construções e as aproximações feitas em projeto do ponto de vista das solicitações.

3.3.6.1 Estado-Limite Último (ELU)

Os valores-base para verificação são os apresentados na Tabela 3.6 e na Tabela 3.7, para $\gamma_{f1} \cdot \gamma_{f3}$ e γ_{f2} , respectivamente. Segundo a NBR 8681 (item 4.2.3.1), “quando se consideram estados limites últimos, os coeficientes γ_f de ponderação das ações podem ser considerados como o produto de dois outros, γ_{f1} e γ_{f3} (o coeficiente de combinação ψ_o faz o papel do terceiro coeficiente, que seria indicado por γ_{f2}). O coeficiente parcial γ_{f1} leva em conta a variabilidade das ações e o coeficiente γ_{f3} considera os possíveis erros de avaliação dos efeitos das ações, seja por problemas construtivos, seja por deficiência do método de cálculo empregado. O desdobramento do coeficiente de segurança γ_f em coeficientes parciais permite que os valores gerais especificados para γ_f possam ser

discriminados em função de peculiaridades dos diferentes tipos de estruturas e de materiais de construção considerados, conforme 5.2.”

Os coeficientes γ_f constantes da Tabela 3.6 variam conforme o tipo de combinação das ações, que podem ser normais, especiais e excepcionais. Os valores da Tabela 3.6 e Tabela 3.7 podem ser modificados em casos especiais não contemplados, de acordo com a NBR 8681. “O valor do coeficiente de ponderação de cargas permanentes de mesma origem, em um dado carregamento, deve ser o mesmo ao longo de toda a estrutura. A única exceção é o caso da verificação da estabilidade como corpo rígido.”

Tabela 3.6 - Coeficiente $\gamma_f = \gamma_{f1} \cdot \gamma_{f3}$ (NBR 6118, Tabela 11.1).

Combinações de ações	Ações							
	Permanentes (g)		Variáveis (q)		Protensão (p)		Recalques de apoio e retração	
	D	F	G	T	D	F	D	F
Normais	1,4 ^{a)}	1,0	1,4	1,2	1,2	0,9	1,2	0
Especiais ou de construção	1,3	1,0	1,2	1,0	1,2	0,9	1,2	0
Excepcionais	1,2	1,0	1,0	0	1,2	0,9	0	0

onde: “D é desfavorável, F é favorável, G representa as cargas variáveis em geral e T é a temperatura.
a) “Para as ações permanentes de pequena variabilidade, como o peso próprio das estruturas, especialmente as pré-moldadas, esse coeficiente pode ser reduzido para 1,3. Neste caso, as demais ações permanentes devem ser ponderadas conforme a ABNT NBR 8681:2003 Versão Corrigida:2004, Tabela 1.”

“Para elementos estruturais esbeltos críticos para a segurança de estrutura, como pilares e pilares-paredes com espessura inferior a 19 cm e lajes em balanço com espessura inferior a 19 cm, os esforços solicitantes de cálculo devem ser multiplicados pelo coeficiente de ajustamento γ_n (ver 13.2.3 e 13.2.4.1).” (NBR 6118, item 11.7.1).

Tabela 3.7 - Valores do coeficiente γ_{f2} (NBR 6118, Tabela 11.2).

Ações		γ_{f2}		
		ψ_0	ψ_1^a	ψ_2
Cargas de utilização de edificações	Locais em que não há predominância de pesos de equipamentos que permanecem fixos por longos períodos de tempo, nem de elevadas concentrações de pessoas ^{b)}	0,5	0,4	0,3
	Locais em que há predominância de pesos de equipamentos que permanecem fixos por longos períodos de tempo, ou de elevada concentração de pessoas ^{c)}	0,7	0,6	0,4
	Biblioteca, arquivos, oficinas e garagens	0,8	0,7	0,6
Vento	Pressão dinâmica do vento nas estruturas em geral	0,6	0,3	0
Temperatura	Variações uniformes de temperatura em relação à média anual local	0,6	0,5	0,3

a) “Para os valores de ψ_1 relativos às pontes e principalmente para os problemas de fadiga, ver seção 23.
b) Áreas com ocupação residencial ou hospedagem e áreas de acesso restrito.
c) Áreas com ocupação comercial, de escritórios, lojas, estações de passageiros, edifícios públicos e áreas de acesso público.”

“Os valores das Tabelas 11.1 e 11.2 podem ser modificados em casos especiais aqui não contemplados, de acordo com a ABNT NBR 8681. O valor do coeficiente de ponderação de cargas permanentes de mesma origem, em um dado carregamento, deve ser o mesmo ao longo de toda a estrutura. A única exceção é o caso da verificação da estabilidade como corpo rígido.” (NBR 6118 (11.7.1)

Os fatores ψ_1 e ψ_2 consideram a frequência e a duração das ações variáveis, para cada tipo de combinação. Por exemplo, no caso de lajes de piso de bibliotecas, arquivos, oficinas e garagens, o fator ψ_2 é 0,6. Isto significa que provavelmente 60 % da ação variável principal (peso de livros,

estantes, mesas, etc.), estará atuando durante grande parte da vida útil da edificação. Portanto, essa fração deve ser considerada como ação de longa duração e participar, por exemplo, de uma verificação da flecha. Observe-se que em todas as combinações as ações permanentes são consideradas com seu valor integral (100 %).^[4]

3.3.6.2 Estado-Limite de Serviço (ELS)

“Em geral, o coeficiente de ponderação das ações para estados-limites de serviço é dado pela expressão: $\gamma_f = \gamma_{f2}$.” (NBR 6118, item 11.7.2). O coeficiente γ_{f2} tem valor variável conforme a verificação que se deseja fazer (ver Tabela 3.7):

- a) $\gamma_{f2} = 1$ para combinações raras;
- b) $\gamma_{f2} = \psi_1$ para combinações frequentes;
- c) $\gamma_{f2} = \psi_2$ para combinações quase permanentes.”

Nas combinações **quase permanentes** todas as ações variáveis são consideradas com seus valores quase permanentes $\psi_2 F_{qk}$. Nas combinações **frequentes** a ação variável principal F_{q1} é tomada com seu valor frequente $\psi_1 F_{q1k}$ e todas as demais ações variáveis são tomadas com seus valores quase permanentes $\psi_2 F_{qk}$. Nas combinações **raras** a ação variável principal F_{q1} é tomada com seu valor característico F_{q1k} e todas as demais ações são tomadas com seus valores frequentes $\psi_1 F_{qk}$.

3.4 Resistências de Cálculo e Coeficientes de Ponderação

3.4.1 Valores Característicos

“Os valores característicos f_k das resistências são os que, em um lote de material, têm uma determinada probabilidade de serem ultrapassados, no sentido desfavorável para a segurança. Usualmente é de interesse a resistência característica inferior $f_{k,inf}$, cujo valor é menor que a resistência média f_m , embora por vezes haja interesse na resistência característica superior $f_{k,sup}$, cujo valor é maior que f_m . Para os efeitos desta Norma, a resistência característica inferior é admitida como sendo o valor que tem apenas 5 % de probabilidade de não ser atingido pelos elementos de um dado lote de material.” (NBR 6118, 12.2)

3.4.2 Valores de Cálculo

Com o objetivo de introduzir uma margem de segurança às estruturas de concreto, são consideradas as resistências de cálculo dos materiais, que são obtidas a partir das resistências características divididas por um coeficiente de ponderação (γ_m), de minoração.

3.4.2.1 Resistência de Cálculo

Segundo a NBR 6118 (12.3.1), a resistência de cálculo f_d é dada pela expressão:

$$f_d = \frac{f_k}{\gamma_m} \quad \text{Eq. 3.6}$$

3.4.2.2 Tensões Resistentes de Cálculo

“As tensões resistentes de cálculo σ_{Rd} ou τ_{Rd} são estabelecidas para a determinação das solicitações resistentes de cálculo que não dependam diretamente das resistências medidas convencionalmente em ensaios de corpos de prova padronizados dos materiais empregados. Os valores de σ_{Rd} e τ_{Rd} são estabelecidos, em cada caso particular, a partir das teorias de resistência dos elementos estruturais considerados.” (NBR 6118, 12.3.2)

3.4.2.3 Resistência de Cálculo do Concreto

No caso da **resistência de cálculo do concreto** (f_{cd}), a NBR 6118 (item 12.3.3) define a resistência de cálculo em função da idade do concreto, como segue:

“a) quando a verificação se faz em data j igual ou superior a 28 dias, adota-se a expressão:

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \quad \text{Eq. 3.7}$$

γ_c = coeficiente de ponderação da resistência do concreto, definido na Tabela 3.8.

Nesse caso, o controle da resistência do concreto à compressão deve ser feito aos 28 dias, de forma a confirmar a resistência f_{ck} adotada no projeto;

b) quando a verificação se faz em data j inferior a 28 dias, adota-se a expressão:

$$f_{cd} = \frac{f_{ckj}}{\gamma_c} \cong \beta_1 \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \quad \text{Eq. 3.8}$$

sendo β_1 a relação f_{ckj} / f_{ck} dada por:

$$\beta_1 = \exp \left\{ s \left[1 - \left(\frac{28}{t} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \right\} \quad \text{Eq. 3.9}$$

$s = 0,38$ para concreto de cimento CPIII e IV;

$s = 0,25$ para concreto de cimento CPI e II;

$s = 0,20$ para concreto de cimento CPV-ARI.

t é a idade efetiva do concreto, expressa em dias.

Essa verificação deve ser feita aos t dias, para as cargas aplicadas até essa data. Ainda deve ser feita a verificação para a totalidade das cargas aplicadas aos 28 dias. Nesse caso, o controle da resistência à compressão do concreto deve ser feito em duas datas: aos t dias e aos 28 dias, de forma a confirmar os valores de f_{ckj} e f_{ck} adotadas no projeto.”

3.4.2.4 Resistência de Cálculo do Aço

De modo semelhante ao concreto a **resistência de cálculo de início de escoamento do aço** (f_{yd}), é definida como:

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} \quad \text{Eq. 3.10}$$

γ_s = coeficiente de ponderação da resistência do aço, definido na Tabela 3.8.

3.4.3 Coeficiente de Ponderação das Resistências no Estado-Limite Último

Conforme a NBR 6118 (item 12.4), as resistências devem ser minoradas pelo **coeficiente de ponderação das resistências** (γ_m):

$$\gamma_m = \gamma_{m1} \cdot \gamma_{m2} \cdot \gamma_{m3}$$

conforme os diferentes coeficientes parciais que consideram (item 12.1):

“ γ_{m1} – parte do coeficiente de ponderação das resistências γ_m , que considera a variabilidade da resistência dos materiais envolvidos;

γ_{m2} – parte do coeficiente de ponderação das resistências γ_m , que considera a diferença entre a resistência do material no corpo de prova e na estrutura;

γ_{m3} – parte do coeficiente de ponderação das resistências γ_m , que considera os desvios gerados na construção e as aproximações feitas em projeto do ponto de vista das resistências.”

O coeficiente de ponderação γ_m pode assumir diferentes valores quando se tratam dos Estados-Limites Último ou de Serviço.

3.4.3.1 Estado-Limite Último (ELU)

Na Tabela 3.8 estão indicados os valores para verificação no Estado-Limite Último, do coeficiente de ponderação da resistência do concreto (γ_c) e do aço (γ_s), em função do tipo de combinação de ações (apresentados no item 3.3.5).

Tabela 3.8 - Valores dos coeficientes de ponderação γ_c e γ_s dos materiais (NBR 6118, Tabela 12.1).

Combinações	Concreto γ_c	Aço γ_s
Normais	1,4	1,15
Especiais ou de construção	1,2	1,15
Excepcionais	1,2	1,0

“Para a execução de elementos estruturais nos quais estejam previstas condições desfavoráveis (por exemplo, más condições de transporte, ou adensamento manual, ou concretagem deficiente por concentração de armadura), o coeficiente γ_c deve ser multiplicado por 1,1. Para elementos estruturais pré-moldados e pré-fabricados, deve ser consultada a ABNT NBR 9062.

Admite-se, no caso de testemunhos extraídos da estrutura, dividir o valor de γ_c por 1,1. Admite-se, nas obras de pequena importância, o emprego de aço CA-25 sem a realização do controle de qualidade estabelecido na ABNT NBR 7480, desde que o coeficiente de ponderação para o aço seja multiplicado por 1,1.” (NBR 6118, item 12.4.1)

3.4.3.2 Estado-Limite de Serviço (ELS)

“Os limites estabelecidos para os estados-limites de serviço (ver Seções 17, 19 e 23) não necessitam de minoração, portanto, $\gamma_m = 1,0$.” (NBR 6118, item 12.4.2).

3.5 Verificação da Segurança

“Na verificação da segurança das estruturas de concreto, devem ser atendidas as condições construtivas e as condições analíticas de segurança.” (NBR 6118, item 12.5).

3.5.1 Condições Construtivas de Segurança

“Devem ser atendidas as exigências estabelecidas:

- nos critérios de detalhamento constantes nas Seções 18 e 20;
- nas normas de controle dos materiais, especialmente a ABNT NBR 12655;
- no controle de execução da obra, conforme ABNT NBR 14931 e Normas Brasileiras específicas.”

3.5.2 Condições Analíticas de Segurança

“As condições analíticas de segurança estabelecem que as resistências não podem ser menores que as solicitações e devem ser verificadas em relação a todos os estados-limites e todos os carregamentos especificados para o tipo de construção considerado, ou seja, em qualquer caso deve ser respeitada a condição:

$$R_d \geq S_d \quad \text{Eq. 3.11}$$

Para a verificação do estado-limite último de perda de equilíbrio como corpo rígido, R_d e S_d devem assumir os valores de cálculo das ações estabilizantes e desestabilizantes respectivamente.”

3.5.3 Esforços Resistentes de Cálculo

“Os valores de cálculo dos esforços resistentes são determinados a partir dos valores de cálculo das resistências dos materiais adotados no projeto, ou das tensões resistentes de cálculo, como definido em 12.3.1. Para aplicações específicas, ver Seções 17, 19 e 23.” (NBR 6118, item 12.5.3).

3.5.4 Esforços Solicitantes de Cálculo

“As solicitações de cálculo são calculadas, para a combinação de ações considerada, de acordo com a análise estrutural (ver Seção 14).” (NBR 6118, item 12.5.4).

3.6 Escolha do Nível de Protensão

A força de protensão elimina ou limita a tensão de tração atuante na seção transversal,⁹⁰ e consequentemente a ocorrência ou não de fissuração, em função principalmente da intensidade da protensão. Há situações onde é necessário evitar a fissuração, como reservatórios, estruturas em contato com água do mar ou agentes agressivos, etc., e outras situações em que basta limitar a abertura das fissuras. Essas questões estão relacionadas com o **nível de protensão**,⁹¹ também chamado **grau de protensão**, definido por Leonhardt^[20] como a relação entre o momento fletor de descompressão e o momento fletor máximo atuante na estrutura:

$$\kappa_p = \frac{M_o}{M_{\max}} \quad \text{Eq. 3.12}$$

O **momento fletor de descompressão** (M_o) é definido como aquele em que se alcança o Estado-Limite de Descompressão (ELS-D), isto é, que leva a uma tensão normal zero em algum ponto da seção transversal da peça (geralmente a borda tracionada pelo momento fletor máximo). O grau de protensão avalia se na seção que atua o momento fletor máximo ocorre ou não tensão de tração. Uma viga fletida com $\kappa_p = 1$ está sob *protensão total*,⁹² e valores inferiores definem a *protensão limitada* e a *protensão parcial*.

No item 17.2.4.4 a NBR 6118 informa que no Estado-Limite de Serviço (ELS): “Devem ser atendidas as verificações do ELS estabelecidas na Tabela 13.4 de acordo com o nível de protensão definido em projeto.”

⁹⁰ Tratam-se de tensões normais de tração da flexão. Outras tensões de tração podem ocorrer, provenientes de tensões principais, torção, e tensões indiretas como na região de ancoragem das armaduras.

⁹¹ No item 1.5 foi apresentada uma introdução ao conceito de nível de protensão.

⁹² Protensão completa na NBR 6118.

Na Tabela 13.4 do item 13.4.2⁹³ a NBR 6118 apresenta os **níveis de protensão** para o projeto de peças protendidas no Brasil, em função do tipo de protensão (pré ou pós-tração e da classe de agressividade ambiental), mas não apresenta definições desses termos. De modo simples, para uma peça fletida sob o carregamento de serviço, pode-se definir os **níveis de protensão** em função das tensões finais na seção:

- a) *protensão completa*: a peça trabalha **livre de tensões de tração e de fissuras** ao longo da vida útil;
- b) *protensão limitada*: **podem ocorrer** tensões de tração, mas que não ultrapassam uma tensão admissível, e a **peça trabalha livre de fissuras**;
- c) *protensão parcial*: as tensões de tração não são restringidas e a **peça trabalha fissurada**.

A Tabela 3.9 apresenta as exigências da NBR 6118 quanto às aberturas de fissuras permitidas e as exigências para os **níveis de protensão**.

Tabela 3.9 – Exigências de durabilidade relacionadas à fissuração e à proteção da armadura, em função das classes de agressividade ambiental (NBR 6118, Tabela 13.4).

Tipo de concreto estrutural	Tipo de protensão	Classe de agressividade ambiental (CAA)	Exigências relativas à fissuração	Combinação de ações em serviço a utilizar
Concreto Simples	-	CAA I a CAA IV	Não há	-
Concreto Armado	-	CAA I	ELS-W $w_k \leq 0,4$ mm	Combinação frequente
	-	CAA II e CAA III	ELS-W $w_k \leq 0,3$ mm	
	-	CAA IV	ELS-W $w_k \leq 0,2$ mm	
Concreto Protendido nível 1 (<i>protensão parcial</i>)	Pré-tração	CAA I	ELS-W $w_k \leq 0,2$ mm	Combinação frequente
	Pós-tração	CAA I e CAA II		
Concreto Protendido nível 2 (<i>protensão limitada</i>)	Pré-tração	CAA I e CAA II	Verificar as duas condições abaixo ELS-F Combinação frequente ELS-D ^a Combinação quase permanente	
	Pós-tração	CAA I a CAA IV		
Concreto Protendido nível 3 (<i>protensão completa</i>)	Pré-tração	CAA I a CAA IV	Verificar as duas condições abaixo ELS-F Combinação rara ELS-D ^a Combinação frequente	
	Pós-tração	CAA I a CAA IV		
<i>“Para as classes de agressividade ambiental CAA-III e IV, exige-se que as cordoalhas não aderentes tenham proteção especial na região de suas ancoragens. No caso de pré-tração em estruturas de concreto pré-fabricado, devem ser atendidos os requisitos da ABNT NBR 9062. Nota 1 As definições de ELS-W, ELS-F e ELS-D encontram-se em 3.2. Nota 2 No projeto de lajes lisas e cogumelo protendidas, basta ser atendido o ELS-F para a combinação frequente das ações, em todas as classes de agressividade ambiental.</i>				
<i>^a A critério do projetista, o ELS-D pode ser substituído pelo ELS-DP com $a_p = 50$ mm (ver Figura 3.1).”</i>				

⁹³ O item 13.4.2 ainda apresenta: “A abertura máxima característica w_k das fissuras, desde que não exceda valores da ordem de 0,2 mm a 0,4 mm, (conforme Tabela 13.4) sob ação das combinações frequentes, não tem importância significativa na corrosão das armaduras passivas.

Como para as armaduras ativas existe a possibilidade de corrosão sob tensão, esses limites devem ser mais restritos e função direta da agressividade do ambiente, dada pela classe de agressividade ambiental (ver Seção 6).

Na Tabela 13.4 são dados valores-limites da abertura característica w_k das fissuras, assim como outras providências, visando garantir proteção adequada das armaduras quanto à corrosão. Entretanto, devido ao estágio atual dos conhecimentos e da alta variabilidade das grandezas envolvidas, esses limites devem ser vistos apenas como critérios para um projeto adequado de estruturas. Embora as estimativas de abertura de fissuras feitas em 17.3.3.2 devam respeitar esses limites, não se deve esperar que as aberturas de fissuras reais correspondam estritamente aos valores estimados, isto é, fissuras reais podem eventualmente ultrapassar esses limites.”

Em vista das informações contidas na Tabela 3.9 tem-se as características dos níveis de protensão:

- a) na **protensão completa** não são admitidas tensões de tração na peça em serviço, com exceção dos instantes em que ocorrer a *combinação rara* de ações,⁹⁴ nas seções de extremidade de peças pré-tensionadas e em fases transitórias de execução, até o ELS-F (início de formação de fissuras);
- b) na **protensão limitada** são admitidas tensões de tração, no entanto sem ultrapassar o ELS-F. No caso de ocorrência de *combinação rara* de ações o ELS-F é ultrapassado e surgem fissuras, que se fecham após cessada essa combinação;^[4]
- c) na **protensão parcial** são admitidas tensões de tração e fissuras com aberturas de até 0,2 mm. As tensões de tração são resistidas por armadura passiva (A_s), que auxilia no controle de abertura das fissuras.

3.7 Tensões Admissíveis do Concreto

No caso de estruturas de Concreto Armado o procedimento comum é projetar a peça para atender ao Estado-Limite Último (ELU), e então verificar se a peça apresenta comportamento satisfatório em serviço, ou seja, se atende as exigências dos Estados-Limites de Serviço (ELS), como flecha, fissuração, fadiga, vibração, etc. No caso do Concreto Protendido é diferente, pois o procedimento comum é projetar a peça para atender as exigências dos ELS, e então verificar se a peça apresenta comportamento satisfatório no ELU, ou seja, se a capacidade resistente da peça é suficiente frente aos esforços solicitantes, com a devida margem de segurança. Esse procedimento é utilizado porque no CP as condições dos ELS são mais críticas que as do ELU, bem como as peças ou estruturas que atendem os ELS geralmente também atendem o ELU.^[17] E uma forma de projetar as peças de CP, de modo a atenderem às condições impostas nas situações em serviço, é impondo limites aos valores das tensões normais atuantes no concreto. Os valores limites são os valores máximos permitidos ou adotados pelo engenheiro projetista, e são geralmente denominados como **tensões admissíveis**.

Faz-se o projeto de modo que as **tensões admissíveis** não sejam ultrapassadas. No entanto, como isso não é suficiente para garantir por si só o atendimento aos Estados-Limites, principalmente no que se refere à capacidade resistente da peça, torna-se necessário verificar a resistência da peça aos esforços solicitantes. No caso de peça sob flexão, como uma viga por exemplo, a capacidade da viga à flexão no ELU deve ser obrigatoriamente verificada (ver o capítulo 6).

As **tensões admissíveis** são estabelecidas também com o objetivo de evitar danos na peça durante a construção, bem como assegurar um bom comportamento quando em serviço. A fissuração e a flecha, por exemplo, podem ser indiretamente controladas em função dos valores escolhidos para as tensões admissíveis, pois estas fornecem um indicativo das dimensões mínimas para a seção transversal da peça, no início do projeto.

Ainda, se uma peça **não** é permitida fissurar em serviço, a tensão admissível à tração do concreto deve ser escolhida de forma a atender essa exigência. Por outro lado, se a peça poder trabalhar fissurada, a tensão admissível à tração pode ser desconsiderada, e neste caso é necessário apenas verificar a abertura da fissura, além de se dispor uma armadura passiva para resistir às tensões de tração atuantes. Para concluir, se a seção deve permanecer não fissurada sob o carregamento de serviço (nível de *protensão completa*), tensões limites (*admissíveis*) de tração devem ser impostas. Se a seção é permitida fissurar (nível de *protensão parcial*), a tensão admissível à tração pode ser desconsiderada e apenas as outras tensões admissíveis permanecem.

Quando **não** fissurada em serviço a peça é considerada trabalhando no regime elástico, e neste caso as situações críticas geralmente são:^[18]

1. tensões no concreto no instante da transferência da protensão para a peça:⁹⁵ além da força de protensão, de modo geral o único carregamento que atua é o peso próprio da peça. O valor da força de protensão é aquele que existe após já ter ocorrida a perda por encurtamento elástico imediato do concreto, devido à transferência da protensão;

⁹⁴ A combinação rara ocorre durante apenas algumas horas da vida útil da peça.

⁹⁵ Na **pré-tração** a transferência da protensão para a peça corresponde ao instante em que a armadura de protensão é solta (relaxada) das ancoragens. Na pós-tração corresponde ao instante da operação de estiramento dos cabos de protensão.

2. tensões no concreto com a peça trabalhando em serviço: além da força de protensão, os carregamentos que atuam são os permanentes (g) e os variáveis (q). O valor da força de protensão é aquele que atua após ocorridas todas as perdas de força de protensão, inclusive as progressivas dependentes do tempo.⁹⁶

A notação aplicada às **tensões admissíveis** e **tensões atuantes** no concreto é muito importante, sendo a seguinte (Figura 3.14):

$\bar{\sigma}_{tr,o}$ = tensão admissível à tração na transferência da protensão para a peça;

$\bar{\sigma}_{c,o}$ = tensão admissível à compressão na transferência da protensão (valor negativo);

$\bar{\sigma}_{tr,tot}$ = tensão admissível à tração após ocorridas todas as perdas de protensão;

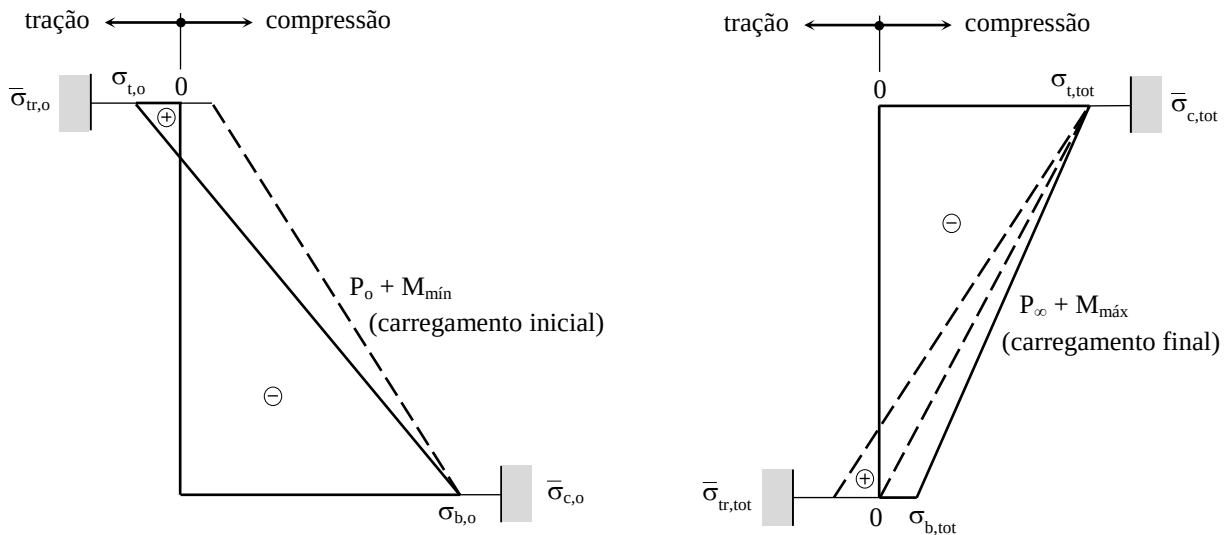
$\bar{\sigma}_{c,tot}$ = tensão admissível à compressão após ocorridas todas as perdas (valor negativo);

$\sigma_{t,o}$ = tensão atuante na fibra do topo da seção transversal na transferência da protensão;

$\sigma_{b,o}$ = tensão atuante na fibra da base da seção transversal na transferência da protensão;

$\sigma_{t,tot}$ = tensão atuante na fibra do topo da seção transversal após ocorridas todas as perdas;

$\sigma_{b,tot}$ = tensão atuante na fibra da base da seção transversal após ocorridas todas as perdas.



a) na transferência da força de protensão;

b) após ocorridas todas as perdas de protensão.

Figura 3.14 – Diagramas de tensão sob carregamentos inicial e final, e tensões admissíveis.^[2]

As **tensões de compressão são consideradas com sinal negativo, e as tensões de tração com sinal positivo**. Os diagramas de tensão da Figura 3.14 mostram as duas situações críticas geralmente mais importantes. A primeira, no instante da transferência da protensão para a peça, atua a força de protensão P_o e o carregamento externo denominado inicial, com o $M_{\min}$ sendo devido geralmente apenas ao peso próprio da peça (M_o). Nesta situação a protensão é preponderante, e geralmente tem-se tensão de tração no topo ($\sigma_{t,o}$)⁹⁷ e tensão de compressão na base ($\sigma_{b,o}$). A segunda é aquela após ocorridas todas as perdas de força de protensão, quando atua a força de protensão final P_∞ e o carregamento final, onde $M_{\max}$ corresponde ao momento fletor total atuante na peça em serviço, devido aos carregamentos permanentes e variáveis. Nesta situação tem-se tensão de compressão no topo ($\sigma_{t,tot}$), e a tensão na base ($\sigma_{b,tot}$) pode ser de compressão, de tração ou nula.

⁹⁶ **Perdas de protensão progressivas** são aquelas que ocorrem a partir do instante da transferência da protensão para a peça, chamadas progressivas porque são crescentes ao longo do tempo.

⁹⁷ A tensão $\sigma_{t,o}$ no topo pode ser de compressão, dependendo das variáveis de projeto.

A versão de 2023 da NBR 6118 acrescentou valores limites para tensões de compressão e tração, e conforme os itens 17.2.4.4.1 e 17.2.4.4.2 tem-se:

a) Limites de tensão de compressão

*“Tensões de compressão excessivas no concreto sob cargas em serviço podem provocar fissuras longitudinais e elevadas perdas de protensão por fluência. Para evitar esses efeitos, devem se limitar as tensões de compressão do concreto a um nível apropriado. Para **protensão completa** (Nível 3) e **protensão limitada** (Nível 2), as tensões no concreto em serviço (considerando a seção não fissurada e após todas as perdas de protensão) não podem exceder os seguintes limites:*

- a) na combinação quase permanente – $0,45 f_{ck}$;*
- b) na combinação frequente – $0,6 f_{ck}$;*
- c) na combinação rara – $0,6 f_{ck}$ (somente para **protensão completa**, Nível 3).”*

b) Limites de tensão de tração

“A limitação das tensões de tração no concreto é uma medida adequada para reduzir a probabilidade de fissuração. Dependendo do estado-limite considerado, ELS-F e ELS-D, diferentes limites de tensão devem ser aplicados, tomando-se como base a seção não fissurada do concreto.

Quando a tensão de tração máxima no concreto no ELS-F (ver a Tabela 13.4) exceder $0,7 f_{ctm}$, a seção passa a trabalhar no Estádio II (seção fissurada). No ELS-D, considera-se a tensão-limite nula de tração.”

A norma americana ACI 318^{[18]98} e o Eurocode 2,^{[19]99} por exemplo, consideram as **tensões admissíveis** para o concreto mostradas na Tabela 3.10, para duas fases da vida da peça: no instante da transferência da protensão para a peça, e após a ocorrência de todas as perdas de protensão.

⁹⁸ AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. *Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318-11) and Commentary*. Reported by ACI Committee 318, 2011, 503p.

⁹⁹ EUROPEAN COMMITTEE STANDARDIZATION. *Eurocode 2 – Design of concrete structures*, Part 1-1, Part 1-2. 2005.

Tabela 3.10 – Tensões admissíveis no concreto nas fibras extremas de peças fletidas.

Situação	ACI 318 ¹⁰⁰	Eurocode 2
Imediatamente após a transferência da protensão (antes das perdas dependentes do tempo^{a)}):		
a) na borda comprimida, exceto item b) b) na borda comprimida nos apoios extremos de peças biapoiadas	$0,6f'_{ci}$ $0,7f'_{ci}$	$\leq 0,6f_{ck}(t)$ na pós-tensão $\leq 0,7f_{ck}(t)$ na pré-tensão
c) na borda tracionada ^{b)} , exceto item d)	$0,25\sqrt{f'_{ci}}$	$f_{ct,m}(t)^e$
d) na borda tracionada nos apoios extremos de peças biapoiadas ^{b)}	$0,5\sqrt{f'_{ci}}$	
Sob todas as ações de serviço e após todas as perdas de protensão:		
a) na borda comprimida devido à protensão mais as cargas permanentes e variáveis ^{c)}	$0,45f'_c$	
b) na borda comprimida devido à protensão mais a carga total, com atuação de cargas transitórias importantes e temporárias ^{d)}	$0,6f'_c$	$\leq 0,45f_{ck}^f$
c) na borda tracionada em zona de tração pré-comprimida	$\leq 0,62\sqrt{f'_c}$ p/ peça não fissurada (U) $> 0,62\sqrt{f'_c}$ e $\leq 1,0\sqrt{f'_c}$ p/ peça em transição (T)	$f_{ct,m}$

NOTAS: a) após as perdas devidas ao atrito nas bainhas, escorregamento na ancoragem e por encurtamento elástico imediato do concreto, mas antes das perdas dependentes do tempo, devidas à relaxação da armadura e retração e fluência do concreto. Valores limites válidos para peças pré ou pós-tensionadas;
b) Quando a tensão de tração atuante excede a tensão admissível, armadura aderente (passiva, com tensão de $0,6f_y$ e menor que 207 MPa) deve ser colocada na zona tracionada para resistir à força de tração total no concreto, calculada considerando a seção não fissurada (Estádio I);
c) para quando uma parcela da carga variável total (*sustained live load* – carga variável principal) é importante e será mantida por um período de tempo suficiente para causar flechas dependentes do tempo significativas. Portanto, para a situação quando a carga variável principal e as cargas permanentes somam a maior porcentagem da carga total. Este limite foi conservativamente estabelecido para diminuir a probabilidade de ruptura devido a carregamentos repetidos, e razoável para impedir deformação por fluência excessiva.
d) para quando uma grande parcela da carga total é transitória e temporária (*transient loads*), como em projetos onde as cargas transitórias (variáveis) são maiores que a soma das cargas permanentes e demais variáveis;
e) Conforme o Eurocode 2: $f_{ct,m}(t) = f_{ct}(t)^{0,667}$ para $f_{ck}(t) \leq 50$ MPa, e $f_{ct,m}(t) = 2,12 \ln [1,8 + 0,1f_{ck}(t)]$ para $f_{ck}(t) > 50$ MPa;
f) valor para assegurar que a deformação por fluência seja linear, no carregamento da combinação quase permanente;

 $f_{ck}(t)$ = resistência característica do concreto à compressão no instante do estiramento da armadura de protensão no caso de peças pós-tensionadas, ou no instante da transferência da força de protensão no caso de peças pré-tensionadas;
 f'_{ci} = resistência característica à compressão na transferência, em MPa;
 f'_c é semelhante ao valor f_{ck} da notação brasileira.

¹⁰⁰ O ACI 318 (18.3.3) classifica peças protendidas fletidas em função da tensão de tração atuante no concreto na fibra pré-comprimida pela protensão, a tensão $\sigma_{b,tot}$:

a) não fissurada (*uncracked* – U) se $\sigma_{b,tot} \leq 0,62\sqrt{f_{ck}}$;

b) em transição (*in transition* – T) se $0,62\sqrt{f_{ck}} < \sigma_{b,tot} \leq 1,0\sqrt{f_{ck}}$;

c) fissurada (*cracked* – C) se $\sigma_{b,tot} > 1,0\sqrt{f_{ck}}$.

com f_{ck} em MPa. No ACI 318, f_{ck} recebe a notação f'_c .

3.8 Valores-Limites de Tensão no Estiramento da Armadura de Protensão

No item 9.6.1.2 a NBR 6118 preconiza que “Durante as operações de protensão, a força de tração na armadura não pode superar os valores decorrentes da limitação das tensões no aço correspondentes a essa situação transitória, fornecidos em 9.6.1.2.1 a 9.6.1.2.3. Após o término das operações de protensão, as verificações de segurança devem ser feitas de acordo com os estados-limites conforme a Seção 10.”

Durante a aplicação da força de estiramento (P_i), a tensão de tração na armadura de protensão (σ_{pi})¹⁰¹ na saída do aparelho de tração (cilindro hidráulico) deve respeitar os seguintes limites (NBR 6118, 9.6.1.2.1):¹⁰²

“a) **armadura pré-tracionada:** $\sigma_{pi} = 0,77 f_{ptk}$

b) **armadura pós-tracionada aderente:** $\sigma_{pi} = 0,74 f_{ptk}$

c) **armadura pós-tracionada não aderente:** $\sigma_{pi} = 0,80 f_{ptk}$ (ver nota 103)

d) **barras de aço CP-85/105:** $\sigma_{pi} = 0,72 f_{ptk}$

Esses valores são válidos para aços que atendam aos requisitos das ABNT NBR 7482 e ABNT NBR 7483.

Ao término da operação de protensão, a tensão $\sigma_{po}(x)$ da armadura **pré-tracionada** ou **pós-tracionada**, decorrente da força $P_o(x)$, não pode superar os limites estabelecidos em 9.6.1.2.1-b).” (NBR 6118, item 9.6.1.2.2).¹⁰⁴ O item 9.6.1.2.1-b) a que a norma se refere apresenta os valores limites de tensão para a armadura **pós-tracionada aderente**.

E para finalizar, a NBR 6118 (item 9.6.1.2.3) apresenta uma questão relativa à tolerância de execução: “Por ocasião da aplicação da força P_i , se constatadas irregularidades na protensão, decorrentes de falhas executivas nos elementos estruturais com armadura pós-tracionada, a força de tração em qualquer cabo pode ser elevada, limitando a tensão σ_{pi} aos valores estabelecidos em 9.6.1.2.1-b), majorados em até 10 %, até o limite de 50 % dos cabos, desde que seja garantida a segurança da estrutura, principalmente nas regiões das ancoragens.”

3.9 Verificação do Estado-Limite Último no Ato da Protensão

No item 17.2.4.3.1 a NBR 6118 apresenta as considerações relativas à verificação do Estado-Limite Último no ato da protensão: “Além das hipóteses básicas apresentadas em 17.2.2, devem ainda ser respeitadas as seguintes hipóteses suplementares:

a) considera-se resistência característica do concreto f_{ckj} aquela correspondente à idade fictícia j (em dias), no ato da protensão, sendo que a resistência de f_{ckj} deve ser claramente especificada no projeto;

b) para esta verificação, admitem-se os seguintes valores para os coeficientes de ponderação, com as cargas que efetivamente atuarem nessa ocasião:

$\gamma_c = 1,2$; $\gamma_s = 1,15$; $\gamma_p = 1,0$ na pré-tração; $\gamma_p = 1,1$ na pós-tração; $\gamma_f = 1,0$ para as ações desfavoráveis; $\gamma_f = 0,9$ para as ações favoráveis.”

¹⁰¹ “ P_i – força máxima aplicada à armadura de protensão pelo equipamento de tração; σ_{pi} – tensão na armadura ativa imediatamente após a aplicação da protensão.” NBR 6118 (9.1)

¹⁰² Os itens a) e b) estão atualizados conforme alteração contida na Errata 1 da NBR 6118, publicada em 22/11/2023.

¹⁰³ Geralmente com a utilização de **cordoalha engraxada**.

¹⁰⁴ “ $P_o(x)$ – força na armadura de protensão no tempo $t = 0$, na seção da abscissa x ; σ_{po} – tensão na armadura ativa correspondente a P_o .” NBR 6118 (9.1)

A NBR 6118 (17.2.4.3.2) admite que seja feita uma verificação simplificada: “Admite-se que a segurança em relação ao estado-limite último no ato de protensão seja verificada no estágio I (concreto não fissurado e comportamento elástico linear dos materiais), desde que as seguintes condições sejam satisfeitas:

a) a tensão máxima de compressão na seção de concreto, obtida através das solicitações ponderadas de $\gamma_p = 1,1$ e $\gamma_f = 1,0$, não pode ultrapassar os seguintes valores:

$$0,7 f_{ckj} \text{ para } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$$

$$0,7 [1,0 - (f_{ckj} - 50)/200] f_{ckj} \text{ para } 50 < f_{ck} \leq 90 \text{ MPa}$$

b) a tensão máxima de tração do concreto não pode ultrapassar 1,2 vez a resistência à tração f_{ctm} correspondente ao valor f_{ckj} especificado;

c) quando nas seções transversais existirem tensões de tração, deve haver armadura de tração calculada no estágio II. Para efeitos de cálculo, nessa fase da construção, a força nessa armadura pode ser considerada igual à resultante das tensões de tração no concreto no estágio I. Essa força não pode provocar, na armadura correspondente, acréscimos de tensão superiores a 150 MPa no caso de fios ou barras lisas e a 250 MPa em barras nervuradas.”

3.10 Posição dos Esforços Solicitantes nas Armaduras Ativas e Passivas

A NBR 6118 (17.2.4.1) prescreve que os esforços solicitantes nas armaduras ativas e passivas pode ser considerado aplicado no centro de gravidade, desde que: “As forças nas armaduras podem ser consideradas concentradas no centro de gravidade correspondente, se a distância deste centro de gravidade ao centro da armadura mais afastada, medida normalmente à linha neutra, for menor que 10 % de h . As armaduras laterais de vigas podem ser consideradas no cálculo dos esforços resistentes, desde que estejam convenientemente ancoradas e emendadas.”

3.11 Disposições Construtivas

No item 18.6 a NBR 6118 apresenta diversas disposições construtivas relativas aos cabos de protensão.

3.11.1 Traçado de Cabos de Protensão

“A armadura de protensão pode ser retilínea, curvilínea, poligonal ou de traçado misto, respeitada a exigência referente à armadura na região dos apoios, conforme 18.3.2.4-a) e b). Em apoios intermediários, deve ser disposta uma armadura, prolongamento das armaduras dos vãos adjacentes, capaz de resistir a uma força de tração igual a:

$$F_{Sd} = (a_\ell d) \Delta V_d + N_d \geq F_{Sd,min} = 0,2V_d \quad \text{Eq. 3.13}$$

Nessa expressão, ΔV_d é a máxima diferença de força cortante de um lado para o outro do apoio e N_d a força de tração eventualmente existente. A armadura a dispor nesse apoio é a obtida para o maior dos F_{Sd} calculados para cada um dos lados do apoio.” (NBR 6118, 18.6.1.1)

3.11.2 Curvaturas de Cabos de Protensão

“As curvaturas das armaduras de protensão devem respeitar os raios mínimos exigidos em função do diâmetro do fio, da cordoalha ou da barra, ou do diâmetro externo da bainha. O estabelecimento dos raios mínimos de curvatura pode ser realizado experimentalmente, desde que decorrente de investigação adequadamente realizada e documentada. Dispensa-se justificativa do raio de curvatura adotado, desde que ele seja superior a 4 m, 8 m e 12 m, respectivamente, nos

casos de fios, barras e cordoalhas. Quando a curvatura ocorrer em região próxima à face do elemento estrutural, provocando empuxo no vazio, devem ser projetadas armaduras que garantam a manutenção da posição do cabo sem afetar a integridade do concreto nessa região.” (NBR 6118, 18.6.1.2)

3.11.3 Curvatura nas Proximidades das Ancoragens

“Nas regiões próximas das ancoragens, os raios mínimos de curvatura dos fios, cordoalhas ou feixes podem ser reduzidos, desde que devidamente comprovada a possibilidade de redução por ensaios. Nessas regiões, devem ficar garantidas a resistência do concreto em relação ao fendilhamento e a manutenção da posição do cabo quando ele provocar empuxo no vazio.” (NBR 6118, 18.6.1.3)

3.11.4 Fixação Durante a Execução

“A permanência da armadura de protensão em sua posição durante a execução do elemento estrutural deve ser garantida por dispositivos apropriados.” (NBR 6118, 18.6.1.4)

3.11.5 Extremidades Retas

“Os cabos de protensão devem ter, em suas extremidades, segmentos retos que permitam o alinhamento de seus eixos com os eixos dos respectivos dispositivos de ancoragem. O comprimento desses segmentos não pode ser inferior a 100 cm. No caso de monocordoalhas engraxadas, este valor pode ser de 50 cm.” (NBR 6118, 18.6.1.5)

3.11.6 Prolongamento de Extremidade

“Os cabos de protensão devem ter prolongamentos de extremidade que se estendam além das ancoragens ativas, com comprimento adequado à fixação dos aparelhos de protensão.” (NBR 6118, 18.6.1.6)

3.11.7 Emendas

“As barras da armadura de protensão podem ser emendadas, desde que por rosca e luva. São permitidas as emendas individuais de fios, cordoalhas e cabos, por dispositivos especiais de eficiência consagrada pelo uso ou devidamente comprovada por ensaios conclusivos. O tipo e a posição das emendas devem estar perfeitamente caracterizados no projeto.” (NBR 6118, 18.6.1.7)

3.11.8 Ancoragens

“As ancoragens previstas devem respeitar o disposto em 9.4.7.” (NBR 6118, 18.6.1.8)

3.11.9 Agrupamento de Cabos na Pós-tração

“Os cabos alojados em bainhas podem constituir grupos de dois, três e quatro cabos nos trechos retos, desde que não ocorram disposições em linha com mais de dois cabos adjacentes. Nos trechos curvos podem ser dispostos apenas em pares, cujas curvaturas estejam em planos paralelos, de modo a não existir pressão transversal entre eles.” (NBR 6118, 18.6.2.2)

3.11.10 Espaçamentos Mínimos

“Os elementos da armadura de protensão devem estar suficientemente afastados entre si, de modo a ficar garantido o seu perfeito envolvimento pelo concreto. Os afastamentos na direção horizontal visam permitir a livre passagem do concreto e, quando for empregado vibrador de

agulha, a sua introdução e operação.” (NBR 6118, 18.6.2.3). Os valores mínimos dos espaçamentos estão indicados na Tabela 3.11 para a **pós-tração** e Tabela 3.12 para a **pré-tração**.

Tabela 3.11 – Espaçamentos mínimos – **Caso de pós-tração** (NBR 6118, Tabela 18.1).

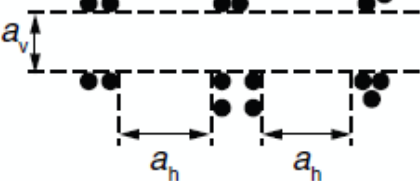
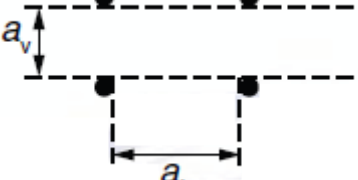
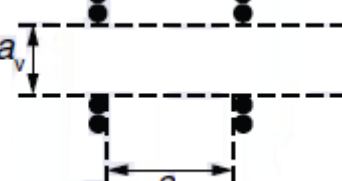
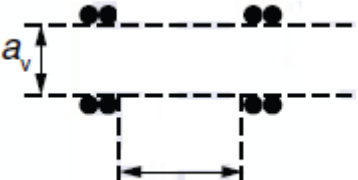
Disposição das bainhas	Espaço livre	
	a_h (horizontal)	a_v (vertical)
	$\geq \phi_{ext}$ $\geq 4 \text{ cm}$	$\geq \phi_{ext}$ $\geq 5 \text{ cm}$
	$\geq 1,2\phi_{ext}$ $\geq 4 \text{ cm}$	$\geq 1,5\phi_{ext}$ $\geq 5 \text{ cm}$
ϕ_{ext} é o diâmetro externo da bainha.		

Tabela 3.12 – Espaçamentos mínimos – **Caso de pré-tração** (NBR 6118, Tabela 18.2).

Disposição dos fios ou cordoalhas	Espaço livre	
	a_h (horizontal)	a_v (vertical)
	$\geq 2\phi$ $\geq 1,2d_{m\acute{a}x}$ $\geq 2 \text{ cm}$	$\geq 2\phi$ $\geq 1,2d_{m\acute{a}x}$ $\geq 2 \text{ cm}$
	$\geq 3\phi$ $\geq 1,2d_{m\acute{a}x}$ $\geq 2,5 \text{ cm}$	$\geq 3\phi$ $\geq 1,2d_{m\acute{a}x}$ $\geq 2 \text{ cm}$
	$\geq 3\phi$ $\geq 1,2d_{m\acute{a}x}$ $\geq 3 \text{ cm}$	$\geq 3\phi$ $\geq 1,2d_{m\acute{a}x}$ $\geq 3 \text{ cm}$
ϕ é o diâmetro do fio ou cordoalha. $d_{m\acute{a}x}$ é a dimensão máxima do agregado graúdo.		

4. ANÁLISE DE VIGAS À FLEXÃO

4.1 Introdução

Semelhantemente às peças de Concreto Armado, os problemas de flexão em peças de Concreto Protendido podem ser divididos em *problemas de verificação* ou *problemas de dimensionamento* (projeto). Nos *problemas de verificação* são conhecidos os materiais (concreto e aços das armaduras), os carregamentos atuantes, a seção transversal, as áreas de armaduras (ativas e passivas), e o valor e ponto de aplicação da força de protensão. Com essas informações podem ser determinadas as tensões normais atuantes no concreto da seção. Nos *problemas de dimensionamento* são conhecidos os materiais, os carregamentos atuantes e as tensões admissíveis.¹⁰⁵ Com essas informações o projetista deve determinar a forma e dimensões da seção transversal de concreto, a intensidade e a posição da força de protensão e as quantidades de armaduras (passivas e ativas). O problema é complicado, pois as diversas variáveis envolvidas são interdependentes, sendo que a alteração de uma afeta as demais, de modo que o melhor projeto é alcançado de forma iterativa.^[10]

Podem ser descritos três diferentes procedimentos para o projeto de peças protendidas à flexão:^[21]

1. adotar a seção transversal¹⁰⁶ e calcular o valor e excentricidade da força de protensão, em função dos carregamentos atuantes no estágio ou fase mais importante, seguida da verificação das tensões atuantes no concreto em todos os estágios dos diferentes carregamentos. Para finalizar é determinada a capacidade resistente à flexão da peça projetada, que pode ser modificada a fim de se obter um projeto melhor;
2. no caso de grandes vãos ou da adoção de seções não padronizadas, uma peça mais eficiente pode resultar tomando como base as tensões admissíveis do concreto na escolha da seção transversal, fazendo as tensões atuantes muito próximas das tensões admissíveis (máximas);¹⁰⁷
3. o balanceamento de carga, com o conceito de cargas equivalentes. Uma seção transversal é escolhida e são determinadas a força de protensão e o perfil da armadura ativa. Podem ser feitas modificações de forma a atender as tensões admissíveis e exigências de resistência.

Assim como no projeto de estruturas de Concreto Armado, no Concreto Protendido também há a necessidade de que sejam satisfeitas as condições dos Estados-Limites Último (ELU) e de Serviço (ELS). No caso do Concreto Armado o procedimento comum é projetar a peça para atender o ELU, e então verificar se a peça apresenta comportamento satisfatório em serviço, ou seja, se atende as exigências do ELS, como flecha, fissuração, fadiga, etc. No caso do Concreto Protendido o procedimento comum é projetar a peça para atender as exigências do ELS, e então verificar se a peça apresenta comportamento satisfatório no ELU, ou seja, se a capacidade resistente da peça é suficiente relativamente aos esforços solicitantes, e com uma conveniente margem de segurança. Esse é o procedimento utilizado porque as condições do ELS são mais críticas que do ELU, e as estruturas protendidas que atendem o ELS geralmente também atendem ao ELU.^[1]

As vigas e as lajes são as peças mais comuns nos projetos sob flexão em serviço. O projeto requer análises em alguns dos diferentes estágios dos carregamentos sobre as peças, como:

1. Protensão inicial, imediatamente após a transferência da protensão para a peça, quando somente a força P_0 pode estar atuando;
2. Protensão inicial com o momento fletor devido ao peso próprio da peça;
3. Protensão inicial com o momento fletor devido aos carregamentos permanentes;
4. Protensão final, após ocorridas todas as perdas de protensão, com os momentos fletores devidos aos carregamentos permanentes e variáveis;

¹⁰⁵ As tensões admissíveis foram apresentadas no item 3.7.

¹⁰⁶ Nos Estados Unidos e outros países, o projetista pode escolher uma seção entre várias seções transversais padronizadas, de diferentes formas e dimensões, como apresentadas no PCI Design Handbook^[24]. No Brasil não existem seções transversais padronizadas, e no caso de peças pré-moldadas, as fábricas têm cada uma as suas próprias seções.

¹⁰⁷ A seção determinada pode ser refinada a fim de atender exigências funcionais ou de resistência.

5. Capacidade última da peça na iminência da ruptura, com a consideração dos devidos coeficientes de ponderação.

O estudo apresentado neste capítulo é voltado a vigas e lajes de um único vão, isostáticas, muito comuns nas estruturas pré-moldadas, e que permite o conhecimento dos princípios básicos de uma maneira mais simples. O estudo de vigas contínuas será apresentado em outro capítulo.

4.2 Efetividade da Força de Protensão

Para projeto é útil expressar uma relação (R) entre a força de protensão atuante na armadura logo após a transferência da protensão para a peça (P_o) e a força final (P_∞):^[10]

$$P_\infty = R P_o \quad \text{Eq. 4.1}$$

A relação R é chamada *fator de efetividade* e expressa a razão entre as perdas de protensão progressivas, dependentes do tempo, e a força de protensão P_o :

$$\frac{P_o - P_\infty}{P_o} = 1 - R \quad \text{Eq. 4.2}$$

No início de um projeto é comum adotar um valor para a efetividade R, menor que 1,0, pois a força P_∞ é menor que a força P_o . R é tomado com base na experiência, em publicações ou projetos semelhantes. Posteriormente, cada perda de protensão individual é calculada, e o valor de R inicialmente adotado é verificado.

4.3 Tensões Elásticas

Em uma peça fletida submetida a uma força de protensão excêntrica P_o (Figura 4.1a), as tensões normais no concreto, nas fibras da base (b) e do topo (t), com a convenção de *negativa para compressão e positiva para tração*, são:

$$\sigma_b = -\frac{P_o}{A_c} - \frac{P_o e_p y_b}{I_c} \quad \text{Eq. 4.3}$$

$$\sigma_t = -\frac{P_o}{A_c} + \frac{P_o e_p y_t}{I_c} \quad \text{Eq. 4.4}$$

P_o = força de protensão imediatamente após a transferência da protensão para a peça;

A_c = área da seção transversal de concreto;

e_p = excentricidade da força de protensão; definida como a distância do centro de gravidade (CG) da seção transversal ao centro de gravidade (CG) da armadura de protensão;

y_b = distância da fibra da base ao CG da seção transversal;

y_t = distância da fibra do topo ao CG da seção transversal;

I_c = momento de inércia da seção transversal.

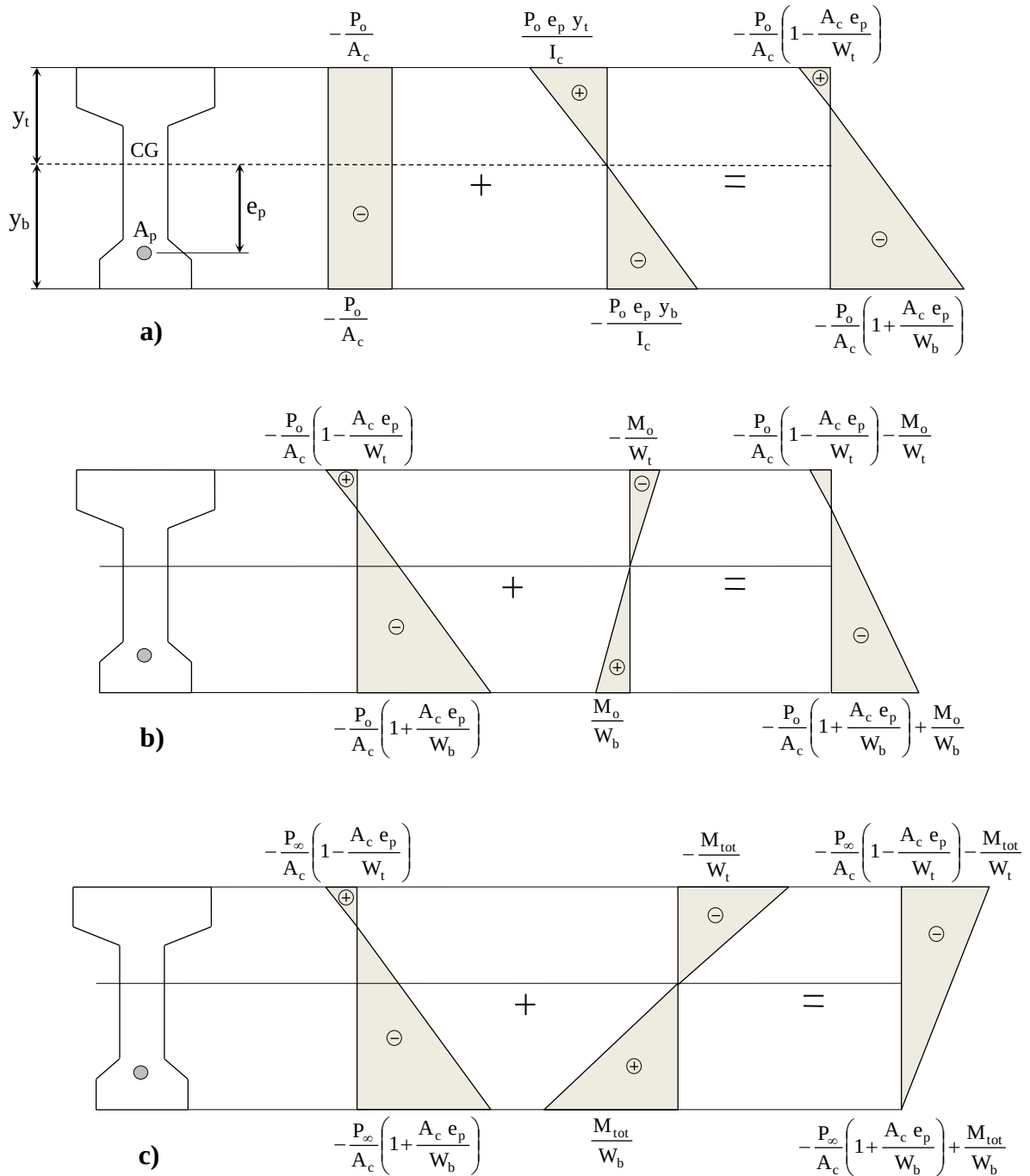


Figura 4.1 – Diagramas de tensões elásticas no concreto de seção não fissurada de viga.
a) efeito da força de protensão inicial; b) efeito da força de protensão inicial e do peso próprio;
c) efeito da força de protensão final e do carregamento de serviço.^[10]

Considerando os módulos de resistência à flexão relativos à base ($W_b = I_c/y_b$) e ao topo ($W_t = I_c/y_t$) da seção transversal, tem-se:

$$\sigma_b = -\frac{P_o}{A_c} \left(1 + \frac{A_c e_p}{W_b} \right) \quad \text{Eq. 4.5}$$

$$\sigma_t = -\frac{P_o}{A_c} \left(1 - \frac{A_c e_p}{W_t} \right) \quad \text{Eq. 4.6}$$

As equações Eq. 4.5 e Eq. 4.6 podem ser escritas de outro modo, considerando o raio de giração $r^2 = I_c/A_c$.¹⁰⁸

$$\sigma_b = -\frac{P_o}{A_c} \left(1 + \frac{e_p y_b}{r^2} \right) \quad \text{Eq. 4.7}$$

$$\sigma_t = -\frac{P_o}{A_c} \left(1 - \frac{e_p y_t}{r^2} \right) \quad \text{Eq. 4.8}$$

Nos casos mais comuns, com a armadura de protensão posicionada próxima à base da peça, a força de protensão quando aplicada causa o levantamento da peça ao longo do comprimento (contraflecha), que a leva a apoiar-se somente nas seções extremas, e consequentemente o momento fletor (M_o) devido ao peso próprio começa a atuar imediatamente. Na seção do meio do vão as tensões tornam-se (Figura 4.1b):

$$\sigma_{b,o} = -\frac{P_o}{A_c} \left(1 + \frac{A_c e_p}{W_b} \right) + \frac{M_o}{W_b} \quad \text{Eq. 4.9}$$

$$\sigma_{t,o} = -\frac{P_o}{A_c} \left(1 - \frac{A_c e_p}{W_t} \right) - \frac{M_o}{W_t} \quad \text{Eq. 4.10}$$

Nas etapas posteriores da vida da peça, outros carregamentos vão sendo adicionados, conforme o ritmo de construção da estrutura, e depois com o uso. Geralmente são impostas cargas permanentes adicionais ao peso próprio, em um tempo em que a força de protensão ainda é elevada, e as perdas dependentes do tempo não ocorreram, configurando uma situação que raramente seria importante no projeto. Desse modo, a situação de interesse é aquela em que atuam as ações variáveis (q), somadas com os carregamentos permanentes (g), que proporcionam o momento fletor total (M_{tot} - Figura 4.1c), e quando a força de protensão é a menos efetiva, que considera todas as perdas de protensão (Eq. 4.1; $P_\infty = RP_o$). As tensões na base e no topo são:

$$\sigma_{b,tot} = -\frac{RP_o}{A_c} \left(1 + \frac{A_c e_p}{W_b} \right) + \frac{M_{tot}}{W_b} \quad \text{Eq. 4.11}$$

$$\sigma_{t,tot} = -\frac{RP_o}{A_c} \left(1 - \frac{A_c e_p}{W_t} \right) - \frac{M_{tot}}{W_t} \quad \text{Eq. 4.12}$$

Na determinação das tensões elásticas são utilizados parâmetros relativos às propriedades da seção (A_c , I_c , etc.), e no caso de peças **pós-tensionadas**, a área das bainhas (dutos) antes do preenchimento com calda de cimento, descontada a área das cordoalhas, pode ser importante relativamente à área da seção transversal de concreto, de modo que as tensões devem ser calculadas com a área líquida da seção. Após o preenchimento com calda de cimento, apenas a área das cordoalhas é necessário considerar, ou seja, com a área da seção homogeneizada, embora, em muitos casos práticos de projeto, a seção homogeneizada não seja necessária, pois as diferenças são usualmente pequenas.^[10] Quando a quantidade de armaduras (ativa e passiva) for grande e significativa em relação à seção transversal, a influência das armaduras deve ser considerada fazendo-se a homogeneização da seção transversal.

¹⁰⁸ As equações com o raio de giração são comuns nos livros escritos por autores dos Estados Unidos. No Brasil é mais comum utilizar equações com o módulo de resistência W .

4.4 Comportamento de Vigas na Flexão

O comportamento de uma viga protendida simplesmente apoiada, subarmada, com armadura aderente e submetida a um carregamento crescente, pode ser descrito pelo diagrama carga x flecha mostrado na Figura 4.2, com as definições: a_{pi} = contraflecha devida à protensão inicial; a_{pe} = contraflecha devida à protensão efetiva; a_{g1} = flecha devida ao peso próprio.

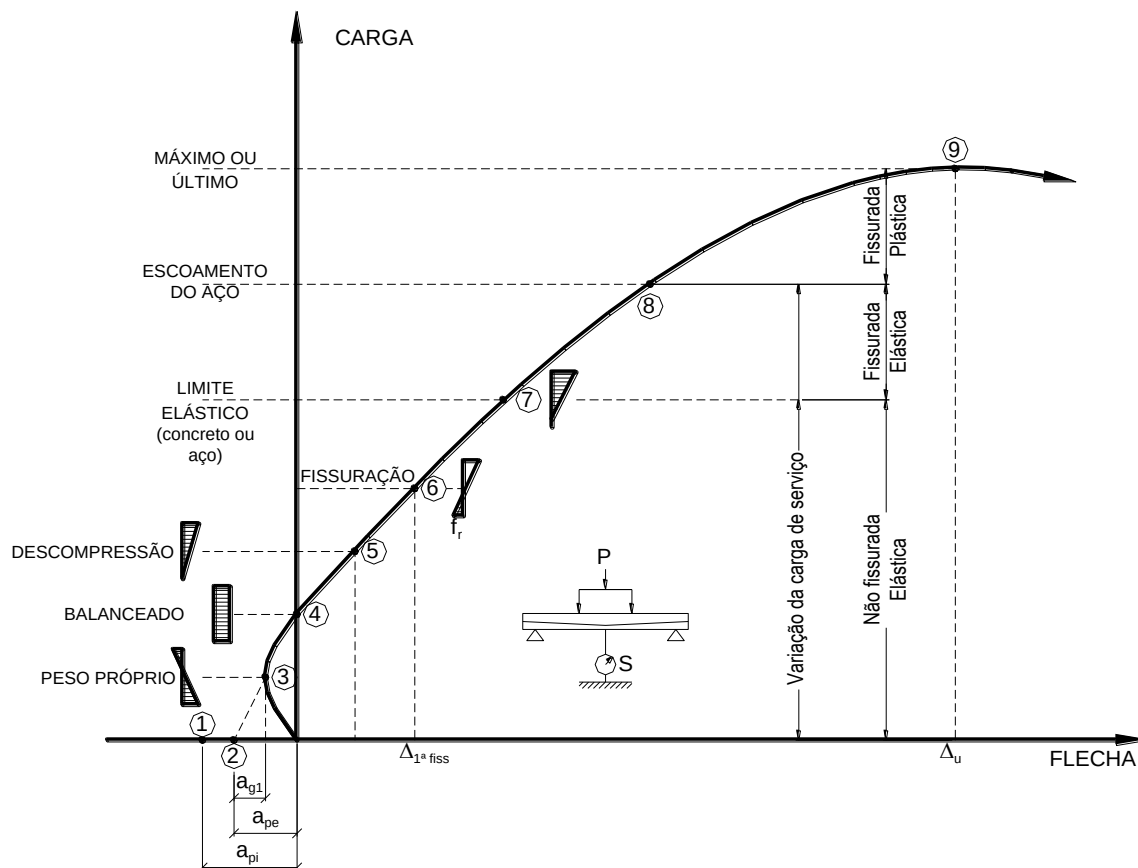


Figura 4.2 – Diagrama carga x flecha de viga protendida subarmada.^[2,5]

Os pontos 1 e 2 correspondem à contraflecha na viga, assumida sem o peso próprio. No entanto, quando a protensão é aplicada, o peso próprio age automaticamente. O ponto 3 representa a contraflecha devida aos efeitos combinados do peso próprio e da força de protensão efetiva (P_e). O ponto 4 representa a flecha zero e corresponde ao estado uniforme de tensão na seção. O ponto 5 representa a descompressão ou tensão zero na fibra da base da viga; o ponto 6 representa a flecha correspondente à primeira fissura. Além do ponto 6 a viga protendida comporta-se de modo similar a uma viga fissurada de Concreto Armado. Se a carga é aumentada, no ponto 7 o concreto ou o aço alcançam o regime plástico. No ponto 8 o aço escoar e, finalmente, a capacidade máxima (carga ou momento fletor último) da viga é obtida (ponto 9).^[2,5]

4.5 Viga Parcialmente Protendida

Na **protensão parcial** a tensão à tração na flexão é permitida para o carregamento total da peça em serviço, e por isso ocorrem fissuras na seção transversal, limitadas a aberturas aceitáveis, como 0,2 mm de acordo com a norma brasileira NBR 6118.

Historicamente, durante o desenvolvimento inicial do Concreto Protendido, o objetivo da protensão era a completa eliminação das tensões de tração no concreto, para as cargas de serviço da peça, a chamada *protensão completa*. Para que seja alcançada é necessário que a força de protensão seja de intensidade muito alta, e, embora possa ser útil às estruturas inseridas em ambientes agressivos, traz alguns problemas, particularmente naquelas onde as cargas variáveis raramente ocorrem. A força de protensão elevada pode ocasionar contraflecha exagerada, que aumenta com o

tempo devido à fluência do concreto.^[21] O encurtamento longitudinal do concreto também pode ser acentuado, e a perda de protensão, somada à originada da fluência do concreto, pode ser grande. Ainda, no caso de carregamento excessivo não previsto, a ruptura pode acontecer de maneira frágil e violenta, sem sinais de aviso antes do colapso. Portanto, a *protensão completa* deve ser aplicada somente nas situações onde a agressividade à estrutura é alta, como por exemplo nos ambientes com influência de agentes marítimos.

Na atualidade existe o reconhecimento de que a *protensão parcial* apresenta aspectos positivos e que devem ser explorados em projeto. O *carregamento total* ocorre raramente ao longo do tempo da vida útil de uma viga, e comumente muitas suportam, na maior parte do tempo, apenas o carregamento permanente, ou este somado com uma parcela das ações variáveis. Assim, uma viga pode ser projetada com a intensidade da força de protensão escolhida de tal forma que permita à viga fissurar sob determinado nível de carregamento, e com as fissuras fechando-se sob carregamentos menores, que são aqueles que atuam na maior parte do tempo. A escolha do nível de protensão deve considerar a natureza do carregamento (como por exemplo pontes rodoviárias ou ferroviárias, reservatórios), a relação entre as cargas variáveis e as permanentes, a frequência de ocorrência do carregamento total, e a questão da agressividade ambiental, entre outros.^[21]

Com um menor nível de protensão, a contraflecha e as perdas por encurtamento e fluência do concreto são menores, e a ruptura ocorre de maneira avisada, consequência da fissuração e da flecha acentuadas. A quantidade de armadura de protensão resulta menor que na protensão completa, mas a segurança da peça à flexão é garantida pela verificação da capacidade resistente, sendo comum nas vigas parcialmente protendidas a utilização de armadura passiva¹⁰⁹ em conjunto com a armadura ativa, o que proporciona a necessária segurança à flexão.

4.6 Determinação da Força de Protensão e da Excentricidade da Armadura de Protensão

Existem algumas metodologias diferentes para a determinação da excentricidade e da força de protensão na armadura de protensão de uma peça. O ponto de partida pode ser uma determinada condição ou exigência para a peça em serviço, como uma limitação da flecha por exemplo, onde a intensidade da força de protensão, e a disposição da armadura de protensão, devem ser determinados para alcançar o objetivo.^[1]

Tensões máximas no concreto (**tensões admissíveis**) podem ser escolhidas de modo a condicionar a determinação da força de protensão e da excentricidade, permitindo-se ou não a fissuração da peça. No entanto, o atendimento das tensões admissíveis não garante o atendimento às condições de serviço, como flecha, abertura de fissura, etc., e verificações adicionais são necessárias, como por exemplo a capacidade da peça à flexão, como apresentado no Capítulo 6.

Neste item é apresentado um método que estima a força de protensão final (P_{∞}), já sendo conhecida a excentricidade (e_p) da armadura de protensão, e outros métodos que determinam o par excentricidade e força de protensão que atua imediatamente após a transferência da protensão para a peça.

4.6.1 Estimativa da Força de Protensão Final (P_{∞}) com a Excentricidade Conhecida

Dentre os métodos de projeto de uma peça fletida, o procedimento apresentado neste item faz uma estimativa da força de protensão final (P_{∞}), que é aquela que atua na peça após ocorridas todas as perdas de protensão, configurando a menor força de protensão. O método parte dos Estados-Limites de Serviço, conforme exigências da NBR 6118, e alguns parâmetros necessitam ser conhecidos, como os carregamentos atuantes, materiais e tensões admissíveis do concreto, seção transversal, excentricidade da armadura de protensão, nível de protensão e uma estimativa da perda de protensão

¹⁰⁹ Como armadura passiva, além dos aços usualmente aplicados nas peças de Concreto Armado, opcionalmente aços de protensão também podem ser usados, sem a protensão prévia. Apresentam resistências três vezes mais elevadas, e uma comparação de custos pode ser feita para a escolha.

total. Com o valor conhecido de P_∞ , podem ser determinadas a força de protensão inicial aplicada pelo cilindro hidráulico (P_i) e a área de armadura de protensão (A_p).

Os seguintes carregamentos são considerados: g_1 (peso próprio da peça), g_2 (carga permanente adicional), q_1 (carga variável principal), q_2 (carga variável secundária), e admitindo-se que causem tração na borda inferior da peça. São apresentadas as formulações para dois níveis de protensão (*completa* e *limitada*), conforme exigências indicadas pela NBR 6118 (ver Tabela 3.9 no item 3.6).

As combinações de serviço das ações também devem ser conhecidas, conforme apresentadas na Tabela 3.5 do item 3.3.5.2. Os coeficientes redutores de carga variável (ψ_1 e ψ_2) encontram-se na Tabela 3.7 do item 3.3.6.1 (ver também o item 3.3.6.2).

4.6.1.1 Protensão Completa

Devem ser respeitados dois Estados-Limites de Serviço (ver item 3.2.2), o de Descompressão (ELS-D) e o de Formação de Fissuras (ELS-F).^[4,22]

a) Estado-Limite de Descompressão (ELS-D) para combinação frequente

A soma das tensões atuantes na borda inferior deve resultar zero (Figura 4.3), o que possibilita determinar a tensão de compressão devida à força de protensão ($\sigma_{bp\infty}$):

$$\sigma_{bg1} + \sigma_{bg2} + \psi_1 \sigma_{bq1} + \psi_2 \sigma_{bq2} + \sigma_{bp\infty} = 0 \quad \text{Eq. 4.13}$$

Um primeiro valor para a força de protensão final estimada ($P_{\infty, \text{est}, A}$) resulta conforme a Eq. 4.5, com $\sigma_{bp\infty}$:

$$\sigma_{bp\infty} = -\frac{P_{\infty, \text{est}, A}}{A_c} \left(1 + \frac{A_c e_p}{W_b} \right) \quad \text{Eq. 4.14}$$

A tensão final na borda do topo deve respeitar uma tensão limite de compressão (*tensão admissível* - $\bar{\sigma}_{c, \text{tot}}$), que a NBR 6118 define como $0,6f_{ck}$ para a combinação frequente (ver item 3.7),¹¹⁰ sendo também usual em projeto tomar-se o valor $0,5f_{ck}$.

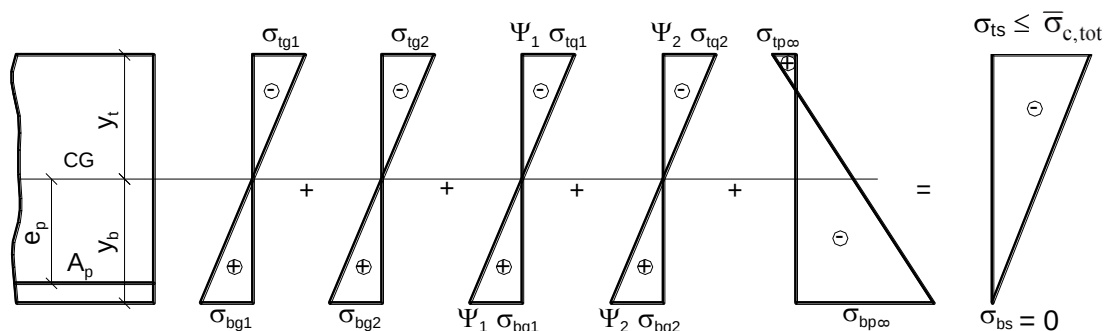


Figura 4.3 – Tensões na seção transversal na protensão completa, para o Estado-Limite de Descompressão com combinação frequente de ações.

b) Estado-Limite de Formação de Fissuras (ELS-F) para combinação rara

A soma das tensões atuantes na borda inferior deve respeitar a tensão limite de tração (*tensão admissível*, Figura 4.4), isto é, $\sigma_{bs} = \alpha f_{ct}$, o que possibilita determinar a tensão devida à força de protensão ($\sigma_{bp\infty}$):

$$\sigma_{bg1} + \sigma_{bg2} + \sigma_{bq1} + \psi_1 \sigma_{bq2} + \sigma_{bp\infty} = \alpha f_{ct} \quad \text{Eq. 4.15}$$

¹¹⁰ Até a versão de 2014 a NBR 6118 não definia esta tensão limite.

A tensão αf_{ct} correspondente ao surgimento da primeira fissura em uma seção da peça. α foi apresentado na Eq. 2.5 e αf_{ct} na Eq. 2.6 (ver item 2.1.3), com: $\alpha f_{ct} = \alpha \cdot 0,7 \cdot 0,3 \sqrt[3]{f_{ck}^2}$. Portanto, $\sigma_{bP\infty}$ resulta de:

$$\sigma_{bg1} + \sigma_{bg2} + \sigma_{bq1} + \psi_1 \sigma_{bq2} + \sigma_{bP\infty} = \begin{cases} 1,2 \cdot 0,7 \cdot 0,3 \sqrt[3]{f_{ck}^2} & \rightarrow \text{para seções T ou duplo T;} \\ 1,3 \cdot 0,7 \cdot 0,3 \sqrt[3]{f_{ck}^2} & \rightarrow \text{para seções I ou T invertido;} \\ 1,5 \cdot 0,7 \cdot 0,3 \sqrt[3]{f_{ck}^2} & \rightarrow \text{para seções retangulares.} \end{cases} \quad \text{Eq. 4.16}$$

O segundo valor para a força de protensão final estimada ($P_{\infty,est,B}$) resulta da Eq. 4.5, com $\sigma_{bP\infty}$:

$$\sigma_{bP\infty} = -\frac{P_{\infty,est,B}}{A_c} \left(1 + \frac{A_c e_p}{W_b} \right) \quad \text{Eq. 4.17}$$

A tensão final na borda do topo (σ_{ts}) deve respeitar a tensão admissível à compressão do concreto ($\bar{\sigma}_{c,tot}$), que a NBR 6118 define como $0,6f_{ck}$ para a combinação rara (somente para a *protensão completa*, ver item 3.7), sendo também usual em projeto tomar-se o valor $0,5f_{ck}$.

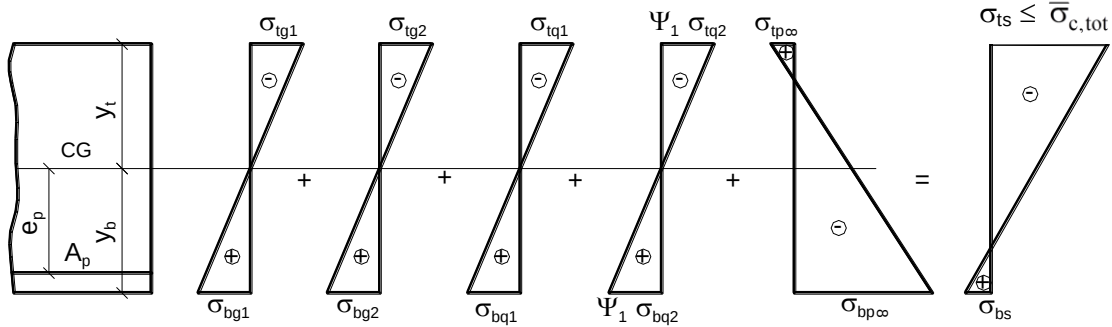


Figura 4.4 – Tensões na seção transversal na protensão completa, para o Estado-Limite de Formação de Fissuras com combinação rara de ações.

A força de protensão final estimada é a de maior valor:

$$P_{\infty,est} \geq \begin{cases} P_{\infty,est,A} \\ P_{\infty,est,B} \end{cases} \quad \text{Eq. 4.18}$$

4.6.1.2 Protensão Limitada

O procedimento de cálculo de $P_{\infty,est}$ é semelhante ao da *protensão completa*, mas com diferenças nas combinações de ações (ver Tabela 3.9 no item 3.6) a serem consideradas nos Estados-Limites de Serviço.^[4,22]

a) Estado-Limite de Descompressão (ELS-D) para combinação quase permanente

A soma das tensões atuantes na borda inferior deve resultar zero (Figura 4.5), o que possibilita determinar a tensão de compressão devida à força de protensão ($\sigma_{bP\infty}$):

$$\sigma_{bg1} + \sigma_{bg2} + \psi_2 \sigma_{bq1} + \psi_2 \sigma_{bq2} + \sigma_{bP\infty} = 0 \quad \text{Eq. 4.19}$$

Um primeiro valor para a força de protensão final estimada ($P_{\infty,est,A}$) resulta da Eq. 4.5, com $\sigma_{bP\infty}$:

$$\sigma_{bP\infty} = -\frac{P_{\infty,est,A}}{A_c} \left(1 + \frac{A_c e_p}{W_b} \right) \quad \text{Eq. 4.20}$$

A tensão final na borda do topo deve respeitar uma tensão limite de compressão (*tensão admissível* - $\bar{\sigma}_{c,tot}$), que a NBR 6118 define como $0,45f_{ck}$ para a combinação quase permanente (ver item 3.7).

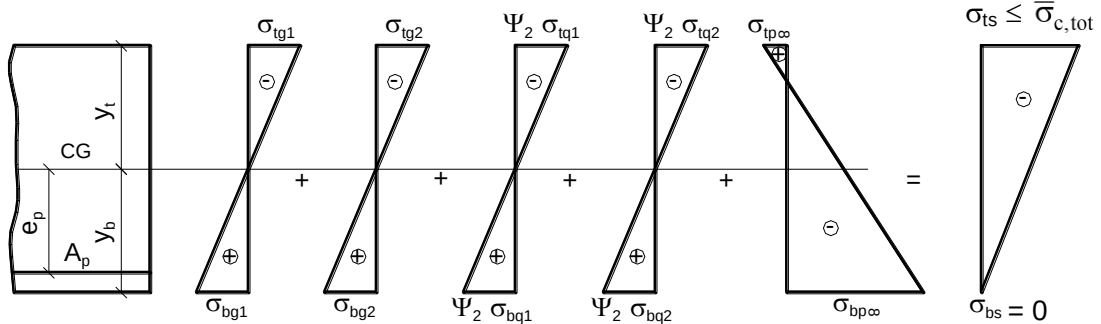


Figura 4.5 – Tensões na seção transversal na protensão limitada, para o Estado-Limite de Descompressão com combinação quase permanente de ações.

b) Estado-Limite de Formação de Fissuras (ELS-F) para combinação frequente

A soma das tensões atuantes na borda inferior deve respeitar a tensão limite de tração (tensão admissível, Figura 4.6), isto é, $\sigma_{bs} = \alpha f_{ct}$, o que possibilita determinar a tensão devida à força de protensão ($\sigma_{bP\infty}$):

$$\sigma_{bg1} + \sigma_{bg2} + \Psi_1 \sigma_{bq1} + \Psi_2 \sigma_{bq2} + \sigma_{bP\infty} = \alpha f_{ct} \quad \text{Eq. 4.21}$$

A tensão αf_{ct} correspondente ao surgimento da primeira fissura em uma seção da peça. α foi apresentada na Eq. 2.5 e αf_{ct} na Eq. 2.6 (ver item 2.1.3), com: $\alpha f_{ct} = \alpha \cdot 0,7 \cdot 0,3 \sqrt[3]{f_{ck}^2}$. Portanto, $\sigma_{bP\infty}$ resulta de:

$$\sigma_{bg1} + \sigma_{bg2} + \Psi_1 \sigma_{bq1} + \Psi_2 \sigma_{bq2} + \sigma_{bP\infty} = \begin{cases} 1,2 \cdot 0,7 \cdot 0,3 \sqrt[3]{f_{ck}^2} & \rightarrow \text{para seções T ou duplo T;} \\ 1,3 \cdot 0,7 \cdot 0,3 \sqrt[3]{f_{ck}^2} & \rightarrow \text{para seções I ou T invertido;} \\ 1,5 \cdot 0,7 \cdot 0,3 \sqrt[3]{f_{ck}^2} & \rightarrow \text{para seções retangulares.} \end{cases} \quad \text{Eq. 4.22}$$

O segundo valor para a força de protensão final estimada ($P_{\infty,est,B}$) resulta da Eq. 4.5, com $\sigma_{bP\infty}$:

$$\sigma_{bP\infty} = -\frac{P_{\infty,est,B}}{A_c} \left(1 + \frac{A_c e_p}{W_b} \right) \quad \text{Eq. 4.23}$$

A tensão final na borda do topo (σ_{ts}) deve respeitar a tensão admissível à compressão do concreto ($\bar{\sigma}_{c,tot}$), que a NBR 6118 define como $0,6f_{ck}$ para a combinação frequente (ver item 3.7), sendo também usual em projeto tomar-se o valor $0,5f_{ck}$.

A força de protensão final estimada é a de maior valor:

$$P_{\infty,est} \geq \begin{cases} P_{\infty,est,A} \\ P_{\infty,est,B} \end{cases} \quad \text{Eq. 4.24}$$

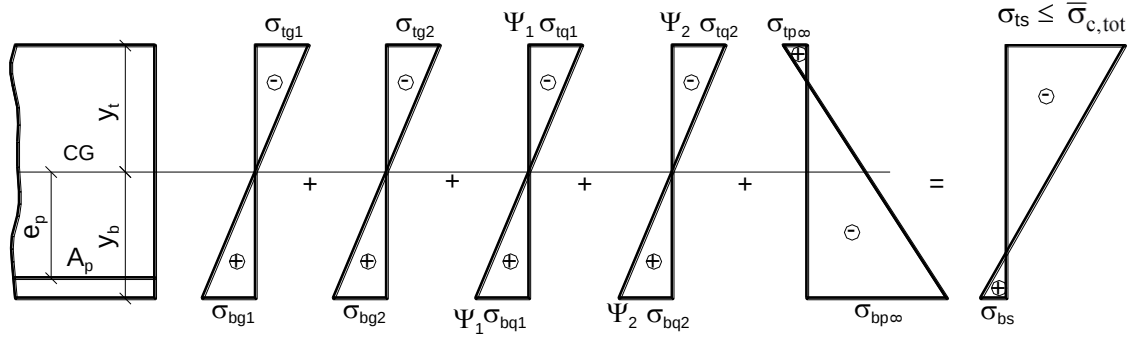


Figura 4.6 – Tensões na seção transversal na protensão limitada, para o Estado-Limite de Formação de Fissuras com combinação frequente de ações.

4.6.1.3 Protensão Parcial

No caso da protensão parcial o Estado-Limite de Abertura das Fissuras (ELS-W, ver item 3.2.2) deve ser considerado (ver Tabela 3.9), com abertura máxima de fissura de 0,2 mm. Desse modo, na Eq. 4.21 pode-se arbitrar uma tensão de tração superior a αf_{ct} , e assim determinar a força de protensão final com a Eq. 4.23. O cálculo posterior da abertura da fissura permite verificar se a abertura limite de 0,2 mm foi obedecida.

4.6.1.4 Força de Protensão no Estiramento (P_i) e Cálculo da Área de Armadura de Protensão

Após a força de protensão final ($P_{\infty,est}$) ser estimada, a força de estiramento da armadura de protensão (P_i) pode ser também estimada. A diferença entre as duas forças é a perda de protensão total, que pode ser inicialmente arbitrada pelo projetista (ΔP_{arb}), em função da experiência com base projetos semelhantes, da literatura, etc. Excluída a perda por atrito dos cabos, a perda total varia entre 20 e 30 %, ^[4] e desse modo pode-se estimar a força no cilindro hidráulico:

$$P_{i,est} = \frac{P_{\infty,est}}{(1 - \Delta P_{arb})} \quad \text{Eq. 4.25}$$

Com os limites de tensão na armadura de protensão nas operações de estiramento, apresentados no item 3.8, determina-se a área de armadura de protensão:

$$A_{p,est} = \frac{P_{i,est}}{\sigma_{pi,lim}} \quad \text{Eq. 4.26}$$

Com auxílio de tabelas (ver por exemplo Tabela 2.2, Tabela 2.5 ou Tabela 2.11) determina-se a área de **um elemento** ($A_{p,elem}$ - fio, cordoalha ou barra), conforme o tipo de armadura a ser utilizada, e assim o número necessário para atender a área efetiva ($A_{p,ef}$):

$$n = \frac{A_{p,est}}{A_{p,elem}} \quad \text{Eq. 4.27}$$

Geralmente a quantidade **n** resulta decimal, de modo que deve ser arredondada para um número inteiro (n_{int}). A armadura de protensão efetiva resulta:

$$A_{p,ef} = A_p = n_{int} \cdot A_{p,elem} \quad \text{Eq. 4.28}$$

E finalmente determina-se a força de protensão efetiva do estiramento ($P_{i,ef}$), aproveitando ao máximo a capacidade resistente do aço empregado:

$$P_{i,ef} = P_i = A_p \cdot \sigma_{pi,lim} \quad \text{Eq. 4.29}$$

Conhecida a área de armadura de protensão (A_p) e a força de protensão inicial (P_i), as perdas individuais de força de protensão podem ser calculadas, e assim as forças de protensão representativas (P_a , P_o , P_l). Com a perda de protensão total calculada (ΔP_{tot}), a força de protensão final fica determinada:

$$P_{\infty} = P_i - \Delta P_{tot} \quad \text{Eq. 4.30}$$

a qual será próxima do valor de $P_{\infty,est}$.

4.6.1.5 Exemplo 1 – Protensão Completa em Viga Duplo T Pré-tensionada

Considerando **protensão completa** determinar a força de protensão final estimada para uma viga biapoiada pré-moldada duplo T de uma cobertura, **pré-tensionada** e com vão ℓ de 15,0 m. São conhecidos:¹¹¹

- concreto C50 ($f_{ck} = 50$ MPa), $f_{ckj} = 35$ MPa (resistência do concreto na data da transferência da protensão);
- tensão admissível à compressão: $\bar{\sigma}_{c,tot} \leq -0,6f_{ck}$ para combinações frequente e rara. Será adotado o valor $\bar{\sigma}_{c,tot} = -0,5 \cdot 50 = -25,0$ MPa;
- peso específico do CA e CP de $\gamma_{conc} = 25$ kN/m³;
- cordoalha CP 190 RB ($f_{ptk} = 1.900$ MPa);
- carregamentos uniformemente distribuídos sobre a mesa da seção duplo T: permanente adicional de 2,0 kN/m², carga variável única de 0,75 kN/m²;
- excentricidade da armadura de protensão: $e_p = 250$ mm;
- fator redutor conforme a Tabela 3.7 (item 3.3.6.1): $\psi_1 = 0,4$.

Resolução

a) estimativa da altura da viga

Para uma relação $\ell/h \leq 30$ para a seção duplo T resulta: $h \geq 15,0/30 \geq 0,5$ m. A seção adotada está mostrada na Figura 4.7, com as seguintes propriedades geométricas:¹¹²

$$\begin{aligned} A_c &= 2,648 \times 10^5 \text{ mm}^2 \\ I_c &= 6,041 \times 10^9 \text{ mm}^4 \\ y_t &= 150 \text{ mm} \\ y_b &= 350 \text{ mm} \\ W_t &= 40,23 \times 10^6 \text{ mm}^3 \\ W_b &= 17,26 \times 10^6 \text{ mm}^3 \\ \text{peso próprio: } g_{pp} &= g_1 = 6,62 \text{ kN/m} \end{aligned}$$

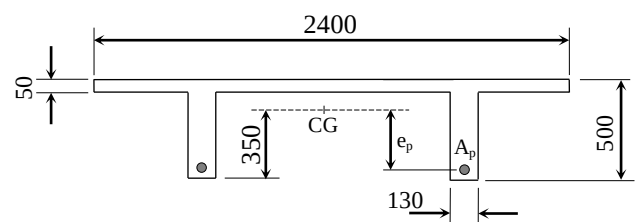


Figura 4.7 – Dimensões (mm) da seção transversal da viga duplo T.

b) Momentos fletores e tensões normais no concreto

$$\text{Do peso próprio: } M_{g1} = \frac{g_1 \ell^2}{8} = \frac{6,62 \cdot 15^2}{8} = 18.619 \text{ kN.cm}$$

¹¹¹ Este exemplo toma como base os dados apresentados por Hurst (p. 240), que determinou a força de protensão por meio de tensões admissíveis conforme o procedimento que será visto no item 4.6.2. (HURST, M.K. *Prestressed concrete design*. New York, Ed. Chapman and Hall, 1988, 262p.).

¹¹² As propriedades geométricas tomam como unidade o mm, no entanto, nos cálculos será aplicado o cm.

As cargas permanente adicional ($g_2 = 2,0 \text{ kN/m}^2$) e variável ($q_1 = 0,75 \text{ kN/m}^2$) atuam sobre a mesa da viga, na largura de 2,4 m:

$$g_2 = 2,0 \cdot 2,4 = 4,8 \text{ kN/m} \quad ; \quad q_1 = 0,75 \cdot 2,4 = 1,8 \text{ kN/m}$$

$$\text{Da carga } g_2 : M_{g_2} = \frac{g_2 \ell^2}{8} = \frac{4,8 \cdot 15^2}{8} = 13.500 \text{ kN.cm}$$

$$\text{Da carga } q_1 : M_{q_1} = \frac{q_1 \ell^2}{8} = \frac{1,8 \cdot 15^2}{8} = 5.063 \text{ kN.cm}$$

e as tensões normais no concreto na base e no topo da seção transversal (ver Figura 4.8 e Figura 4.9):

$$\sigma_{bg1} = \frac{M_{g1}}{W_b} = \frac{18.619}{17.260} = 1,079 \text{ kN/cm}^2 \quad ; \quad \sigma_{tg1} = -\frac{M_{g1}}{W_t} = -\frac{18.619}{40.230} = -0,463 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{bg2} = \frac{M_{g2}}{W_b} = \frac{13.500}{17.260} = 0,782 \text{ kN/cm}^2 \quad ; \quad \sigma_{tg2} = -\frac{M_{g2}}{W_t} = -\frac{13.500}{40.230} = -0,336 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{bq1} = \frac{M_{q1}}{W_b} = \frac{5.063}{17.260} = 0,293 \text{ kN/cm}^2 \quad ; \quad \sigma_{tq1} = -\frac{M_{q1}}{W_t} = -\frac{5.063}{40.230} = -0,126 \text{ kN/cm}^2$$

d) Estado-Limite de Descompressão (ELS-D) para combinação frequente

As tensões na base da viga são (Eq. 4.13):

$$\sigma_{bg1} + \sigma_{bg2} + \psi_1 \sigma_{bq1} + \psi_2 \sigma_{bq2} + \sigma_{bP\infty} = 0 \quad \rightarrow \quad 1,079 + 0,782 + 0,4 \cdot 0,293 + \sigma_{bP\infty} = 0$$

$$\sigma_{bP\infty} = -1,978 \text{ kN/cm}^2 \quad (\text{tensão de compressão})$$

Força de protensão final estimada ($P_{\infty, \text{est}, A}$), conforme Eq. 4.14:

$$\sigma_{bP\infty} = -\frac{P_{\infty, \text{est}, A}}{A_c} \left(1 + \frac{A_c e_p}{W_b} \right) \quad \rightarrow \quad -1,978 = -\frac{P_{\infty, \text{est}, A}}{2648} \left(1 + \frac{2648 \cdot 25}{17260} \right) \quad \rightarrow \quad P_{\infty, \text{est}, A} = 1.083 \text{ kN}$$

A tensão no topo da viga, devida à $P_{\infty, \text{est}, A}$, é (Eq. 4.6):

$$\sigma_{tP\infty} = -\frac{P_{\infty, \text{est}, A}}{A_c} \left(1 - \frac{A_c e_p}{W_t} \right) \quad \rightarrow \quad \sigma_{tP\infty} = -\frac{1083}{2648} \left(1 - \frac{2648 \cdot 25}{40230} \right) = 0,264 \text{ kN/cm}^2 \quad (\text{tensão de tração})$$

$$\sigma_{tg1} + \sigma_{tg2} + \psi_1 \sigma_{tq1} + \psi_2 \sigma_{tq2} + \sigma_{tP\infty} = \sigma_{ts} \quad \rightarrow \quad -0,463 - 0,336 + 0,4(-0,126) + 0,264 = \sigma_{ts}$$

$$\sigma_{ts} = -0,585 \text{ kN/cm}^2 \quad (\text{tensão de compressão})$$

$$\sigma_{ts} = -5,85 \text{ MPa} \leq \bar{\sigma}_{c, \text{tot}} = -25,0 \text{ MPa} \quad \rightarrow \quad \text{ok! (comparação com valores absolutos)}$$

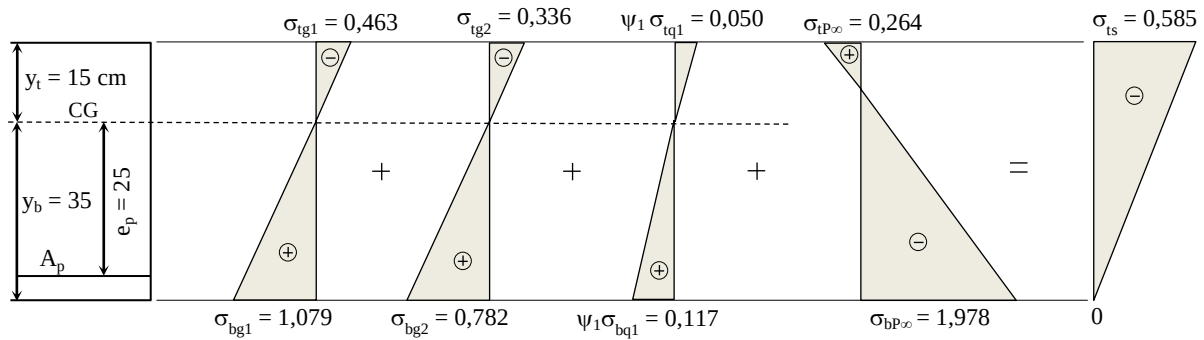


Figura 4.8 – Tensões normais (kN/cm^2) para o Estado-Limite de Descompressão com a combinação frequente de ações.

e) Estado-Limite de Formação de Fissuras (ELS-F) para combinação rara

As tensões na base da viga são (Eq. 4.15):

$$\sigma_{bg1} + \sigma_{bg2} + \sigma_{bq1} + \psi_1 \sigma_{bq2} + \sigma_{bp\infty} = \alpha f_{ct} \quad \rightarrow \quad 1,079 + 0,782 + 0,293 + \sigma_{bp\infty} = 0,342$$

com a Eq. 4.16 para seção duplo T e $f_{ck} = 50 \text{ MPa}$:¹¹³ $\alpha f_{ct} = 1,2 \cdot 0,7 \cdot 0,3 \sqrt[3]{50^2} = 3,42 \text{ MPa} = 0,342 \text{ kN/cm}^2$

$$\sigma_{bp\infty} = -1,812 \text{ kN/cm}^2 \quad (\text{tensão de compressão - Figura 4.9})$$

Força de protensão final estimada ($P_{\infty, \text{est}, B}$), conforme Eq. 4.17:

$$\sigma_{bp\infty} = -\frac{P_{\infty, \text{est}, B}}{A_c} \left(1 + \frac{A_c e_p}{W_b} \right) \quad \rightarrow \quad -1,812 = -\frac{P_{\infty, \text{est}, B}}{2648} \left(1 + \frac{2648 \cdot 25}{17260} \right) \quad \rightarrow \quad P_{\infty, \text{est}, B} = 992 \text{ kN}$$

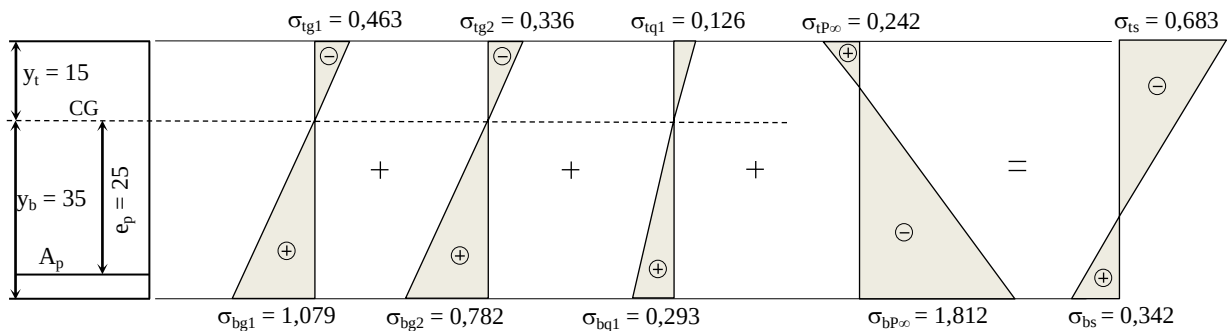


Figura 4.9 – Tensões normais (kN/cm^2) para o Estado-Limite de Formação de Fissuras com a combinação rara de ações.

A tensão no topo da viga, para a força $P_{\infty, \text{est}, B}$, é:

$$\sigma_{tp\infty} = -\frac{P_{\infty, \text{est}}}{A_c} \left(1 - \frac{A_c e_p}{W_t} \right) \quad \rightarrow \quad \sigma_{tp\infty} = -\frac{992}{2648} \left(1 - \frac{2648 \cdot 25}{40230} \right) = 0,242 \text{ kN/cm}^2 \quad (\text{tensão de tração})$$

$$\sigma_{tg1} + \sigma_{tg2} + \sigma_{tq1} + \psi_1 \sigma_{tq2} + \sigma_{tp\infty} = \sigma_{ts} \quad \rightarrow \quad -0,463 - 0,336 - 0,126 + 0,242 = \sigma_{ts}$$

$$\sigma_{ts} = -0,683 \text{ kN/cm}^2 \quad (\text{tensão de compressão})$$

$$\sigma_{ts} = -6,83 \text{ MPa} \leq \bar{\sigma}_{c, \text{tot}} = -25,0 \text{ MPa} \quad \rightarrow \quad \text{ok! (comparação com valores absolutos)}$$

¹¹³ A resistência do concreto à compressão considerada como existente juntamente com a força de protensão final é o f_{ck} .

A força de protensão final estimada¹¹⁴ é (Eq. 4.18):

$$P_{\infty, \text{est}} \geq \begin{cases} P_{\infty, \text{est}, A} \\ P_{\infty, \text{est}, B} \end{cases} \rightarrow P_{\infty, \text{est}} \geq \begin{cases} 1.083 \text{ kN} \\ 992 \text{ kN} \end{cases} \rightarrow P_{\infty, \text{est}} = 1.083 \text{ kN}$$

f) Força de protensão P_i e cálculo da armadura de protensão

Com uma perda de protensão total arbitrada em $\Delta P_{\text{arb}} = 30 \%$, a força de estiramento da armadura de protensão no cilindro hidráulico (P_i) pode ser também estimada (Eq. 4.25):

$$P_{i, \text{est}} = \frac{P_{\infty, \text{est}}}{(1 - \Delta P_{\text{arb}})} = \frac{1.083}{(1 - 0,30)} = 1.547,1 \text{ kN}$$

O limite de tensão na armadura de protensão nas operações de estiramento (ver item 3.8), para peça pré-tensionada e cordoalha CP 190 RB $\phi = 12,7 \text{ mm}$ ($f_{\text{ptk}} = 1.900 \text{ MPa}$) é:

$$\sigma_{p_i, \text{lim}} \leq 0,77 f_{\text{ptk}} \leq 0,77 \cdot 1.900 \leq 1.463 \text{ MPa}$$

A área de armadura de protensão estimada é (Eq. 4.26):

$$A_{p, \text{est}} = \frac{P_{i, \text{est}}}{\sigma_{p_i, \text{lim}}} = \frac{1.547,1}{146,3} = 10,57 \text{ cm}^2$$

Na Tabela 2.5 encontra-se a área de $1,00 \text{ cm}^2$ ($A_{p, \text{elem}}$) para a cordoalha com $\phi = 12,7 \text{ mm}$, e o número de cordoalhas necessárias é (Eq. 4.27):

$$n = \frac{A_{p, \text{est}}}{A_{p, \text{elem}}} = \frac{10,57}{1,00} = 10,57$$

Para 11 cordoalhas, a área de armadura de protensão efetiva ($A_{p, \text{ef}}$) resulta (Eq. 4.28):

$$A_{p, \text{ef}} = A_p = n_{\text{int}} \cdot A_{p, \text{elem}} = 11 \cdot 1,00 = 11,00 \text{ cm}^2$$

A força de protensão efetiva no estiramento ($P_{i, \text{ef}}$), com a máxima tensão permitida no estiramento da cordoalha CP 190, é (Eq. 4.29):

$$P_{i, \text{ef}} = P_i = A_p \cdot \sigma_{p_i, \text{lim}} = 11,00 \cdot 146,3 = 1.609,3 \text{ kN} \cong 161 \text{ tf}$$

4.6.1.6 Exemplo 2 – Protensão Limitada em Viga Duplo T Pré-tensionada

Resolver a viga do exemplo anterior (item 4.6.1.5 Exemplo 1) considerando *protensão limitada*, com fator redutor $\psi_2 = 0,3$ (Tabela 3.7, item 3.3.6.1).

Resolução

a) Estado-Limite de Descompressão (ELS-D) para combinação quase permanente

As tensões na base da viga são (Eq. 4.19):

$$\sigma_{bg1} + \sigma_{bg2} + \psi_2 \sigma_{bq1} + \psi_2 \sigma_{bq2} + \sigma_{bP\infty} = 0 \rightarrow 1,079 + 0,782 + 0,3 \cdot 0,293 + \sigma_{bP\infty} = 0$$

$$\sigma_{bP\infty} = -1,949 \text{ kN/cm}^2 \quad (\text{tensão de compressão})$$

¹¹⁴ Hurst calculou a força de protensão P_i (força de estiramento no cilindro), com o valor mínimo de 1.308 kN e máximo de 1.695 kN. Considerando que ele adotou uma perda de protensão total de 35 %, a força de protensão final (P_{∞}) máxima seria $1695 \cdot 0,65 = 1.102 \text{ kN}$, muito próxima do valor aqui calculado (1.083 kN).

Força de protensão final estimada ($P_{\infty,est,A}$), conforme Eq. 4.20:

$$\sigma_{bP\infty} = -\frac{P_{\infty,est,A}}{A_c} \left(1 + \frac{A_c e_p}{W_b} \right) \rightarrow -1,949 = -\frac{P_{\infty,est,A}}{2648} \left(1 + \frac{2648 \cdot 25}{17260} \right) \rightarrow P_{\infty,est,A} = 1.067 \text{ kN}$$

A verificação da tensão final no topo (σ_{ts}) foi feita no exemplo anterior para uma força um pouco superior a 1.067 kN, e devido à grande folga existente, não apresentará problema.

b) Estado-Limite de Formação de Fissuras (ELS-F) para combinação frequente

As tensões na base da viga são (Eq. 4.21):

$$\sigma_{bg1} + \sigma_{bg2} + \psi_1 \sigma_{bq1} + \psi_2 \sigma_{bq2} + \sigma_{bP\infty} = \alpha f_{ct} \rightarrow 1,079 + 0,782 + 0,4 \cdot 0,293 + \sigma_{bP\infty} = 0,342$$

$$\text{com } \alpha f_{ct} = 1,2 \cdot 0,7 \cdot 0,3 \sqrt[3]{50^2} = 3,42 \text{ MPa} = 0,342 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{bP\infty} = -1,636 \text{ kN/cm}^2 \quad (\text{tensão de compressão})$$

Força de protensão estimada ($P_{\infty,est,B}$), conforme Eq. 4.23:

$$\sigma_{bP\infty} = -\frac{P_{\infty,est,B}}{A_c} \left(1 + \frac{A_c e_p}{W_b} \right) \rightarrow -1,636 = -\frac{P_{\infty,est,B}}{2648} \left(1 + \frac{2648 \cdot 25}{17260} \right) \rightarrow P_{\infty,est,B} = 896 \text{ kN}$$

A força de protensão final estimada é (Eq. 4.24):

$$P_{\infty,est} \geq \begin{cases} P_{\infty,est,A} \\ P_{\infty,est,B} \end{cases} \rightarrow P_{\infty,est} \geq \begin{cases} 1.067 \text{ kN} \\ 896 \text{ kN} \end{cases} \rightarrow P_{\infty,est} = 1.067 \text{ kN}$$

A força de protensão final para *protensão limitada* resulta um pouco menor que aquela para *protensão completa* (1.083 kN).

4.6.1.7 Exemplo 3 – Protensão Limitada em Viga T Pré-tensionada

Considerando **protensão limitada** determinar a força de protensão final estimada para uma viga biapoiada de seção T (Figura 4.10), **pré-tensionada** e com vão ℓ de 21,3 m. São conhecidos:¹¹⁵

a) concreto C35 ($f_{ck} = 35 \text{ MPa}$), $f_{ck,j} = 27,5 \text{ MPa}$ (resistência do concreto na data da transferência da protensão), $\gamma_{conc} = 25 \text{ kN/m}^3$;

b) tensão admissível à compressão: $\bar{\sigma}_{c,tot} \leq -0,45f_{ck}$ para combinação quase permanente e $\bar{\sigma}_{c,tot} \leq -0,6f_{ck}$ para combinação frequente. Resultam: $\bar{\sigma}_{c,tot} = -0,45f_{ck} = -0,45 \cdot 35 = -15,75 \text{ MPa}$ e $\bar{\sigma}_{c,tot} = -0,6f_{ck} = -0,6 \cdot 35 = -21,0 \text{ MPa}$;

c) carregamentos: permanentes adicionais além do peso próprio $g_2 = 0,6 \text{ kN/m}$, carga variável única $q_1 = 5,9 \text{ kN/m}$;

d) excentricidade da armadura de protensão: $e_p = 587 \text{ mm}$;

e) conforme a Tabela 3.7 (item 3.3.6.1): $\psi_1 = 0,5$ (para pontes ver item 23 da NBR 6118) e $\psi_2 = 0,4$.

¹¹⁵ Este exemplo toma como base os dados apresentados por Naaman,^[2] que determinou a força de protensão com outro procedimento, como apresentado no item 4.6.2.

$$\begin{aligned}
 A_c &= 3.549 \text{ cm}^2 \\
 I_c &= 3.415.800 \text{ cm}^4 \\
 y_b &= 68,8 \text{ cm} \\
 y_t &= 32,8 \text{ cm} \\
 W_t &= 104.140 \text{ cm}^3 \\
 W_b &= 49.648 \text{ cm}^3 \\
 \text{peso próprio: } g_1 &= 8,87 \text{ kN/m}
 \end{aligned}$$

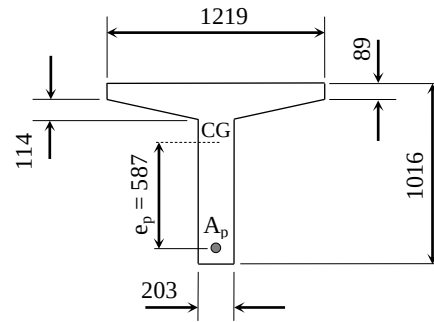


Figura 4.10 – Dimensões (mm) da seção transversal da viga T.

Resolução

a) Momentos fletores e tensões normais no concreto

$$\text{Do peso próprio: } M_{g1} = \frac{g_1 \ell^2}{8} = \frac{8,87 \cdot 21,3^2}{8} 100 = 50.303 \text{ kN.cm}$$

$$\text{Da carga permanente } g_2 : M_{g2} = \frac{0,6 \cdot 21,3^2}{8} 100 = 3.403 \text{ kN.cm}$$

$$\text{Da carga variável } q_1 : M_{q1} = \frac{5,9 \cdot 21,3^2}{8} 100 = 33.460 \text{ kN.cm}$$

As tensões normais no topo e na base são (ver Figura 4.11 e Figura 4.12):

$$\sigma_{bg1} = \frac{M_{g1}}{W_b} = \frac{50303}{49648} = 1,013 \text{ kN/cm}^2 \quad ; \quad \sigma_{tg1} = -\frac{M_{g1}}{W_t} = -\frac{50303}{104140} = -0,483 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{bg2} = \frac{M_{g2}}{W_b} = \frac{3403}{49648} = 0,069 \text{ kN/cm}^2 \quad ; \quad \sigma_{tg2} = -\frac{M_{g2}}{W_t} = -\frac{3403}{104140} = -0,033 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{bq1} = \frac{M_{q1}}{W_b} = \frac{33460}{49648} = 0,674 \text{ kN/cm}^2 \quad ; \quad \sigma_{tq1} = -\frac{M_{q1}}{W_t} = -\frac{33460}{104140} = -0,321 \text{ kN/cm}^2$$

a) Estado-Limite de Descompressão (ELS-D) para combinação quase permanente

As tensões na base da viga são (Eq. 4.19):

$$\sigma_{bg1} + \sigma_{bg2} + \psi_2 \sigma_{bq1} + \psi_2 \sigma_{bq2} + \sigma_{bP\infty} = 0 \quad \rightarrow \quad 1,013 + 0,069 + 0,4 \cdot 0,674 + \sigma_{bP\infty} = 0$$

$$\sigma_{bP\infty} = -1,352 \text{ kN/cm}^2$$

Força de protensão final estimada ($P_{\infty, \text{est}, A}$), conforme Eq. 4.20:

$$\sigma_{bP\infty} = -\frac{P_{\infty, \text{est}, A}}{A_c} \left(1 + \frac{A_c e_p}{W_b} \right) \quad \rightarrow \quad -1,352 = -\frac{P_{\infty, \text{est}, A}}{3549} \left(1 + \frac{3549 \cdot 58,7}{49648} \right) \quad \rightarrow \quad P_{\infty, \text{est}, A} = 923 \text{ kN}$$

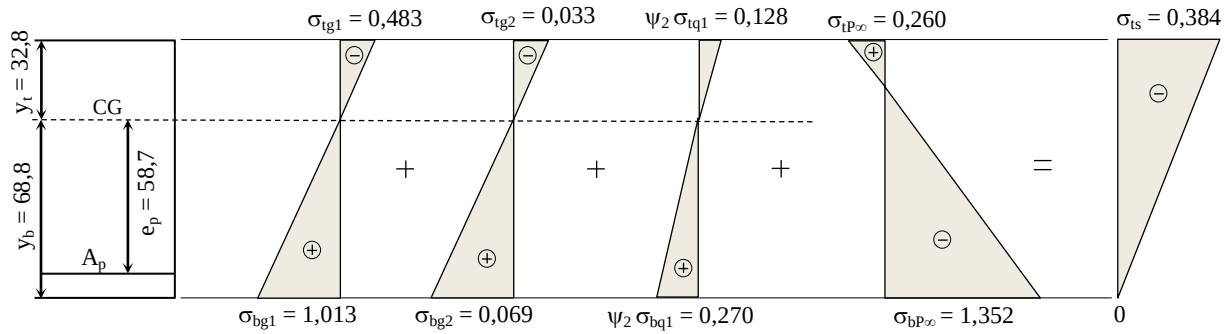


Figura 4.11 – Tensões normais (kN/cm²) para o Estado-Limite de Descompressão com a combinação quase permanente de ações.

A tensão no topo da viga, devida à $P_{\infty,est,A}$, é:

$$\sigma_{tp\infty} = -\frac{P_{\infty,est,A}}{A_c} \left(1 - \frac{A_c e_p}{W_t} \right) \rightarrow \sigma_{tp\infty} = -\frac{923}{3549} \left(1 - \frac{3549 \cdot 58,7}{104140} \right) = 0,260 \text{ kN/cm}^2 \text{ (tensão de tração)}$$

$$\sigma_{tg1} + \sigma_{tg2} + \psi_2 \sigma_{tq1} + \psi_2 \sigma_{tq2} + \sigma_{tp\infty} = \sigma_{ts} \rightarrow -0,483 - 0,033 + 0,4 (-0,321) + 0,260 = \sigma_{ts}$$

$$\sigma_{ts} = -0,384 \text{ kN/cm}^2 = -3,84 \text{ MPa} \leq \bar{\sigma}_{c,tot} = -15,75 \text{ MPa} \rightarrow \text{ok! (comparação com valores absolutos)}$$

b) Estado-Limite de Formação de Fissuras (ELS-F) para combinação frequente

As tensões na base da viga são (Eq. 4.21):

$$\sigma_{bg1} + \sigma_{bg2} + \psi_1 \sigma_{bq1} + \psi_2 \sigma_{bq2} + \sigma_{bp\infty} = \alpha f_{ct} \rightarrow 1,013 + 0,069 + 0,5 \cdot 0,674 + \sigma_{bp\infty} = 0,270$$

$$\sigma_{bp\infty} = -1,149 \text{ kN/cm}^2$$

com a Eq. 4.22 para seção T e $f_{ck} = 35 \text{ MPa}$: $\alpha f_{ct} = 1,2 \cdot 0,7 \cdot 0,3 \sqrt[3]{35^2} = 2,70 \text{ MPa} = 0,270 \text{ kN/cm}^2$

Força de protensão final estimada ($P_{\infty,est,B}$), conforme Eq. 4.23:

$$\sigma_{bp\infty} = -\frac{P_{\infty,est,B}}{A_c} \left(1 + \frac{A_c e_p}{W_b} \right) \rightarrow -1,149 = -\frac{P_{\infty,est,B}}{3549} \left(1 + \frac{3549 \cdot 58,7}{49648} \right) \rightarrow P_{\infty,est,B} = 785 \text{ kN}$$

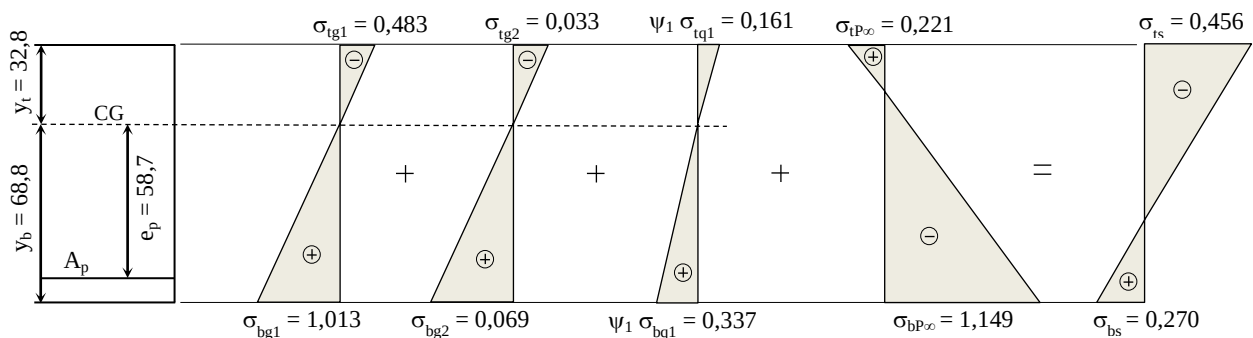


Figura 4.12 – Tensões normais (kN/cm²) para o Estado-Limite de Formação de Fissuras com a combinação frequente de ações.

A tensão no topo da viga, devida à $P_{\infty,est,B}$, é:

$$\sigma_{tp\infty} = -\frac{P_{\infty,est,A}}{A_c} \left(1 - \frac{A_c e_p}{W_t} \right) \rightarrow \sigma_{tp\infty} = -\frac{785}{3549} \left(1 - \frac{3549.58,7}{104140} \right) = 0,221 \text{ kN/cm}^2 \text{ (tensão de tração)}$$

$$\sigma_{tg1} + \sigma_{tg2} + \psi_1 \sigma_{tq1} + \psi_2 \sigma_{tq2} + \sigma_{tp\infty} = \sigma_{is} \rightarrow -0,483 - 0,033 + 0,5 (-0,321) + 0,221 = \sigma_{is}$$

$$\sigma_{is} = -0,456 \text{ kN/cm}^2 = -4,56 \text{ MPa} \leq \bar{\sigma}_{c,tot} = -21,0 \text{ MPa} \rightarrow \text{ok! (comparação com valores absolutos)}$$

A força de protensão final estimada¹¹⁶ é (Eq. 4.24):

$$P_{\infty,est} \geq \begin{cases} P_{\infty,est,A} \\ P_{\infty,est,B} \end{cases} \rightarrow P_{\infty,est} \geq \begin{cases} 923 \text{ kN} \\ 785 \text{ kN} \end{cases} \rightarrow P_{\infty,est} = 923 \text{ kN}$$

4.6.1.8 Exemplo 4 – Protensão Limitada em Viga I Pós-tensionada

Considerando a *protensão limitada*, determinar a força de protensão final estimada para uma viga biapoiada de seção I para pavimento de garagem, **pós-tensionada** e com vão ℓ de 19,8 m. São conhecidos:¹¹⁷

a) concreto C40 ($f_{ck} = 40 \text{ MPa}$), $f_{ck,j} = 30 \text{ MPa}$ (resistência do concreto na data da transferência da protensão, $\gamma_{conc} = 25 \text{ kN/m}^3$;

b) tensão admissível à compressão: $\bar{\sigma}_{c,tot} \leq -0,45f_{ck}$ para combinação quase permanente e $\bar{\sigma}_{c,tot} \leq -0,6f_{ck}$ para combinação frequente. Resultam: $\bar{\sigma}_{c,tot} = -0,45f_{ck} = -0,45 \cdot 40 = -18,0 \text{ MPa}$ e $\bar{\sigma}_{c,tot} = -0,6f_{ck} = -0,6 \cdot 40 = -24,0 \text{ MPa}$;

c) carregamentos: permanentes de finalização $g_2 = 1,5 \text{ kN/m}$, carga variável única $q_1 = 16,1 \text{ kN/m}$;

d) excentricidade da armadura de protensão: $e_p = 38 \text{ cm}$;

e) fatores redutores de carga variável conforme a Tabela 3.7 (item 3.3.6.1): $\psi_1 = 0,7$ e $\psi_2 = 0,6$.

Seção transversal (Figura 4.13):

$$A_c = 2.432 \text{ cm}^2$$

$$I_c = 2.942.254 \text{ cm}^4$$

$$y_b = 47,85 \text{ cm}$$

$$y_t = 53,75 \text{ cm}$$

$$W_t = 54.740 \text{ cm}^3$$

$$W_b = 61.489 \text{ cm}^3$$

$$\text{peso próprio: } g_1 = 6,08 \text{ kN/m}$$

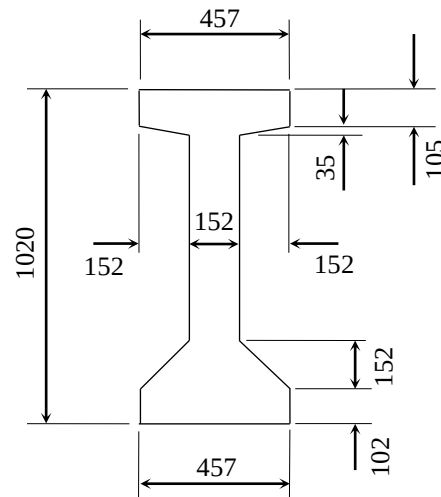


Figura 4.13 – Dimensões (mm) da seção transversal da viga I.

Resolução

a) Momentos fletores e tensões normais no concreto

$$\text{Do peso próprio: } M_{g1} = \frac{g_1 \ell^2}{8} = \frac{6,08 \cdot 19,8^2}{8} 100 = 29.795 \text{ kN.cm}$$

¹¹⁶ Naaman^[2] calculou a força de protensão final $P_{\infty} = 958 \text{ kN}$, próxima do valor aqui calculado (923 kN). A diferença entre os valores é explicada pelas diferenças entre alguns dos parâmetros considerados nos cálculos: o peso específico para o concreto (γ_{conc} de 24 ao invés de 25 kN/m³), o valor da tensão admissível à tração, e os fatores redutores ψ_1 e ψ_2 da norma brasileira.

¹¹⁷ Este exemplo toma como base os dados apresentados por Nawy^[5] (p. 122).

Da carga permanente g_2 : $M_{g_2} = \frac{1,5 \cdot 19,8^2}{8} 100 = 7.351 \text{ kN.cm}$

Da carga variável q_1 : $M_{q_1} = \frac{16,1 \cdot 19,8^2}{8} 100 = 78.898 \text{ kN.cm}$

e as tensões normais (ver Figura 4.14 e Figura 4.15):

$$\sigma_{bg1} = \frac{M_{g1}}{W_b} = \frac{29795}{61489} = 0,485 \text{ kN/cm}^2 \quad ; \quad \sigma_{tg1} = -\frac{M_{g1}}{W_t} = -\frac{29795}{54740} = -0,544 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{bg2} = \frac{M_{g2}}{W_b} = \frac{7351}{61489} = 0,120 \text{ kN/cm}^2 \quad ; \quad \sigma_{tg2} = -\frac{M_{g2}}{W_t} = -\frac{7351}{54740} = -0,134 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{bq1} = \frac{M_{q1}}{W_b} = \frac{78898}{61489} = 1,283 \text{ kN/cm}^2 \quad ; \quad \sigma_{tq1} = -\frac{M_{q1}}{W_t} = -\frac{78898}{54740} = -1,441 \text{ kN/cm}^2$$

a) Estado-Limite de Descompressão (ELS-D) para combinação quase permanente

As tensões na base da viga são (Eq. 4.19):

$$\sigma_{bg1} + \sigma_{bg2} + \psi_2 \sigma_{bq1} + \psi_2 \sigma_{bq2} + \sigma_{bP\infty} = 0 \quad \rightarrow \quad 0,485 + 0,120 + 0,6 \cdot 1,283 + \sigma_{bP\infty} = 0$$

$$\sigma_{bP\infty} = -1,375 \text{ kN/cm}^2$$

Força de protensão final estimada ($P_{\infty, \text{est}, A}$), conforme Eq. 4.20:

$$\sigma_{bP\infty} = -\frac{P_{\infty, \text{est}, A}}{A_c} \left(1 + \frac{A_c e_p}{W_b} \right) \quad \rightarrow \quad -1,375 = -\frac{P_{\infty, \text{est}, A}}{2432} \left(1 + \frac{2432 \cdot 38}{61489} \right) \quad \rightarrow \quad P_{\infty, \text{est}, A} = 1.336 \text{ kN}$$

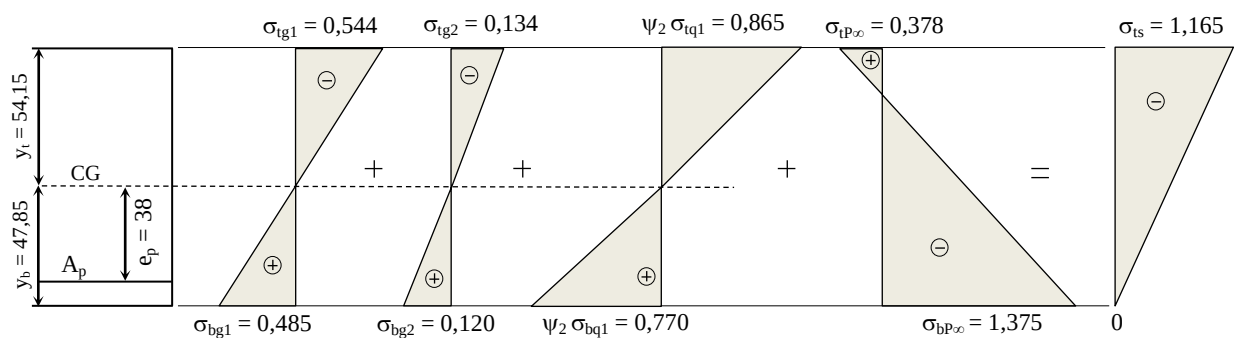


Figura 4.14 – Tensões normais (kN/cm^2) para o Estado-Limite de Descompressão com a combinação quase permanente de ações.

A tensão no topo da viga, devida à $P_{\infty, \text{est}, A}$, é:

$$\sigma_{tP\infty} = -\frac{P_{\infty, \text{est}, A}}{A_c} \left(1 - \frac{A_c e_p}{W_t} \right) \quad \rightarrow \quad \sigma_{tP\infty} = -\frac{1336}{2432} \left(1 - \frac{2432 \cdot 38}{54740} \right) = 0,378 \text{ kN/cm}^2 \text{ (tensão de tração)}$$

$$\sigma_{tg1} + \sigma_{tg2} + \psi_2 \sigma_{tq1} + \psi_2 \sigma_{tq2} + \sigma_{tP\infty} = \sigma_{ts} \quad \rightarrow \quad -0,544 - 0,134 + 0,6 (-1,441) + 0,378 = \sigma_{ts}$$

$$\sigma_{ts} = -1,165 \text{ kN/cm}^2 = -11,65 \text{ MPa} \leq \bar{\sigma}_{c, \text{tot}} = -18,0 \text{ MPa} \quad \rightarrow \quad \text{ok! (comparação com valores absolutos)}$$

b) Estado-Limite de Formação de Fissuras (ELS-F) para combinação frequente

As tensões na base da viga são (Eq. 4.21):

$$\sigma_{bg1} + \sigma_{bg2} + \psi_1 \sigma_{bq1} + \psi_2 \sigma_{bq2} + \sigma_{bP\infty} = \alpha f_{ct} \rightarrow 0,485 + 0,120 + 0,7 \cdot 1,283 + \sigma_{bP\infty} = 0,319$$

com a Eq. 4.22 para seção I e $f_{ck} = 40$ MPa: $\alpha f_{ct} = 1,3 \cdot 0,7 \cdot 0,3 \sqrt[3]{40^2} = 3,19$ MPa = 0,319 kN/cm²

$$\sigma_{bP\infty} = -1,184 \text{ kN/cm}^2$$

Força de protensão final estimada ($P_{\infty,est,B}$), conforme Eq. 4.23:

$$\sigma_{bP\infty} = -\frac{P_{\infty,est,B}}{A_c} \left(1 + \frac{A_c e_p}{W_b} \right) \rightarrow -1,184 = -\frac{P_{\infty,est,B}}{2432} \left(1 + \frac{2432 \cdot 38}{61489} \right) \rightarrow P_{\infty,est,B} = 1.150 \text{ kN}$$

A tensão no topo da viga, para $P_{\infty,est,B}$, é:

$$\sigma_{tP\infty} = -\frac{P_{\infty,est}}{A_c} \left(1 - \frac{A_c e_p}{W_t} \right) \rightarrow \sigma_{tP\infty} = -\frac{1150}{2432} \left(1 - \frac{2432 \cdot 38}{54740} \right) = 0,325 \text{ kN/cm}^2 \text{ (tensão de tração)}$$

$$\sigma_{tg1} + \sigma_{tg2} + \psi_1 \sigma_{tq1} + \psi_2 \sigma_{tq2} + \sigma_{tP\infty} = \sigma_{ts} \rightarrow -0,544 - 0,134 + 0,7 (-1,441) + 0,325 = \sigma_{ts}$$

$$\sigma_{ts} = -1,362 \text{ kN/cm}^2 = -13,62 \text{ MPa} \leq \bar{\sigma}_{c,tot} = -24,0 \text{ MPa} \rightarrow \text{ok! (comparação com valores absolutos)}$$

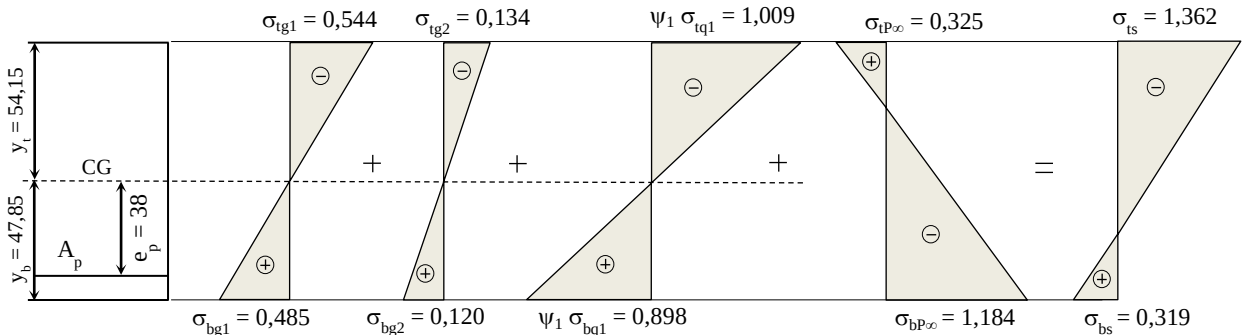


Figura 4.15 – Tensões normais (kN/cm²) para o Estado-Limite de Formação de Fissuras com a combinação frequente de ações.

A força de protensão final estimada¹¹⁸ é (Eq. 4.24):

$$P_{\infty,est} \geq \begin{cases} P_{\infty,est,A} \\ P_{\infty,est,B} \end{cases} \rightarrow P_{\infty,est} \geq \begin{cases} 1.336 \text{ kN} \\ 1.150 \text{ kN} \end{cases} \rightarrow P_{\infty,est} = 1.336 \text{ kN}$$

4.6.2 Determinação da Força de Protensão e da Excentricidade

Este item descreve uma metodologia¹¹⁹ para determinar o conjunto **força de protensão e excentricidade da armadura de protensão**, com base nas *tensões admissíveis* dos materiais (ver item 3.7), e toma como base as publicações apresentadas nas Ref. [1,2,10,22]. O par força de protensão-excentricidade é calculado fazendo as tensões normais atuantes menores que as *tensões admissíveis* permitidas pelos códigos e normas, em todos os períodos da vida útil da peça.

¹¹⁸ Nawy^[4] calculou a força de protensão final $P_{\infty} = 1.371$ kN, muito próxima do valor aqui calculado (1.336 kN).

¹¹⁹ Metodologia primeiramente introduzida por Magnel, G. *Prestressed concrete*. London, Concrete Publications, 3ª ed., 1954.

Como já apresentado na Figura 4.1b, a Figura 4.16 mostra as tensões normais no concreto na seção transversal de uma peça fletida, **não fissurada**, no instante da transferência da força de protensão P_o , aplicada à distância e_p do centro de gravidade da seção (CG). Uma seção ao longo da viga é escolhida convenientemente, geralmente aquela onde no instante da transferência atua um momento fletor solicitante externo importante (M_o , devido muitas vezes apenas ao peso próprio da peça). Como a peça não encontra-se fissurada, as tensões no concreto são calculadas assumindo o comportamento elástico linear dos materiais. A convenção é de sinal positivo para as tensões de tração e negativo para as tensões de compressão.

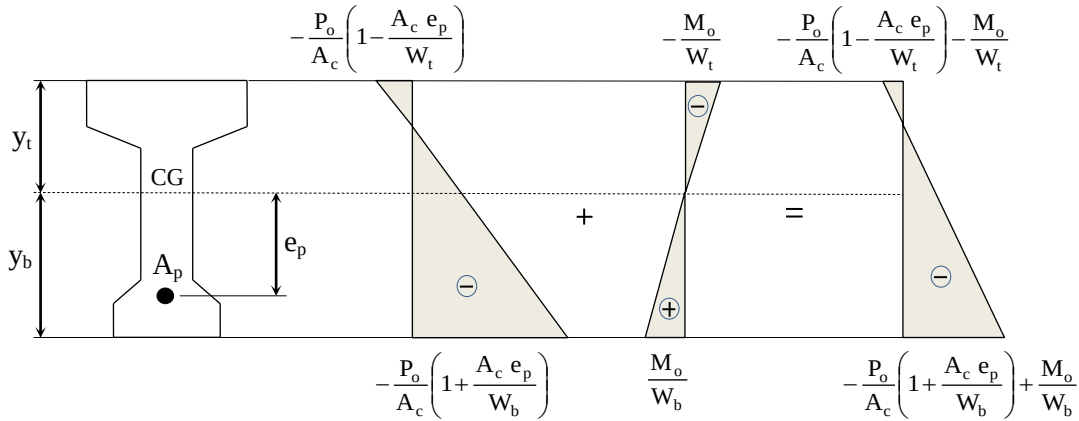


Figura 4.16 – Tensões normais no concreto na transferência da protensão para a peça.

Na transferência, a tensão no concreto na fibra do **topo** não pode exceder a tensão admissível do concreto à tração ($\bar{\sigma}_{tr,o}$), e conforme a Eq. 1.8:

$$\sigma_{t,o} = -\frac{P_o}{A_c} + \frac{P_o e_p y_t}{I_c} - \frac{M_o y_t}{I_c} \leq \bar{\sigma}_{tr,o} \quad \text{Eq. 4.31}$$

$$\sigma_{t,o} = -\frac{P_o}{A_c} + \frac{P_o e_p}{W_t} - \frac{M_o}{W_t} \leq \bar{\sigma}_{tr,o} \quad \text{Eq. 4.32}$$

$$\sigma_{t,o} = -\frac{P_o}{A_c} \left(1 - \frac{A_c e_p}{W_t} \right) - \frac{M_o}{W_t} \leq \bar{\sigma}_{tr,o} \quad \text{Eq. 4.33}$$

com $W_t = \frac{I_c}{y_t}$, A_c é a área da seção transversal e I_c o momento de inércia, e com y_t como indicado na

Figura 4.16. Rearranjando os termos da Eq. 4.33:

$$\bar{\sigma}_{tr,o} \geq -\frac{P_o}{A_c} \left(1 - \frac{A_c e_p}{W_t} \right) - \frac{M_o}{W_t} \quad \text{Eq. 4.34}$$

Introduzindo o coeficiente $\alpha_t = (A_c y_t)/I_c = A_c/W_t$:

$$P_o \leq \frac{A_c \bar{\sigma}_{tr,o} + \alpha_t M_o}{\alpha_t e_p - 1} \quad \text{Eq. 4.35}$$

Rearranjando a Eq. 4.35 para expressar $1/P_o$ como uma função linear da excentricidade e_p , tem-se:

$$\frac{1}{P_o} \geq \frac{\alpha_t e_p - 1}{A_c \bar{\sigma}_{t,o} + \alpha_t M_o} \quad \text{Eq. 4.36}$$

Semelhantemente, a tensão no concreto na fibra da **base** deve ser maior que a tensão admissível do concreto à compressão na transferência ($\bar{\sigma}_{c,o}$, com sinal negativo):

$$\sigma_{b,o} = -\frac{P_o}{A_c} - \frac{P_o e_p y_b}{I_c} + \frac{M_o y_b}{I_c} \geq \bar{\sigma}_{c,o} \quad \text{Eq. 4.37}$$

$$\sigma_{b,o} = -\frac{P_o}{A_c} - \frac{P_o e_p}{W_b} + \frac{M_o}{W_b} \geq \bar{\sigma}_{c,o} \quad \text{Eq. 4.38}$$

$$\sigma_{b,o} = -\frac{P_o}{A_c} \left(1 + \frac{A_c e_p}{W_b} \right) + \frac{M_o}{W_b} \geq \bar{\sigma}_{c,o} \quad \text{Eq. 4.39}$$

e rearranjando os termos da Eq. 4.39:

$$\bar{\sigma}_{c,o} \leq -\frac{P_o}{A_c} \left(1 + \frac{A_c e_p}{W_b} \right) + \frac{M_o}{W_b} \quad \text{Eq. 4.40}$$

Introduzindo o coeficiente $\alpha_b = (A_c y_b)/I_c = A_c/W_b$:

$$P_o \leq \frac{-A_c \bar{\sigma}_{c,o} + \alpha_b M_o}{\alpha_b e_p + 1} \quad \text{Eq. 4.41}$$

Rearranjando a Eq. 4.42 para expressar $1/P_o$ como uma função linear da excentricidade e_p , tem-se:

$$\frac{1}{P_o} \geq \frac{\alpha_b e_p + 1}{-A_c \bar{\sigma}_{c,o} + \alpha_b M_o} \quad \text{Eq. 4.42}$$

Como a Figura 4.1c, a Figura 4.17 mostra as tensões normais no concreto na seção transversal de uma peça fletida, **não fissurada**, com a força de protensão final ($P_\infty = RP_o$, com R sendo o *fator de efetividade* – ver item 4.2), que é aquela atuante após ocorridas todas as perdas de força de protensão, e um momento fletor solicitante externo, resultante do carregamento total aplicado na peça (M_{tot}).¹²⁰ O fator R depende das perdas de protensão progressivas dependentes do tempo e do valor da força transferida do concreto para a armadura passiva, a qual restringe o desenvolvimento de deformações no concreto ao longo do tempo, causadas pela retração e fluência. Uma primeira estimativa de 0,8 para R é razoável para o caso de seções transversais com aços de baixa relaxação (RB) e que não contêm quantidades significativas de armaduras passivas.^{[22]121}

A tensão de compressão no **topo** deve atender a tensão admissível do concreto à compressão ($\bar{\sigma}_{c,tot}$ - com sinal negativo):

$$\sigma_{t,tot} = -\frac{RP_o}{A_c} + \frac{RP_o e_p y_t}{I_c} - \frac{M_{tot} y_t}{I_c} \geq \bar{\sigma}_{c,tot} \quad \text{Eq. 4.43}$$

¹²⁰ O carregamento total pode ser definido a critério do projetista, ou conforme as combinações de ações previstas na NBR 6118 (ver itens 3.3.5.1 ou 3.3.5.2).

¹²¹ Valores inferiores para R devem ser adotados no caso de armaduras passivas significativas, como 0,75 para vigas altamente solicitadas e que requerem elevadas tensões de compressão proveniente da protensão, que causam alta perda por fluência. No caso de elementos levemente solicitados, como lajes, e com protensão leve, o fator por ser tomado como 0,85.

$$\sigma_{t,tot} = -\frac{RP_o}{A_c} + \frac{RP_o e_p}{W_t} - \frac{M_{tot}}{W_t} \geq \bar{\sigma}_{c,tot} \quad \text{Eq. 4.44}$$

$$\sigma_{t,tot} = -\frac{RP_o}{A_c} \left(1 - \frac{A_c e_p}{W_t}\right) - \frac{M_{tot}}{W_t} \geq \bar{\sigma}_{c,tot} \quad \text{Eq. 4.45}$$

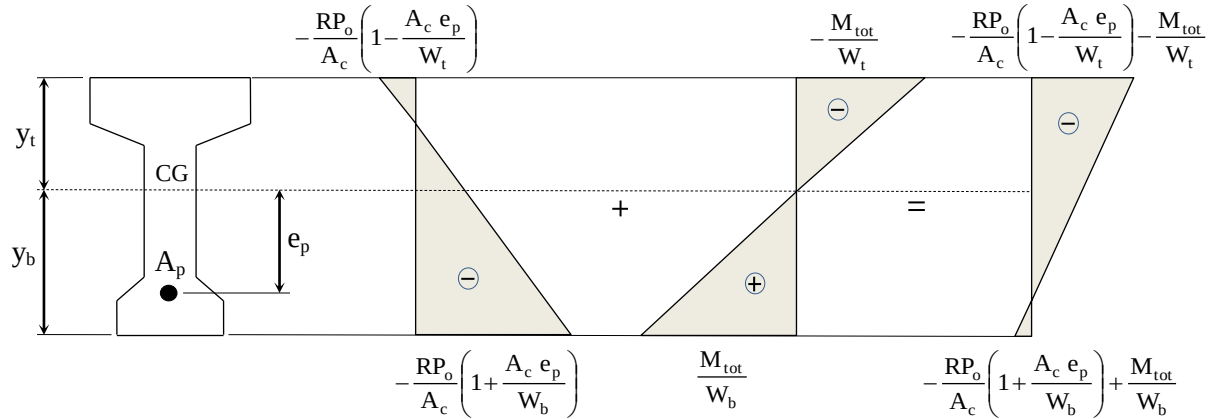


Figura 4.17 – Tensões no concreto sob o carregamento total e após todas as perdas de protensão.

Rearranjando os termos da Eq. 4.45:

$$\bar{\sigma}_{c,tot} \leq -\frac{RP_o}{A_c} \left(1 - \frac{A_c e_p}{W_t}\right) - \frac{M_{tot}}{W_t} \quad \text{Eq. 4.46}$$

$$P_o \geq \frac{A_c \bar{\sigma}_{c,tot} + \alpha_t M_{tot}}{R(\alpha_t e_p - 1)} \quad \text{Eq. 4.47}$$

Rearranjando a Eq. 4.47 para expressar $1/P_o$ como uma função linear da excentricidade e_p , tem-se:

$$\frac{1}{P_o} \leq \frac{R(\alpha_t e_p - 1)}{A_c \bar{\sigma}_{c,tot} + \alpha_t M_{tot}} \quad \text{Eq. 4.48}$$

Semelhantemente, a tensão no concreto na **base** deve ser menor que a tensão admissível do concreto à tração:

$$\sigma_{b,tot} = -\frac{RP_o}{A_c} - \frac{RP_o e_p y_b}{I_c} + \frac{M_{tot} y_b}{I_c} \leq \bar{\sigma}_{tr,tot} \quad \text{Eq. 4.49}$$

$$\sigma_{b,tot} = -\frac{RP_o}{A_c} - \frac{RP_o e_p}{W_b} + \frac{M_{tot}}{W_b} \leq \bar{\sigma}_{tr,tot} \quad \text{Eq. 4.50}$$

$$\sigma_{b,tot} = -\frac{RP_o}{A_c} \left(1 + \frac{A_c e_p}{W_b}\right) + \frac{M_{tot}}{W_b} \leq \bar{\sigma}_{tr,tot} \quad \text{Eq. 4.51}$$

Rearranjando os termos da Eq. 4.51:

$$\bar{\sigma}_{tr,tot} \geq -\frac{RP_o}{A_c} \left(1 + \frac{A_c e_p}{W_b} \right) + \frac{M_{tot}}{W_b} \quad \text{Eq. 4.52}$$

$$P_o \geq \frac{-A_c \bar{\sigma}_{tr,tot} + \alpha_b M_{tot}}{R(\alpha_b e_p + 1)} \quad \text{Eq. 4.53}$$

Rearranjando a Eq. 4.53 para expressar $1/P_o$ como uma função linear da excentricidade e_p , tem-se:

$$\frac{1}{P_o} \leq \frac{R(\alpha_b e_p + 1)}{-A_c \bar{\sigma}_{tr,tot} + \alpha_b M_{tot}} \quad \text{Eq. 4.54}$$

Cada uma das equações Eq. 4.36, Eq. 4.42, Eq. 4.48 e Eq. 4.54, pode ser plotada como uma reta no gráfico de $1/P_o$ versus a excentricidade e_p , como mostrado na Figura 4.18, onde cada reta delimita uma região que para qualquer par $P_o - e_p$, as tensões atuantes resultarão menores que a tensão admissível do concreto para aquela reta. Desse modo, um par $P_o - e_p$ escolhido sobre uma reta resultará em uma tensão atuante igual à tensão admissível que caracteriza aquela reta. Um ponto na área hachurada significa que todas as quatro tensões admissíveis são atendidas conjuntamente, portanto combinações seguras do par $P_o - e_p$. O gráfico também mostra que a maior força P_o possível é obtida com a excentricidade mínima possível, e a menor força P_o com a excentricidade máxima possível. Entretanto, a excentricidade máxima pode não se aplicar à seção considerada.

Uma seção transversal, como mostrada na Figura 4.18, tem uma distância mínima necessária entre a superfície da base e o centro de gravidade da armadura de protensão ($a_{p,cg,min}$), composta pelo cobrimento de concreto, barra horizontal do estribo, barra de armadura passiva (A_s), etc. Portanto, existe por questão geométrica uma excentricidade máxima possível para uma seção transversal ($e_{p,máx}$), a máxima que se pode adotar, de modo que se pode determinar uma força de protensão P_o mínima correspondente, que representa o menor custo de armadura de protensão. A menor força de protensão P_o pode ser calculada colocando a excentricidade máxima na Eq. 4.54.

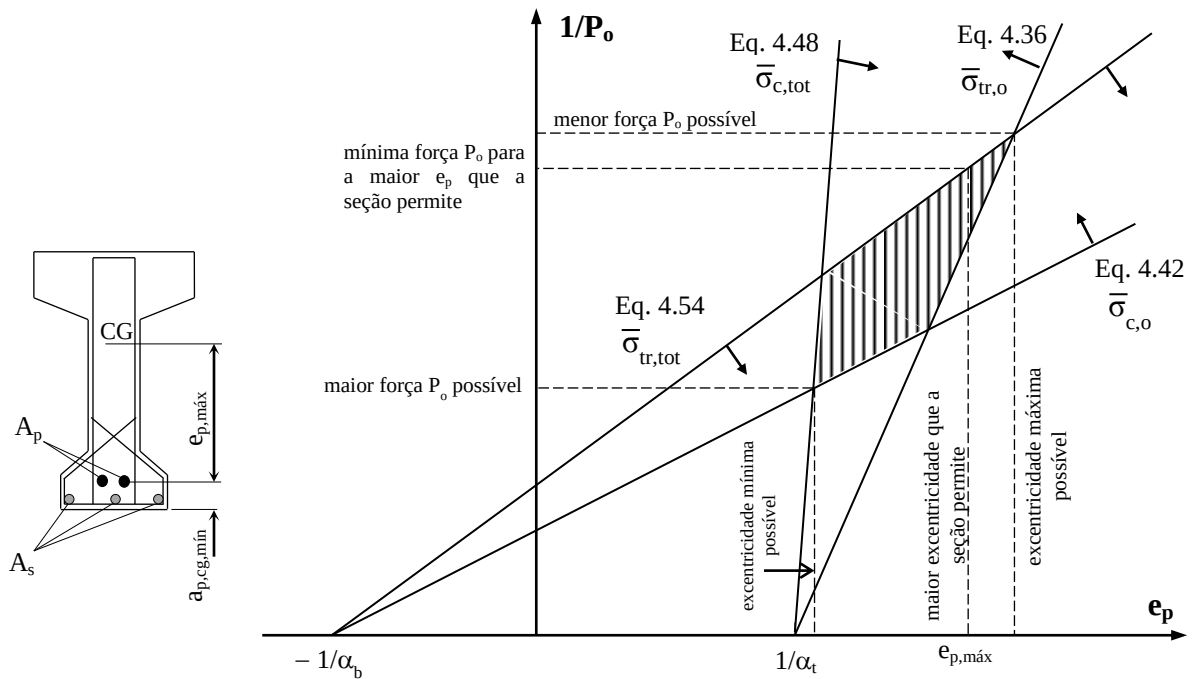


Figura 4.18 – Representação gráfica das equações limites Eq. 4.36, Eq. 4.42, Eq. 4.48 e Eq. 4.54.

No caso de ser escolhida uma seção transversal insuficiente, a reta representativa da Eq. 4.42 na Figura 4.18 ficará posicionada acima da reta da Eq. 4.54, e não existirá uma região aceitável. Do mesmo modo, se a reta da Eq. 4.36 for mais inclinada que a da Eq. 4.48, nenhuma região aceitável existirá. Deve então ser escolhida uma seção transversal maior. Por outro lado, se o ângulo entre as retas da Eq. 4.42 e da Eq. 4.54 for grande, existirá uma grande região aceitável, e uma menor seção transversal pode ser mais econômica.^[22]

A Tabela 4.1 apresenta as equações desenvolvidas em função das tensões admissíveis.

Tabela 4.1 – Resumo das equações de condição de tensão atuante x tensão admissível.

Modo	Condição de tensão	Equação	Equação	Fibra	Instante
1	I	$\sigma_{t,o} = -\frac{P_o}{A_c} + \frac{P_o e_p}{W_t} - \frac{M_o}{W_t} \leq \bar{\sigma}_{tr,o}$	Eq. 4.32	topo	Na transferência
	II	$\sigma_{b,o} = -\frac{P_o}{A_c} - \frac{P_o e_p}{W_b} + \frac{M_o}{W_b} \geq \bar{\sigma}_{c,o}$	Eq. 4.38	base	
	III	$\sigma_{t,tot} = -\frac{RP_o}{A_c} + \frac{RP_o e_p}{W_t} - \frac{M_{tot}}{W_t} \geq \bar{\sigma}_{c,tot}$	Eq. 4.44	topo	Carregamento total
	IV	$\sigma_{b,tot} = -\frac{RP_o}{A_c} - \frac{RP_o e_p}{W_b} + \frac{M_{tot}}{W_b} \leq \bar{\sigma}_{tr,tot}$	Eq. 4.50	base	
2	I	$P_o \leq \frac{A_c \bar{\sigma}_{tr,o} + \alpha_t M_o}{\alpha_t e_p - 1}$	Eq. 4.35	topo	Na transferência
	II	$P_o \leq \frac{-A_c \bar{\sigma}_{c,o} + \alpha_b M_o}{\alpha_b e_p + 1}$	Eq. 4.41	base	
	III	$P_o \geq \frac{A_c \bar{\sigma}_{c,tot} + \alpha_t M_{tot}}{R(\alpha_t e_p - 1)}$	Eq. 4.47	topo	Carregamento total
	IV	$P_o \geq \frac{-A_c \bar{\sigma}_{tr,tot} + \alpha_b M_{tot}}{R(\alpha_b e_p + 1)}$	Eq. 4.53	base	
3	I	$\frac{1}{P_o} \geq \frac{\alpha_t e_p - 1}{A_c \bar{\sigma}_{tr,o} + \alpha_t M_o}$	Eq. 4.36	topo	Na transferência
	II	$\frac{1}{P_o} \geq \frac{\alpha_b e_p + 1}{-A_c \bar{\sigma}_{c,o} + \alpha_b M_o}$	Eq. 4.42	base	
	III	$\frac{1}{P_o} \leq \frac{R(\alpha_t e_p - 1)}{A_c \bar{\sigma}_{c,tot} + \alpha_t M_{tot}}$	Eq. 4.48	topo	Carregamento total
	IV	$\frac{1}{P_o} \leq \frac{R(\alpha_b e_p + 1)}{-A_c \bar{\sigma}_{tr,tot} + \alpha_b M_{tot}}$	Eq. 4.54	base	

Em uma peça fletida, a fissura de flexão depende da máxima tensão de tração atuante, devida à protensão e ao carregamento externo. Quando a fissuração é permitida sob o carregamento total, a tensão admissível à tração $\bar{\sigma}_{tr,tot}$ não é utilizada e a Eq. 4.54 não se aplica. Tensões admissíveis de tração e compressão relativas à transferência são usualmente aplicadas, de modo que a Eq. 4.36 e Eq. 4.42 são aplicadas e fornecem um **limite superior** para a força de protensão. A Eq. 4.48 fornece a força de protensão mínima, pouco importante no projeto nos casos práticos.^[22] Portanto, em peças onde não é necessário atender a tensão admissível à tração do concreto para o carregamento total (*protensão parcial*), qualquer força de protensão que atende a Eq. 4.36, Eq. 4.42 e Eq. 4.48, pode ser escolhida.

Em peças projetadas para não fissurar sob o carregamento permanente total, mas que podem fissurar quando a carga variável atua (as fissuras abrem e fecham conforme a carga variável atua e não atua), podem ter a força de protensão definida com a Eq. 4.54, substituindo o momento fletor total M_{tot} pelo momento fletor devido ao carregamento permanente total ($M_{g,\text{tot}}$):

$$\frac{1}{P_o} \leq \frac{R(\alpha_b e_p + 1)}{-A_c \bar{\sigma}_{\text{tr,tot}} + \alpha_b M_{g,\text{tot}}} \quad \text{Eq. 4.55}$$

No gráfico da Figura 4.18, a Eq. 4.55 deve substituir a Eq. 4.54, e a reta é mais inclinada e a área aceitável resulta maior. Se há exigência de que a fissura se feche totalmente após a remoção do carregamento variável, a tensão admissível $\bar{\sigma}_{\text{tr,tot}}$ da Eq. 4.55 deve ser tomada como zero.^[22]

Considerando peças protendidas com flechas iguais e **com** ou **sem** fissuras, a peça onde fissuras são permitidas necessita uma maior seção transversal se comparada com a peça **sem** fissuras, e também a quantidade de armadura passiva necessária é muito maior. E muitas vezes, a redução de custos obtida com o menor nível de protensão (menor armadura A_p) ainda compensa os custos adicionais devidos aos consumos maiores de concreto e aço passivo, de modo que as peças parcialmente protendidas são soluções econômicas muito viáveis em várias aplicações.^[1]

4.6.3 Determinação da Seção Transversal Mínima

A determinação da **seção transversal mínima** é dividida conforme a armadura de protensão tem excentricidade variável ou constante ao longo do comprimento da viga. Nas peças **pós-tensionadas** geralmente a excentricidade é *variável*, e nas peças **pré-tensionadas** é geralmente *constante* (como nas peças pré-moldadas fabricadas em pista de protensão). No entanto, embora no Brasil a **pré-tensão** com excentricidade *constante* seja o caso mais comum, a excentricidade pode ser modificada ao longo do comprimento da peça, como mostrado na Figura 4.31.

4.6.3.1 Viga com Excentricidade Variável

Quando uma seção transversal mínima é escolhida, as retas relativas à Eq. 4.42 e Eq. 4.54 coincidem em uma mesma linha. O módulo de flexão desta seção mínima, aplicado na Eq. 4.40, resulta:^[22]

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{c,o} &\leq -\frac{P_o}{A_c} \left(1 + \frac{A_c e_p}{W_b} \right) + \frac{M_o}{W_b} \\ \bar{\sigma}_{c,o} - \frac{M_o}{W_{b,\text{mín}}} &= -\frac{P_o}{A_{c,\text{mín}}} \left(1 + \frac{A_{c,\text{mín}} e_p}{W_{b,\text{mín}}} \right) \end{aligned} \quad \text{Eq. 4.56}$$

De maneira similar, com a Eq. 4.52:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{\text{tr,tot}} &\geq -\frac{RP_o}{A_c} \left(1 + \frac{A_c e_p}{W_b} \right) + \frac{M_{\text{tot}}}{W_b} \\ \frac{1}{R} \left[\bar{\sigma}_{\text{tr,tot}} - \frac{M_{\text{tot}}}{W_{b,\text{mín}}} \right] &= -\frac{P_o}{A_{c,\text{mín}}} \left(1 + \frac{A_{c,\text{mín}} e_p}{W_{b,\text{mín}}} \right) \end{aligned} \quad \text{Eq. 4.57}$$

O módulo de flexão mínimo relativo à base, útil à escolha de uma seção inicial em projeto, pode ser obtido subtraindo a Eq. 4.56 da Eq. 4.57:

$$W_{b,\min} = \frac{M_{\text{tot}} - R M_o}{\bar{\sigma}_{\text{tr,tot}} - R \bar{\sigma}_{\text{c,o}}} \quad \text{Eq. 4.58}$$

com $\bar{\sigma}_{\text{c,o}}$ de valor negativo. O valor conduz a menor seção transversal, o qual assegura que a seção **não** terá fissuras sob o carregamento total.

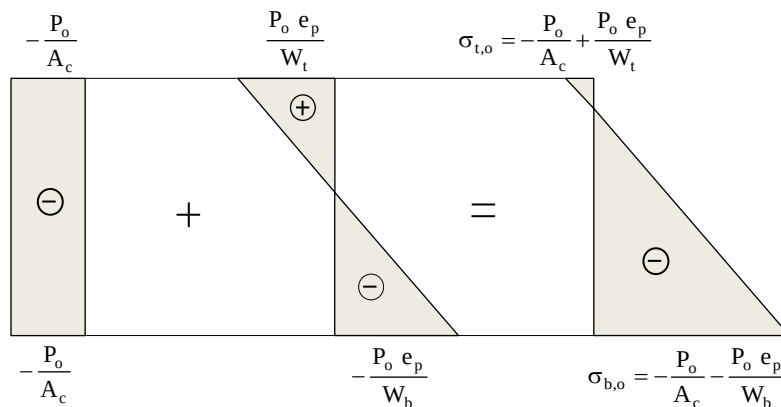
De modo similar, utilizando a Eq. 4.34 e Eq. 4.46, pode ser definido o módulo de flexão relativo ao topo da menor seção transversal, necessário para atender as tensões admissíveis das duas equações, ou seja, a menor seção que se assegura que **não** terá fissuras na transferência da protensão.

$$W_{t,\min} = \frac{M_{\text{tot}} - R M_o}{R \bar{\sigma}_{\text{tr,o}} - \bar{\sigma}_{\text{c,tot}}} \quad \text{Eq. 4.59}$$

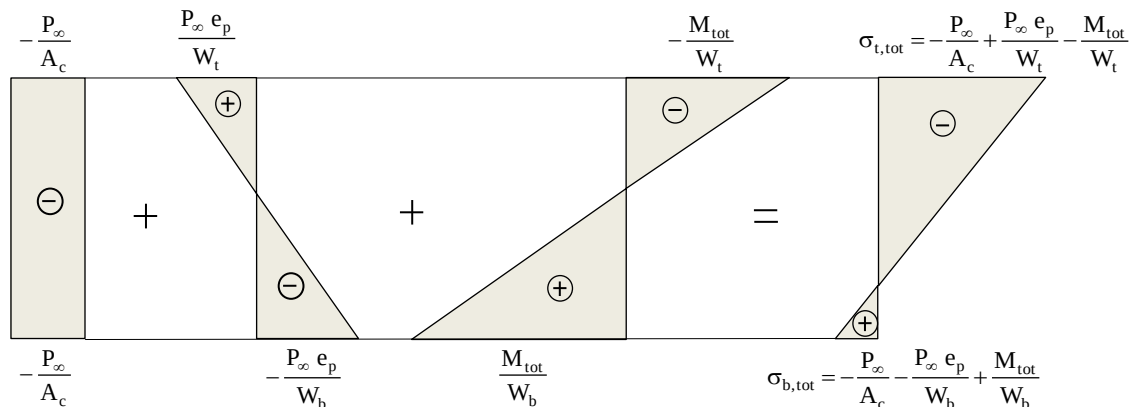
com $\bar{\sigma}_{\text{c,tot}}$ de valor negativo.

4.6.3.2 Viga com Excentricidade Constante

Em uma viga simplesmente apoiada **pré-tensionada** a distribuição de tensão nos apoios e na seção de maior momento fletor estão mostradas na Figura 4.19.^[1,22] Na transferência as tensões máximas de tração e de compressão no concreto ocorrem na seção de apoio da viga, com a tensão de tração no topo e a tensão de compressão na base. Para evitar a fissuração no topo na seção de apoio, a tensão de tração não pode superar a tensão admissível à tração, e a tensão de compressão não pode superar a tensão admissível à compressão.



a) seção de **apoio** imediatamente **após a transferência** da protensão;



b) seção sob **momento fletor máximo** após **todas as perdas** de força de protensão.

Figura 4.19 – Distribuição de tensões normais no concreto de viga com excentricidade constante.^[1,22]

Tomando a Eq. 4.32 e a Eq. 4.38 e fazendo $M_o = 0$ tem-se:^[1,22]

$$\sigma_{t,o} = -\frac{P_o}{A_c} + \frac{P_o e_p}{W_t} \leq \bar{\sigma}_{tr,o} \quad \text{Eq. 4.60}$$

$$\sigma_{b,o} = -\frac{P_o}{A_c} - \frac{P_o e_p}{W_b} \geq \bar{\sigma}_{c,o} \quad \text{Eq. 4.61}$$

Rearranjando a Eq. 4.60 e a Eq. 4.61 resultam equações similares a Eq. 4.35 e Eq. 4.41, mas com $M_o = 0$:

$$P_o \leq \frac{A_c \bar{\sigma}_{tr,o}}{\alpha_t e_p - 1} \quad \text{Eq. 4.62}$$

$$P_o \leq \frac{-A_c \bar{\sigma}_{c,o}}{\alpha_b e_p + 1} \quad \text{Eq. 4.63}$$

com $\alpha_t = A_c / W_t$ e $\alpha_b = A_c / W_b$. Após as perdas de protensão a tensão máxima de tração ocorre na base na seção de maior momento fletor (ver Figura 4.19b), e para evitar fissuras, essa tensão deve ser menor que a tensão admissível à tração, conforme a já apresentada Eq. 4.50:

$$\sigma_{b,tot} = -\frac{RP_o}{A_c} - \frac{RP_o e_p}{W_b} + \frac{M_{tot}}{W_b} \leq \bar{\sigma}_{tr,tot}$$

Rearranjando essa equação, ficará igual à Eq. 4.53 já apresentada:

$$P_o \geq \frac{-A_c \bar{\sigma}_{tr,tot} + \alpha_b M_{tot}}{R(\alpha_b e_p + 1)} \quad \text{Eq. 4.64}$$

A Eq. 4.62, Eq. 4.63 e Eq. 4.64 proporcionam a maior e a menor força de protensão P_o , e que satisfazem as tensões admissíveis no apoio e na seção de maior momento fletor solicitante. A excentricidade máxima pode ser determinada igualando a Eq. 4.64 com a Eq. 4.62 ou com a Eq. 4.63, aquela que proporcionar a menor força de protensão.

O módulo mínimo de flexão, que satisfaz as tensões admissíveis no apoio e na seção de maior momento fletor, na transferência e para o momento fletor total, é:

$$W_{b,min} = \frac{M_{tot}}{\bar{\sigma}_{tr,tot} - R \bar{\sigma}_{c,o}} \quad \text{Eq. 4.65}$$

A Eq. 4.62, Eq. 4.63 e a Eq. 4.64 podem ser modificadas de modo a expressar $1/P_o$ como função linear de e_p , e comporem retas em um gráfico $1/P_o \times e_p$, como mostrado na Figura 4.20 (similar ao gráfico da Figura 4.18):

$$\frac{1}{P_o} \geq \frac{\alpha_t e_p - 1}{A_c \bar{\sigma}_{tr,o}} \quad \text{Eq. 4.66}$$

$$\frac{1}{P_o} \geq \frac{\alpha_b e_p + 1}{-A_c \bar{\sigma}_{c,o}} \quad \text{Eq. 4.67}$$

$$\frac{1}{P_o} \leq \frac{R(\alpha_b e_p + 1)}{-A_c \bar{\sigma}_{tr,tot} + \alpha_b M_{tot}} \quad \text{Eq. 4.68}$$

A reta relativa à tensão admissível à compressão na seção de maior momento fletor não é crítica em peças **pré-tensionadas** com seção transversal constante ao longo do vão, e por isso pode não ser considerada.

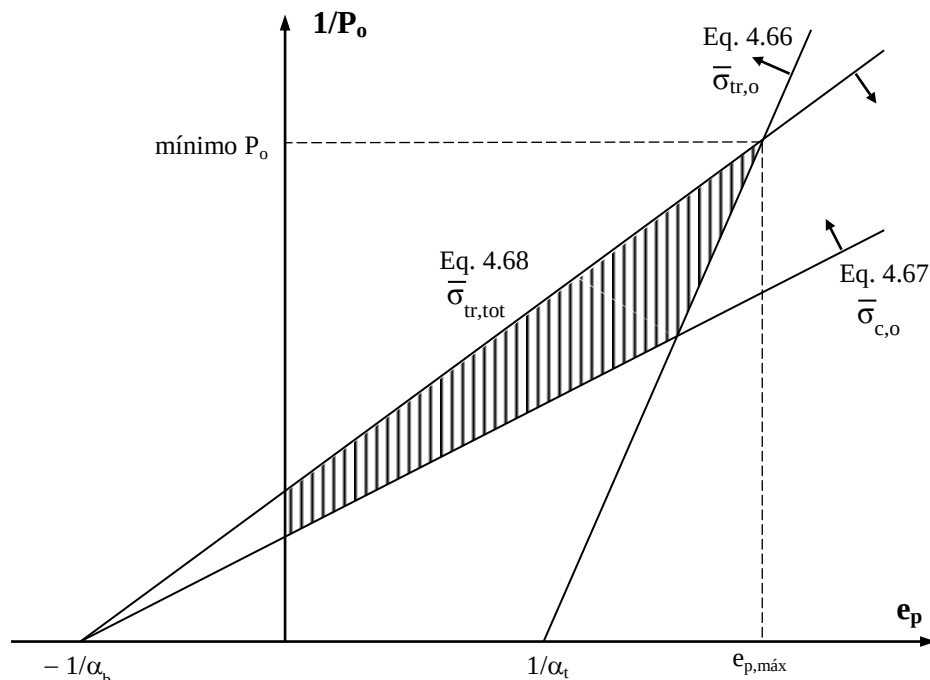


Figura 4.20 – Representação gráfica das equações limites Eq. 4.66, Eq. 4.67 e Eq. 4.68.

4.6.4 Determinação da Seção Transversal Mínima Conforme Nilson

Nilson^[10,21] apresenta uma formulação semelhante à apresentada no item anterior, que auxilia na escolha da **seção transversal mínima** com base em equações para o módulo de flexão, em função de tensões admissíveis do concreto. Faz uma separação da análise de vigas em função da excentricidade da força de protensão, se *variável* ou *constante* ao longo do vão.

4.6.4.1 Viga com Excentricidade Variável

A Figura 4.21a mostra a distribuição de tensões normais no concreto ao longo da altura de uma viga com a armadura com excentricidade variável ao longo do vão, na seção em que ocorre o momento fletor máximo solicitante. A força de protensão atuante logo após a transferência da protensão para a peça (P_o) produz a variação de tensão indicada na reta 1. Com a contraflecha provocada pela aplicação da protensão excêntrica na peça, passa a atuar o peso próprio, que provoca o momento fletor M_o , o qual origina a primeira distribuição real de tensões na viga (2); no apoio este momento fletor não ocorre (Figura 4.21b). Neste estágio do carregamento, a tensão de tração na fibra do topo não deve exceder a tensão admissível do concreto à tração ($\bar{\sigma}_{tr,o}$), bem como a tensão de compressão na fibra da base não deve exceder a tensão admissível do concreto à compressão ($\bar{\sigma}_{c,o}$).

Assumindo que todas as perdas de protensão ocorrem neste estágio, e que as perdas causam a redução $\Delta\sigma_t$ na tensão de tração no topo, e a redução $\Delta\sigma_b$ na tensão de compressão na base, a distribuição de tensões modifica-se da reta 2 para a reta 3. Quando a peça é colocada em serviço, passam a atuar os momentos fletores devidos às cargas permanentes (M_g) e variáveis (M_q), que

A força de protensão que ocorre logo após a transferência da protensão, bem como sua excentricidade, podem ser expressas por:

$$P_o = \sigma_{ccg,o} \cdot A_c \quad \text{Eq. 4.72}$$

$$e_p = \left(\bar{\sigma}_{tr,o} - \sigma_{ccg,o} \right) \frac{W_t}{P_o} + \frac{M_o}{P_o} \quad \text{Eq. 4.73}$$

As equações acima foram desenvolvidas com base na seção solicitada pelo maior momento fletor total (M_{tot}), como mostrado na Figura 4.21a, e em outras posições ao longo do vão da viga biapoiada, onde os momentos fletores são menores (M_o , M_g e M_q), a excentricidade da força de protensão (ou a força) deve ser diminuída, para que as tensões admissíveis não sejam ultrapassadas, especialmente $\bar{\sigma}_{tr,o}$ e $\bar{\sigma}_{c,o}$. Em muitos casos, a excentricidade é reduzida a zero nas seções de apoio (Figura 4.21b), quando então a tensão no concreto é uniforme de valor $\sigma_{ccg,o}$ no início da vida da peça e $\sigma_{ccg,\infty}$ após a ocorrência de todas as perdas de força de protensão.

4.6.4.2 Viga com Excentricidade Constante

No caso de vigas **pré-tensionadas**, geralmente produzidas em fábricas de pré-moldados, a excentricidade da força de protensão é mantida constante, pois a armadura é estirada reta ao longo da pista de protensão. Nessa situação, as tensões admissíveis na transferência ($\bar{\sigma}_{tr,o}$ e $\bar{\sigma}_{c,o}$) podem ser ultrapassadas, uma vez que o momento fletor devido ao peso próprio (M_o) diminui até tornar-se zero nas extremidades da viga. Para evitar isso, a excentricidade constante da armadura deve ser menor do que aquela calculada na condição de excentricidade variável, e em vigas biapoiadas é a situação na seção de apoio, onde M_o é zero, que conduz à excentricidade máxima, a qual é interessante sob o ponto de vista econômico.^[10,21]

A Figura 4.22 mostra a distribuição de tensões no concreto em uma viga biapoiada com excentricidade da armadura *constante* ao longo do vão, na seção sob o momento fletor máximo e nos apoios. O problema que poder surgir é geralmente na fibra do topo na seção de apoio, onde a tensão admissível à tração na transferência ($\bar{\sigma}_{tr,o}$) pode ser ultrapassada, pois não existe o momento fletor M_o para diminuir a tensão de tração no topo, devida à força de protensão P_o .

São deduzidas duas equações que auxiliam na escolha da seção transversal da viga:

$$W_b \geq \frac{M_o + M_g + M_q}{\bar{\sigma}_{tr,tot} - R \bar{\sigma}_{c,o}} \quad \text{Eq. 4.74}$$

$$W_t \geq \frac{M_o + M_g + M_q}{R \bar{\sigma}_{tr,o} - \bar{\sigma}_{c,tot}} \quad \text{Eq. 4.75}$$

$\bar{\sigma}_{tr,o}$ = tensão admissível do concreto à tração na transferência da protensão para a peça;

$\bar{\sigma}_{tr,tot}$ = tensão admissível do concreto à tração após ocorridas todas as perdas de protensão;

$\bar{\sigma}_{c,o}$ = tensão admissível do concreto à compressão na transferência da protensão, com valor negativo;

$\bar{\sigma}_{c,tot}$ = tensão admissível do concreto à compressão após ocorridas todas as perdas, com valor negativo.

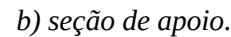


Figura 4.22 – Distribuição de tensões normais em viga biapoiada com **excentricidade constante**.^[10,21]

Eq. 4.76

e) total de perdas de protensão progressivas: 15 % (portanto fator de efetividade $R = 85 \%$, $P_{\infty} = RP_0$, ver item 4.2).

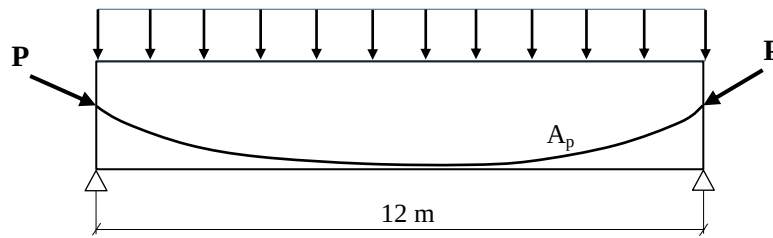


Figura 4.23 – Viga biapoiada pós-tensionada com excentricidade variável sob protensão limitada.

Resolução

a) tensões admissíveis

As tensões admissíveis devem ser escolhidas para as situações de carregamentos mais importantes ao longo da vida útil da peça, e geralmente duas situações são suficientes: no instante da transferência da protensão e após ocorridas todas as perdas de força de protensão.

Para a situação de após ocorridas todas as perdas de protensão e em função do nível de protensão aplicado, ficam condicionados dois Estados-Limites de Serviço, com as respectivas combinações de ações, conforme a NBR 6118 e mostrados na Tabela 3.9 (ver item 3.6). Para a *protensão limitada* devem ser atendidos o Estado-Limite de Formação de Fissuras (ELS-F) com a combinação **frequente** e o Estado-Limite de Descompressão (ELS-D) para a combinação **quase permanente**.

O ELS-F implica admitir na base da viga a existência de uma tensão de tração de baixa intensidade, de valor αf_{ct} (apresentada na Eq. 2.6, item 2.1.3).¹²² Para a tensão admissível à tração na transferência da protensão será considerado o valor preconizado pela NBR 6118 para o ato da protensão (ver item 3.9).

Tabela 4.2 – Valores das tensões admissíveis adotadas para o concreto.

Instante		Tensões admissíveis	
		Compressão	Tração
Na transferência da protensão (P_o , M_o)		$\bar{\sigma}_{c,0} = -0,7f_{ck,j} = -0,7 \cdot 25$ $= -17,5 \text{ MPa}$ (ver nota a)	$\bar{\sigma}_{tr,0} = 1,2f_{ct,m} = 1,2 \cdot 0,3 \sqrt[3]{f_{ck,j}^2}$ $= 1,2 \cdot 0,3 \sqrt[3]{25^2} = 3,08 \text{ MPa}$
Após todas as perdas (P_∞ , M_{tot})	ELS-D combinação quase permanente	$\bar{\sigma}_{c,tot} = -0,45f_{ck}$ $= -0,45 \cdot 40$ $= -18,0 \text{ MPa}$ (ver nota b)	$\bar{\sigma}_{tr,tot} = 0,00$
	ELS-F combinação frequente	$\bar{\sigma}_{c,tot} = -0,5f_{ck}$ $= -0,5 \cdot 40$ $= -20,0 \text{ MPa}$ (ver nota c)	$\bar{\sigma}_{tr,tot}^{d)} = \alpha 0,7f_{ct,m} = 1,5 \cdot 0,7 \cdot 0,3 \sqrt[3]{f_{ck}^2}$ $= 1,5 \cdot 0,7 \cdot 0,3 \sqrt[3]{40^2} = 3,68 \text{ MPa}$

NOTAS: a) na transferência foi admitida a tensão máxima preconizada pela NBR 6118, de 70 % de $f_{ck,j}$ (ver item 3.9);
b) conforme o item 3.7 o limite de tensão de compressão no concreto na combinação quase permanente é $0,45f_{ck}$;
c) conforme o item 3.7 o limite de tensão de compressão no concreto na combinação frequente é $0,6f_{ck}$. Foi tomado o valor $0,5f_{ck}$;
d) com $\alpha = 1,5$ para seção retangular (Eq. 2.5). Esta tensão indica que o concreto está na iminência de apresentar uma fissura, e corresponde à verificação do Estado-Limite de Formação de Fissuras (ELS-F) para o momento fletor total (M_{tot}).

b) Momentos fletores na seção mais solicitada e seção transversal mínima

A viga é biapoiada com vão de 12 m e largura de 30 cm. A altura pode ser estimada como $h \geq \ell/15 = 12/15 = 0,8 \text{ m}$. Tomando uma altura de 85 cm, o peso próprio é: $g_1 = \gamma_{conc} A_c = 25 (0,3 \cdot 0,85) = 6,38 \text{ kN/m}$.

¹²² Para esta tensão uma fissura poderá ser iniciada na seção, ou seja, se abrir momentaneamente no instante em que atuar o momento fletor resultante da combinação **frequente**, e ser fechada pelo efeito da protensão quando a combinação **frequente** deixar de ocorrer.

$$\text{Momento fletor máximo do peso próprio: } M_{g1} = M_o = \frac{g_1 \ell^2}{8} = \frac{6,38 \cdot 12^2}{8} = 11.484 \text{ kN.cm}$$

Considerando que o nível da protensão é a *limitada*, o momento fletor total (M_{tot}) será calculado conforme as combinações **quase permanente** e **frequente**, sendo o carregamento total máximo para cada combinação (ver Tabela 3.5):

- **quase permanente:** $F_{d,\text{ser}} = \Sigma F_{gik} + \psi_2 F_{q1k} + \Sigma \psi_{1j} F_{qjk}$, e:

$$\text{carregamento total: } p_{\text{tot,QP}} = g_1 + g_2 + \psi_2 q_1 = 6,38 + 18,0 + 8,0 = 32,38 \text{ kN/m}$$

$$\text{momento fletor total: } M_{\text{tot,QP}} = \frac{32,38 \cdot 12^2}{8} = 58.284 \text{ kN.cm}$$

- **frequente:** $F_{d,\text{ser}} = \Sigma F_{gik} + \psi_1 F_{q1k} + \Sigma \psi_{2j} F_{qjk}$, e:

$$\text{carregamento total: } p_{\text{tot,Freq}} = g_1 + g_2 + \psi_1 q_1 = 6,38 + 18,0 + 12,0 = 36,38 \text{ kN/m}$$

$$\text{momento fletor total: } M_{\text{tot,Freq}} = \frac{36,38 \cdot 12^2}{8} = 65.484 \text{ kN.cm}$$

Para uma estimativa de perda de protensão progressiva total de 15 % resulta o fator de efetividade $R = 85$ %. Os módulos de flexão mínimos para excentricidade variável são calculados com a Eq. 4.58 e Eq. 4.59 (ou Eq. 4.69 e Eq. 4.70). Devido os diferentes valores da tensão admissível à tração ($\bar{\sigma}_{tr,\text{tot}} = 0,00$ para a combinação **quase permanente** e $\bar{\sigma}_{tr,\text{tot}} = 3,68$ MPa para a combinação **frequente**), e como a tensão ocorre no denominador da equação, o maior valor para $W_{b,\text{mín}}$ resulta da combinação **quase permanente** (QP), e o maior $W_{t,\text{mín}}$ resulta da combinação **frequente**:

$$W_{b,\text{mín}} = \frac{M_{\text{tot}} - R M_o}{\bar{\sigma}_{tr,\text{tot}} - R \bar{\sigma}_{c,o}} = \frac{58284 - 0,85 \cdot 11484}{0,00 - 0,85(-1,75)} = 32.620 \text{ cm}^3 \quad (\text{da combinação QP})$$

$$W_{t,\text{mín}} = \frac{M_{\text{tot}} - R M_o}{R \bar{\sigma}_{tr,o} - \bar{\sigma}_{c,\text{tot}}} = \frac{65484 - 0,85 \cdot 11484}{0,85 \cdot 0,308 - (-2,0)} = 24.636 \text{ cm}^3 \quad (\text{da combinação frequente})$$

A seção transversal de 30 x 85 atende aos valores dos módulos de flexão calculados (Figura 4.24):

$$A_c = 2.550 \text{ cm}^2$$

$$I_c = 1.535.313 \text{ cm}^4$$

$$y_b = y_t = 42,5 \text{ cm}$$

$$W_b = W_t = 36.125 \text{ cm}^3$$

$$e_{p,\text{máx}} = y_b - a_{p,\text{CG}} = 42,5 - 10,0 = 32,5 \text{ cm}$$

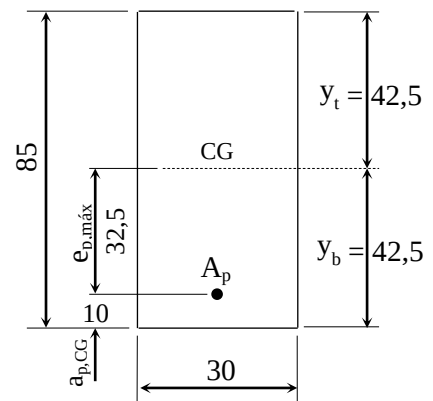
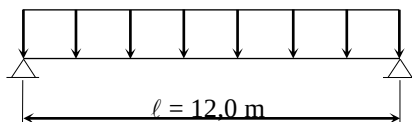


Figura 4.24 – Dimensões (cm) da seção transversal da viga retangular.

c) Força de protensão e excentricidade da armadura de protensão na seção do meio do vão

No caso de seção retangular, as propriedades geométricas α_b e α_t da seção transversal são iguais:

$$\alpha_b = \alpha_t = A_c / W = 2550 / 36125 = 7,059 \times 10^{-2} \text{ cm}^{-1}$$

A Eq. 4.36 e a Eq. 4.42 fornecem o **maior** valor para a força de protensão P_o , na **transferência**:

$$\frac{1}{P_o} \geq \frac{\alpha_t e_p - 1}{A_c \bar{\sigma}_{tr,o} + \alpha_t M_o} \geq \frac{7,059 \cdot 10^{-2} e_p - 1}{(2550 \cdot 0,308) + (7,059 \cdot 10^{-2} \cdot 11484)} \geq \frac{7,059 \cdot 10^{-2} e_p - 1}{15961} \quad (4.36)$$

$$\frac{1}{P_o} \geq \frac{\alpha_b e_p + 1}{-A_c \bar{\sigma}_{c,o} + \alpha_b M_o} \geq \frac{7,059 \cdot 10^{-2} e_p + 1}{-2550(-1,75) + (7,059 \cdot 10^{-2} \cdot 11484)} \geq \frac{7,059 \cdot 10^{-2} e_p + 1}{52732} \quad (4.42)$$

A Eq. 4.48 e a Eq. 4.54 fornecem o **menor** valor para a força de protensão P_o , para o **carregamento total** conforme as combinações:

- **quase permanente (QP):**

$$\frac{1}{P_o} \leq \frac{R(\alpha_t e_p - 1)}{A_c \bar{\sigma}_{c,tot} + \alpha_t M_{tot}} \leq \frac{0,85(7,059 \cdot 10^{-2} e_p - 1)}{2550(-1,8) + (7,059 \cdot 10^{-2} \cdot 58284)} \leq \frac{7,059 \cdot 10^{-2} e_p - 1}{-559,7} \quad (4.48-QP)$$

$$\frac{1}{P_o} \leq \frac{R(\alpha_b e_p + 1)}{-A_c \bar{\sigma}_{tr,tot} + \alpha_b M_{tot}} \leq \frac{0,85(7,059 \cdot 10^{-2} e_p + 1)}{-2550 \cdot 0,00 + (7,059 \cdot 10^{-2} \cdot 58284)} \leq \frac{7,059 \cdot 10^{-2} e_p + 1}{4840,3} \quad (4.54-QP)$$

- **frequente:**

$$\frac{1}{P_o} \leq \frac{R(\alpha_t e_p - 1)}{A_c \bar{\sigma}_{c,tot} + \alpha_t M_{tot}} \leq \frac{0,85(7,059 \cdot 10^{-2} e_p - 1)}{2550(-2,0) + (7,059 \cdot 10^{-2} \cdot 65484)} \leq \frac{7,059 \cdot 10^{-2} e_p - 1}{-561,7} \quad (4.48-Fr)$$

$$\frac{1}{P_o} \leq \frac{R(\alpha_b e_p + 1)}{-A_c \bar{\sigma}_{tr,tot} + \alpha_b M_{tot}} \leq \frac{0,85(7,059 \cdot 10^{-2} e_p + 1)}{-2550 \cdot 0,368 + (7,059 \cdot 10^{-2} \cdot 65484)} \leq \frac{7,059 \cdot 10^{-2} e_p + 1}{4334,3} \quad (4.54-Fr)$$

As retas representativas das equações Eq. 4.36, Eq. 4.42, Eq. 4.48 e Eq. 4.54, cada qual referente a uma tensão admissível, estão mostradas na Figura 4.25, conforme o gráfico da Figura 4.18. Para o traçado das retas pode-se arbitrar um valor adequado para a excentricidade e_p , que aplicado nas equações fornece os valores $1/P_o$ correspondentes, e com os pontos $-1/\alpha_b$ e $1/\alpha_t$ no eixo horizontal, dois pontos ficam determinados para cada reta. Aplicando para e_p o valor da excentricidade máxima possível ($e_{p,máx} = 32,5$ cm, ver Figura 4.24) encontra-se um ponto adicional para cada reta, como mostrado a seguir:

$$(4.36): \frac{1}{P_o} = \frac{7,059 \cdot 10^{-2} e_p - 1}{15961} = \frac{7,059 \cdot 10^{-2} \cdot 32,5 - 1}{15961} = 8,1084 \cdot 10^{-4} \text{ kN}^{-1} \rightarrow P_o = 1.233,3 \text{ kN (ponto B)}$$

$$(4.42): \frac{1}{P_o} = \frac{7,059 \cdot 10^{-2} e_p + 1}{52732} = \frac{7,059 \cdot 10^{-2} \cdot 32,5 + 1}{52732} = 6,2470 \cdot 10^{-4} \text{ kN}^{-1} \rightarrow P_o = 1.600,8 \text{ kN (ponto C)}$$

- **quase permanente (QP):**

$$(4.54-QP): \frac{1}{P_o} = \frac{7,059 \cdot 10^{-2} e_p + 1}{4840,3} = \frac{7,059 \cdot 10^{-2} \cdot 32,5 + 1}{4840,3} = 6,8057 \cdot 10^{-4} \text{ kN}^{-1} \rightarrow P_o = 1.469,4 \text{ kN (ponto D)}$$

- **frequente:**

$$(4.54-Fr): \frac{1}{P_o} = \frac{7,059 \cdot 10^{-2} e_p + 1}{4334,3} = \frac{7,059 \cdot 10^{-2} \cdot 32,5 + 1}{4334,3} = 7,6002 \cdot 10^{-4} \text{ kN}^{-1} \rightarrow P_o = 1.315,7 \text{ kN (ponto E)}$$

A tensão admissível à compressão $\bar{\sigma}_{c,tot}$ não é importante neste exemplo na definição da força de protensão e da excentricidade (ver Figura 4.25), de modo que será mostrada apenas a reta relativa à **combinação quase permanente (QP)**. O segundo ponto para a reta pode ser determinado fazendo, neste caso, $e_p = 0,0$:

$$(4.48-QP): \frac{1}{P_0} = \frac{7,059 \cdot 10^{-2} e_p - 1}{-559,7} = \frac{7,059 \cdot 10^{-2} \cdot 0,0 - 1}{-559,7} = 1,7867 \cdot 10^{-4} \text{ kN}^{-1} \rightarrow P_0 = 5.596,9 \text{ kN}$$

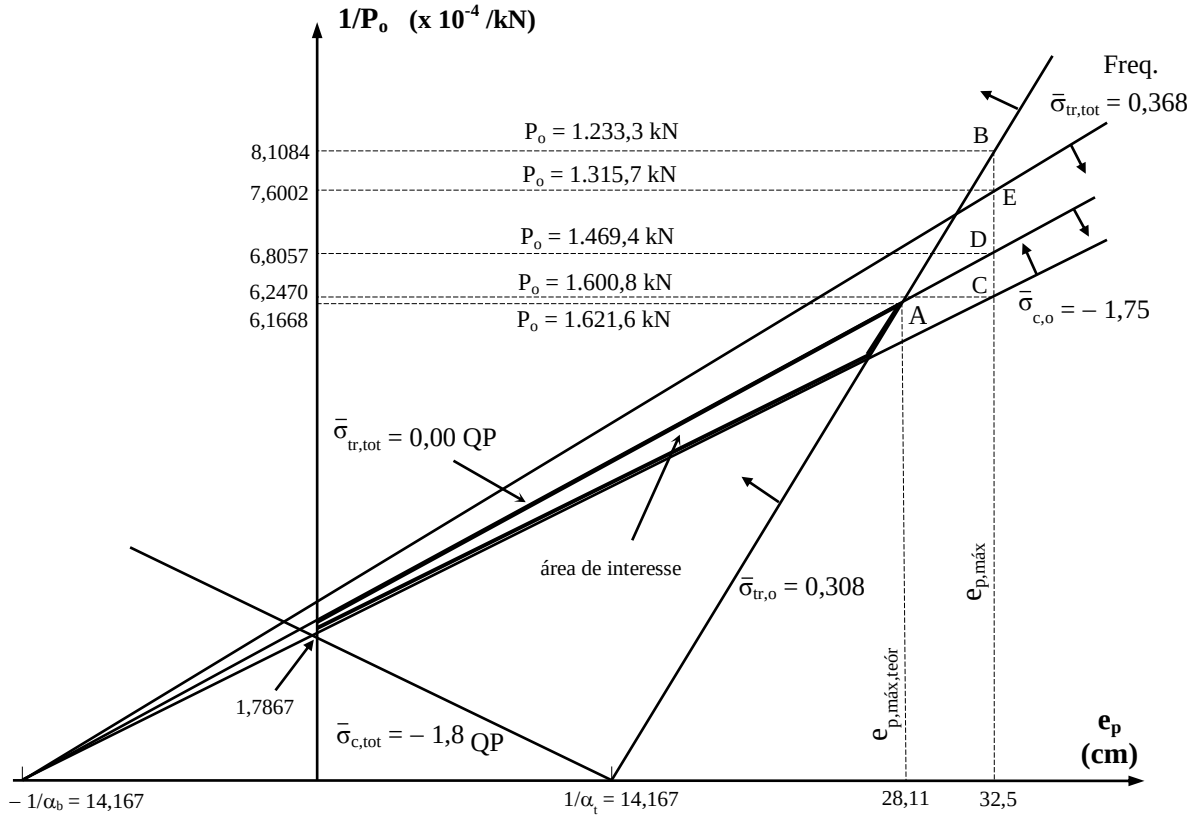


Figura 4.25 – Diagrama de Magnel com as retas que representam as equações de P_0 e e_p .

Observando-se a “área de interesse” mostrada na Figura 4.25, delimitada pelas retas traçadas, nota-se que o valor na intersecção da Eq. 4.36 com a Eq. 4.54-QP (ponto A) corresponde à **maior excentricidade teórica possível**, e ao **menor valor da força P_0** :

$$\frac{7,059 \cdot 10^{-2} e_p - 1}{15961} = \frac{7,059 \cdot 10^{-2} e_p + 1}{48403} \rightarrow e_p = 28,11 \text{ cm}$$

Aplicando $e_p = 28,11 \text{ cm}$ na Eq. 4.36 (ou na Eq. 4.54-QP) pode-se calcular a **menor** força P_0 da área de interesse:

$$\frac{1}{P_0} = \frac{7,059 \cdot 10^{-2} \cdot 28,11 - 1}{15961} = 6,1668 \cdot 10^{-4} \text{ kN}^{-1} \rightarrow P_0 = 1.621,6 \text{ kN}$$

Portanto, uma solução para o problema é o par $P_0 = 1.621,6 \text{ kN}$ e $e_p = 28,11 \text{ cm}$, pois atende a todas as tensões admissíveis, como mostrado no gráfico da Figura 4.25, com a menor força de protensão (e consequentemente menor A_p).¹²³ Observa-se que não é possível adotar a excentricidade máxima que a seção possibilita, pois $e_{p,máx} = 32,5 \text{ cm} > e_p = 28,11 \text{ cm}$. No entanto, para exemplificação, a verificação será feita aplicando as equações Eq. 4.32, Eq. 4.38, Eq. 4.44 e Eq. 4.50:

¹²³ Nota-se no diagrama que as duas tensões admissíveis críticas foram a de compressão na transferência da protensão e a de tração após ocorridas todas as perdas de força de protensão, para a combinação quase permanente.

- na transferência da protensão:

$$\sigma_{t,o} = -\frac{P_o}{A_c} + \frac{P_o e_p}{W_t} - \frac{M_o}{W_t} \leq \bar{\sigma}_{tr,o} \quad \rightarrow \quad \sigma_{t,o} = -\frac{16216}{2550} + \frac{16216 \cdot 28,11}{36125} - \frac{11484}{36125} = 0,308 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{t,o} = 3,08 \text{ MPa} \leq \bar{\sigma}_{tr,o} = 3,08 \text{ MPa} \quad \rightarrow \text{ok! (resultado esperado, ver Figura 4.26)}^{124}$$

$$\sigma_{b,o} = -\frac{P_o}{A_c} - \frac{P_o e_p}{W_b} + \frac{M_o}{W_b} \geq \bar{\sigma}_{c,o} \quad \rightarrow \quad \sigma_{b,o} = -\frac{16216}{2550} - \frac{16216 \cdot 28,11}{36125} + \frac{11484}{36125} = -1,580 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{b,o} = -15,80 \text{ MPa} \geq \bar{\sigma}_{c,o} = -17,5 \text{ MPa} \quad \rightarrow \text{ok! (comparação considerando os sinais)}$$

- após ocorridas todas as perdas de protensão (para a combinação quase permanente - QP):

$$\sigma_{t,tot} = -\frac{RP_o}{A_c} + \frac{RP_o e_p}{W_t} - \frac{M_{tot}}{W_t} \geq \bar{\sigma}_{c,tot}$$

$$\sigma_{t,tot} = -\frac{0,85 \cdot 16216}{2550} + \frac{0,85 \cdot 16216 \cdot 28,11}{36125} - \frac{58,284}{36125} = -1,081 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{t,tot} = -10,81 \text{ MPa} \geq \bar{\sigma}_{c,tot} = -18,0 \text{ MPa} \quad \rightarrow \text{ok! (comparação considerando os sinais)}$$

$$\sigma_{b,tot} = -\frac{RP_o}{A_c} - \frac{RP_o e_p}{W_b} + \frac{M_{tot}}{W_b} \leq \bar{\sigma}_{tr,tot}$$

$$\sigma_{b,tot} = -\frac{0,85 \cdot 16216}{2550} - \frac{0,85 \cdot 16216 \cdot 28,11}{36125} + \frac{58,284}{36125} = 0,00 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{b,tot} = 0,00 \text{ MPa} \leq \bar{\sigma}_{tr,tot} = 0,00 \text{ MPa} \quad \rightarrow \text{ok! (resultado esperado!)}$$

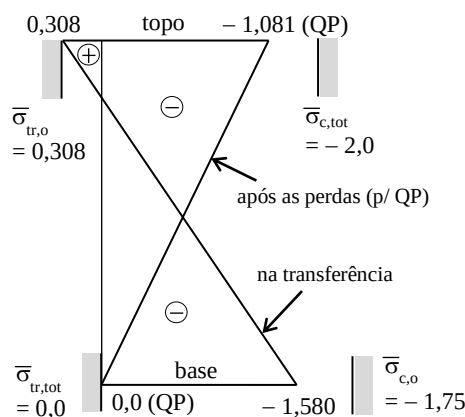


Figura 4.26 – Tensões resultantes (kN/cm^2) na seção do meio do vão na transferência e após todas as perdas de protensão (para a combinação quase permanente - QP).

Nas seções de apoio da viga, onde tem-se $M_o = 0$ na transferência da protensão, a tensão de tração no topo da seção é (Eq. 4.32):

¹²⁴ O resultado era esperado, pois o ponto A correspondente ao par $P_o \times e_p$ posicionado sobre a reta representativa da tensão admissível à tração na transferência.

$$\sigma_{t,o} = -\frac{P_o}{A_c} + \frac{P_o e_p}{W_t} - \frac{M_o}{W_t} \leq \bar{\sigma}_{tr,o} \quad \rightarrow \quad \sigma_{t,o} = -\frac{16216}{2550} + \frac{16216 \cdot 28,11}{36125} = 0,626 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{t,o} = 6,26 \text{ MPa} \leq \bar{\sigma}_{tr,o} = 3,08 \text{ MPa} \quad \rightarrow \quad \text{não ok!}$$

A ausência de tensões de compressão provenientes do momento fletor M_o provoca tensão de tração superior à tensão admissível. Para resolver o problema, no caso de peças **pós-tensionadas** a excentricidade da armadura de protensão pode ser diminuída nas proximidades dos apoios, o que pode ser feito simplesmente curvando-se parte dos cabos de protensão em direção ao topo da seção transversal (ver Figura 1.38). Igualando a tensão de tração atuante no topo com a tensão admissível à tração na transferência da protensão, pode-se determinar a excentricidade máxima da armadura nas seções de apoio, com $M_o = 0$:

$$\sigma_{t,o} = -\frac{P_o}{A_c} + \frac{P_o e_p}{W_t} - \frac{M_o}{W_t} \leq \bar{\sigma}_{tr,o} \quad \rightarrow \quad 0,308 = -\frac{16216}{2550} + \frac{16216 \cdot e_p}{36125} \quad \rightarrow \quad e_p = 21,03 \text{ cm}$$

A excentricidade de 21,03 cm é a máxima possível nas seções de apoio da viga de modo a atender a tensão admissível à tração. Valores menores podem ser adotados, como por exemplo $e_p = 0$, quando neste caso a tensão no topo e na base da seção transversal tornam-se iguais, e são tensões de compressão:

$$\sigma_{t,o} = -\frac{P_o}{A_c} + \frac{P_o e_p}{W_t} - \frac{M_o}{W_t} \leq \bar{\sigma}_{tr,o} \quad \rightarrow \quad \sigma_{t,o} = \sigma_{b,o} = -\frac{16216}{2550} = -0,636 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{t,o} = \sigma_{b,o} = -6,36 \text{ MPa} \geq \bar{\sigma}_{c,o} = -17,5 \text{ MPa} \quad \rightarrow \quad \text{ok!} \quad (\text{comparação considerando os sinais})$$

Portanto, considerando a seção do meio do vão da viga, uma solução para o problema é o par excentricidade $e_p = 28,11 \text{ cm}$ e força de protensão $P_o = 1.621,6 \text{ kN}$, pois atende a todas as tensões admissíveis na seção do meio do vão onde ocorrem os momentos fletores máximos. E nas proximidades dos apoios a armadura de protensão pode ser “levantada” com o objetivo de diminuir a excentricidade, e consequentemente diminuir ou eliminar a tensão de tração no topo. No projeto completo devem ser feitas outras verificações, como as tensões atuantes nas demais seções ao longo do vão, a flecha, etc.

4.6.6 Exemplo 2 – Força de Protensão e Excentricidade em Viga Duplo T Pré-tensionada com Protensão Completa e Excentricidade Constante

Para a viga duplo T **pré-tensionada** biapoiada do exemplo apresentado no item 4.6.1.5, determinar a força de protensão e a excentricidade da armadura de protensão, considerando *protensão completa* e os seguintes dados:¹²⁵

- concreto C50 ($f_{ck} = 50 \text{ MPa}$), $f_{ck,j} = 35 \text{ MPa}$ (resistência do concreto na data da transferência da protensão), $\gamma_{conc} = 25 \text{ kN/m}^3$;
- carregamentos uniformemente distribuídos: permanente total adicional ao peso próprio $g_2 = 4,8 \text{ kN/m}$, carga variável única $q_1 = 1,8 \text{ kN/m}$;
- na data da transferência da protensão atua somente o peso próprio;
- vão efetivo: $\ell_{ef} = 15,0 \text{ m}$; excentricidade máxima $e_{p,máx} = 250,0 \text{ mm}$;
- fator redutor conforme a Tabela 3.7 (item 3.3.6.1): $\psi_1 = 0,4$;
- total de perdas de protensão progressivas: 25 % (fator de efetividade $R = 75 \%$, ver item 4.2).

¹²⁵ Este exemplo toma como base os dados apresentados por Hurst (p. 240). HURST, M.K. *Prestressed concrete design*. New York, Ed. Chapman and Hall, 1988, 262p.

A seção adotada está mostrada na Figura 4.27, com as propriedades geométricas:¹²⁶

$$A_c = 2,648 \times 10^5 \text{ mm}^2$$

$$I_c = 6,041 \times 10^9 \text{ mm}^4$$

$$y_b = 350 \text{ mm} ; y_t = 150 \text{ mm}$$

$$W_b = 17,26 \times 10^6 \text{ mm}^3$$

$$W_t = 40,23 \times 10^6 \text{ mm}^3$$

$$\text{peso próprio: } g_1 = 6,62 \text{ kN/m}$$

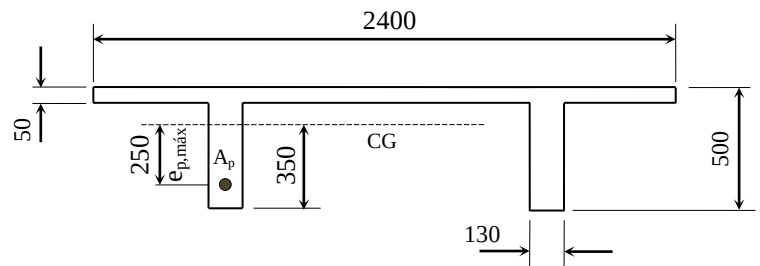


Figura 4.27 – Dimensões (mm) da seção transversal da viga duplo T.

Resolução

a) tensões admissíveis

As tensões admissíveis serão determinadas para duas situações importantes dos carregamentos: no instante da transferência da protensão e após ocorridas todas as perdas de força de protensão. Conforme a NBR 6118, para a *protensão completa* devem ser atendidos o Estado-Limite de Descompressão (ELS-D) para a **combinação frequente** e o Estado-Limite de Formação de Fissuras (ELS-F) com a **combinação rara** (ver Tabela 3.9, item 3.6), o que implica admitir na viga a ocorrência de uma tensão de tração de baixa intensidade, de valor αf_{ct} (apresentada na Eq. 2.6, item 2.1.3).¹²⁷ Para a tensão admissível à tração na transferência da protensão será considerado o valor preconizado pela NBR 6118 para o ato da protensão (ver item 3.9).

Tabela 4.3 – Valores das tensões admissíveis adotadas para o concreto.

Instante		Tensões admissíveis	
		Compressão	Tração
Na transferência da protensão (P_o , M_o)		$\bar{\sigma}_{c,0} = -0,7f_{ck,j} = -0,7 \cdot 35$ $= -24,5 \text{ MPa}$ (ver nota a)	$\bar{\sigma}_{tr,0} = 1,2f_{ct,m} = 1,2 \cdot 0,3 \sqrt[3]{f_{ck,j}^2}$ $= 1,2 \cdot 0,3 \sqrt[3]{35^2} = 3,85 \text{ MPa}$
Após todas as perdas (P_∞ , M_{tot})	ELS-D combinação frequente	$\bar{\sigma}_{c,tot} = -0,5f_{ck}$ $= -0,5 \cdot 50$ $= -25,0 \text{ MPa}$ (ver nota b)	$\bar{\sigma}_{tr,tot} = 0,00$
	ELS-F combinação rara		$\bar{\sigma}_{tr,tot}^{c)} = \alpha 0,7f_{ct,m} = 1,2 \cdot 0,7 \cdot 0,3 \sqrt[3]{f_{ck}^2}$ $= 1,2 \cdot 0,7 \cdot 0,3 \sqrt[3]{50^2} = 3,42 \text{ MPa}$

NOTAS: a) na transferência foi admitida a tensão máxima preconizada pela NBR 6118, de 70 % de $f_{ck,j}$ (ver item 3.9);
b) conforme o item 3.7 o limite de tensão de compressão no concreto nas combinações frequente e rara é $0,6f_{ck}$. No entanto foi tomado o valor $0,5f_{ck}$;
c) com $\alpha = 1,2$ para seção duplo T (Eq. 2.5). Esta tensão indica que o concreto está na iminência de apresentar uma fissura, e corresponde à verificação do Estado-Limite de Formação de Fissuras (ELS-F) para o momento fletor total (M_{tot}).

b) Momentos fletores na seção do meio do vão e seção transversal mínima

$$\text{Do peso próprio: } M_{g1} = M_o = \frac{g_1 \ell^2}{8} = \frac{6,62 \cdot 15^2}{8} = 18.619 \text{ kN.cm}$$

Considerando que a protensão é a *completa*, o momento fletor total (M_{tot}) será calculado conforme as combinações **frequente** e **rara**, sendo o carregamento total máximo (ver Tabela 3.5):

$$\text{- frequente: } F_{d,ser} = \sum F_{gik} + \psi_1 F_{q1k} + \sum \psi_{2j} F_{qjk} \quad , e:$$

$$\text{carregamento total: } p_{tot,Freq} = g_1 + g_2 + \psi_1 q_1 = 6,62 + 4,8 + 0,4 \cdot 1,8 = 12,14 \text{ kN/m}$$

¹²⁶ As propriedades geométricas estão indicadas em mm, no entanto nos cálculos serão transformadas para cm.

¹²⁷ Isto significa que para esta tensão uma fissura poderá se abrir, momentaneamente, mas que será fechada pelo efeito da protensão após cessada a **combinação rara**.

$$\text{momento fletor total: } M_{\text{tot}, \text{Freq}} = \frac{12,14 \cdot 15^2}{8} 100 = 34.144 \text{ kN.cm}$$

$$\text{- rara: } F_{\text{d,ser}} = \Sigma F_{\text{gik}} + F_{\text{q1k}} + \Sigma \psi_{1j} F_{\text{qjk}} \quad , \text{ e:}$$

$$\text{carregamento total: } p_{\text{tot}, \text{Rara}} = g_1 + g_2 + q_1 = 6,62 + 4,8 + 1,8 = 13,22 \text{ kN/m}$$

$$\text{momento fletor total: } M_{\text{tot}, \text{Rara}} = \frac{13,22 \cdot 15^2}{8} 100 = 37.181 \text{ kN.cm}$$

Para uma estimativa de perda de protensão progressiva total de 25 % resulta o fator de efetividade $R = 75$ %. Os módulos de flexão mínimos para excentricidade constante são calculados com a Eq. 4.65 e também Eq. 4.74 e Eq. 4.75. Devido aos valores diferentes da tensão admissível à tração ($\bar{\sigma}_{\text{tr}, \text{tot}} = 0,00$ para a combinação **frequente** e $\bar{\sigma}_{\text{tr}, \text{tot}} = 3,42$ MPa para a combinação **rara**), e como a tensão ocorre no denominador da equação, o maior valor para $W_{\text{b}, \text{mín}}$ resulta da combinação **frequente**, e o maior $W_{\text{t}, \text{mín}}$ resulta da combinação **rara**:

$$W_{\text{b}, \text{mín}} \geq \frac{M_{\text{tot}}}{\bar{\sigma}_{\text{tr}, \text{tot}} - R \bar{\sigma}_{\text{c}, \text{o}}} = \frac{34144}{0,00 - 0,75(-2,45)} = 18.582 \text{ cm}^3 \quad (\text{da combinação frequente})$$

$$W_{\text{t}, \text{mín}} \geq \frac{M_{\text{tot}}}{R \bar{\sigma}_{\text{tr}, \text{o}} - \bar{\sigma}_{\text{c}, \text{tot}}} = \frac{37181}{0,75 \cdot 0,385 - (-2,5)} = 13.332 \text{ cm}^3 \quad (\text{da combinação rara})$$

A seção transversal adotada inicialmente ($W_{\text{b}} = 17.260 \text{ cm}^3$ e $W_{\text{t}} = 40.230 \text{ cm}^3$) atende ao $W_{\text{t}, \text{mín}}$ e não atende ao $W_{\text{b}, \text{mín}}$ com uma pequena diferença, e os cálculos seguintes mostrarão se a seção é suficiente.

c) Força de protensão e excentricidade da armadura no meio do vão

No caso de seção duplo T, as propriedades geométricas α_{b} e α_{t} da seção transversal **não** são iguais:

$$\alpha_{\text{t}} = A_{\text{c}}/W_{\text{t}} = 2.648/40.230 = 0,06582 \text{ cm}^{-1}$$

$$\alpha_{\text{b}} = A_{\text{c}}/W_{\text{b}} = 2.648/17.260 = 0,15342 \text{ cm}^{-1}$$

A Eq. 4.36 e a Eq. 4.42 fornecem o **maior** valor para a força de protensão P_{o} , na **transferência**:

$$\frac{1}{P_{\text{o}}} \geq \frac{\alpha_{\text{t}} e_{\text{p}} - 1}{A_{\text{c}} \bar{\sigma}_{\text{tr}, \text{o}} + \alpha_{\text{t}} M_{\text{o}}} \geq \frac{0,06582 e_{\text{p}} - 1}{(2648 \cdot 0,385) + (0,06582 \cdot 18619)} \geq \frac{0,06582 e_{\text{p}} - 1}{22450}$$

$$\frac{1}{P_{\text{o}}} \geq \frac{\alpha_{\text{b}} e_{\text{p}} + 1}{-A_{\text{c}} \bar{\sigma}_{\text{c}, \text{o}} + \alpha_{\text{b}} M_{\text{o}}} \geq \frac{0,15342 e_{\text{p}} + 1}{-2648(-2,45) + (0,15342 \cdot 18619)} \geq \frac{0,15342 e_{\text{p}} + 1}{93441}$$

A Eq. 4.48 e a Eq. 4.54 fornecem o **menor** valor para a força de protensão P_{o} , para o **carregamento total**, conforme as combinações:

- **frequente**:

$$\frac{1}{P_{\text{o}}} \leq \frac{R(\alpha_{\text{t}} e_{\text{p}} - 1)}{A_{\text{c}} \bar{\sigma}_{\text{c}, \text{tot}} + \alpha_{\text{t}} M_{\text{tot}}} \leq \frac{0,75(0,06582 e_{\text{p}} - 1)}{2648(-2,5) + (0,06582 \cdot 34144)} \leq \frac{0,06582 e_{\text{p}} - 1}{-5830,2}$$

$$\frac{1}{P_{\text{o}}} \leq \frac{R(\alpha_{\text{b}} e_{\text{p}} + 1)}{-A_{\text{c}} \bar{\sigma}_{\text{tr}, \text{tot}} + \alpha_{\text{b}} M_{\text{tot}}} \leq \frac{0,75(0,15342 e_{\text{p}} + 1)}{-2648 \cdot 0,00 + (0,15342 \cdot 34144)} \leq \frac{0,15342 e_{\text{p}} + 1}{69845}$$

- rara:

$$\frac{1}{P_o} \leq \frac{R(\alpha_t e_p - 1)}{A_c \bar{\sigma}_{c,tot} + \alpha_t M_{tot}} \leq \frac{0,75(0,06582e_p - 1)}{2648(-2,5) + (0,06582 \cdot 37181)} \leq \frac{0,06582e_p - 1}{-55637}$$

$$\frac{1}{P_o} \leq \frac{R(\alpha_b e_p + 1)}{-A_c \bar{\sigma}_{tr,tot} + \alpha_b M_{tot}} \leq \frac{0,75(0,15342e_p + 1)}{-2648 \cdot 0,342 + (0,15342 \cdot 37181)} \leq \frac{0,15342e_p + 1}{63983}$$

As retas representativas das equações acima estão mostradas na Figura 4.28. Para o traçado das retas, um ponto é proporcionado pelos valores $-1/\alpha_b$ e $1/\alpha_t$, e o segundo (pontos A, B, C e D) pode ser calculado considerando a excentricidade prática máxima ($e_{p,máx} = 25,0$ cm), com as equações correspondentes:

$$\frac{1}{P_o} \leq \frac{0,15342e_p + 1}{63983} \rightarrow \frac{1}{P_o} = \frac{0,15342 \cdot 25,0 + 1}{63983} = 7,5575 \cdot 10^{-4} \text{ kN}^{-1} \rightarrow P_o = 1.323,2 \text{ kN} \quad (\text{A})$$

$$\frac{1}{P_o} \leq \frac{0,15342e_p + 1}{69845} \rightarrow \frac{1}{P_o} = \frac{0,15342 \cdot 25,0 + 1}{69845} = 6,9232 \cdot 10^{-4} \text{ kN}^{-1} \rightarrow P_o = 1.444,4 \text{ kN} \quad (\text{B})$$

$$\frac{1}{P_o} \geq \frac{0,15342e_p + 1}{93441} \rightarrow \frac{1}{P_o} = \frac{0,15342 \cdot 25,0 + 1}{93441} = 5,1749 \cdot 10^{-4} \text{ kN}^{-1} \rightarrow P_o = 1.932,4 \text{ kN} \quad (\text{C})$$

$$\frac{1}{P_o} \geq \frac{0,06582e_p - 1}{22450} \rightarrow \frac{1}{P_o} = \frac{0,06582 \cdot 25,0 - 1}{22450} = 2,8753 \cdot 10^{-4} \text{ kN}^{-1} \rightarrow P_o = 3.477,9 \text{ kN} \quad (\text{D})$$

Da equação para a combinação rara, o ponto E é calculado com $e_p = 0$:

$$\frac{1}{P_o} \leq \frac{0,06582e_p - 1}{-55637} \rightarrow \frac{1}{P_o} = \frac{0,06582 \cdot 0,0 - 1}{-55637} = 1,7974 \cdot 10^{-4} \text{ kN}^{-1} \quad (\text{E})$$

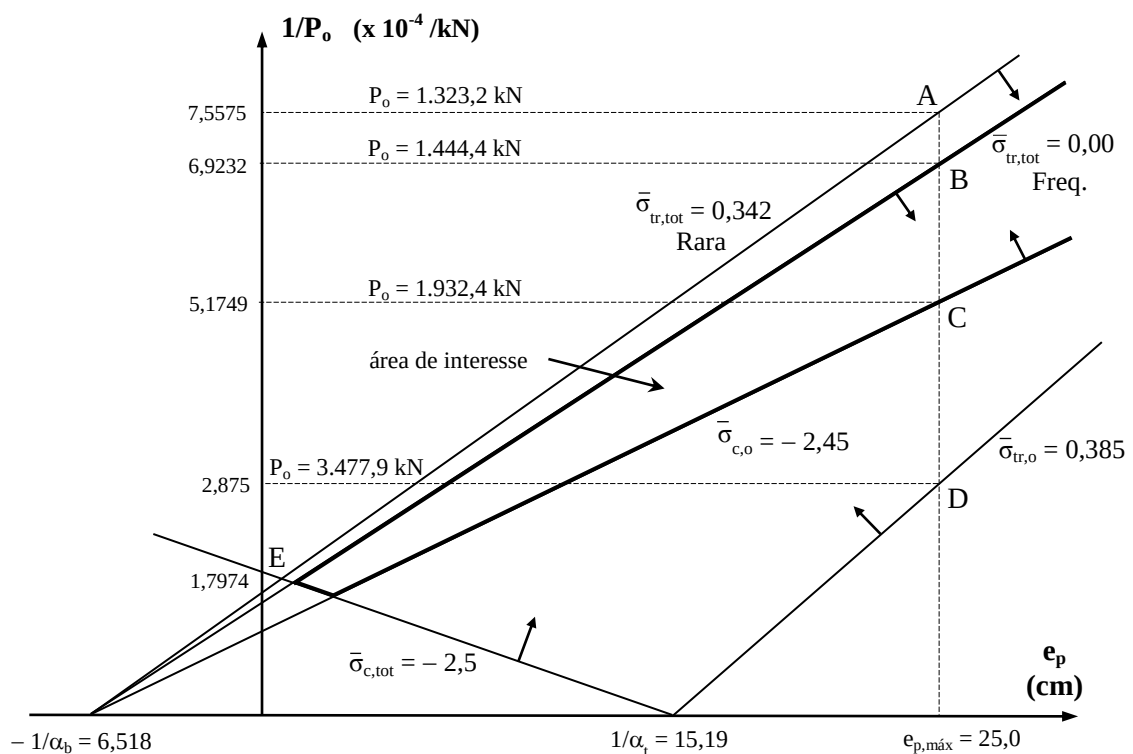


Figura 4.28 – Diagrama de Magnel com as retas que representam as equações de P_o e e_p .

A área de interesse mostrada na Figura 4.28 indica os possíveis pares de $\mathbf{P}_o \times \mathbf{e}_p$ que podem ser adotados de modo que todas as tensões admissíveis sejam atendidas.¹²⁸

Constata-se no diagrama que a força de protensão $P_o = 1.444,4$ kN para a excentricidade $e_{p,máx} = 25,0$ cm (ponto B), atende a todas as tensões admissíveis. As tensões atuantes na seção podem ser checadas com as equações Eq. 4.32, Eq. 4.38, Eq. 4.44 e Eq. 4.50:

$$\sigma_{t,o} = -\frac{P_o}{A_c} + \frac{P_o e_p}{W_t} - \frac{M_o}{W_t} \leq \bar{\sigma}_{tr,o} \quad \rightarrow \quad \sigma_{t,o} = -\frac{14444}{2648} + \frac{14444 \cdot 25,0}{40230} - \frac{18619}{40230} = -0,111 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{t,o} = -1,11 \text{ MPa} \leq \bar{\sigma}_{tr,o} = 3,85 \text{ MPa} \quad \rightarrow \text{ok!} \quad (\text{a tensão no topo é de compressão})$$

$$\sigma_{b,o} = -\frac{P_o}{A_c} - \frac{P_o e_p}{W_b} + \frac{M_o}{W_b} \geq \bar{\sigma}_{c,o} \quad \rightarrow \quad \sigma_{b,o} = -\frac{14444}{2648} - \frac{14444 \cdot 25,0}{17260} + \frac{18619}{17260} = -1,558 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{b,o} = -15,58 \text{ MPa} \geq \bar{\sigma}_{c,o} = -24,5 \text{ MPa} \quad \rightarrow \text{ok!} \quad (\text{comparação considerando os sinais})$$

$$\sigma_{t,tot} = -\frac{RP_o}{A_c} + \frac{RP_o e_p}{W_t} - \frac{M_{tot}}{W_t} \geq \bar{\sigma}_{c,tot}$$

$$\sigma_{t,tot} = -\frac{0,75 \cdot 14444}{2648} + \frac{0,75 \cdot 14444 \cdot 25,0}{40230} - \frac{37181}{40230} = -0,660 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{t,tot} = -6,60 \text{ MPa} \geq \bar{\sigma}_{c,tot} = -25 \text{ MPa} \quad \rightarrow \text{ok!}$$

$$\sigma_{b,tot} = -\frac{RP_o}{A_c} - \frac{RP_o e_p}{W_b} + \frac{M_{tot}}{W_b} \leq \bar{\sigma}_{tr,tot}$$

$$\sigma_{b,tot} = -\frac{0,75 \cdot 14444}{2648} - \frac{0,75 \cdot 14444 \cdot 25,0}{17260} + \frac{34144}{17260} = 0,00 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{b,tot} = 0,00 \text{ MPa} \leq \bar{\sigma}_{tr,tot} = 0,0 \text{ p/ combinação frequente e } \bar{\sigma}_{tr,tot} = 3,42 \text{ MPa p/ comb. rara} \quad \rightarrow \text{ok!}$$

Observa-se que, como esperado, todas as tensões admissíveis foram atendidas. Com a Eq. 4.32 pode-se determinar a tensão no topo da viga **na transferência** da protensão, na **seção do apoio**¹²⁹ com $M_o = 0$:

$$\sigma_{t,o} = -\frac{P_o}{A_c} + \frac{P_o e_p}{W_t} - \frac{M_o}{W_t} \leq \bar{\sigma}_{tr,o} \quad \rightarrow \quad \sigma_{t,o} = -\frac{14444}{2648} + \frac{14444 \cdot 25,0}{40230} = 0,352 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{t,o} = 3,52 \text{ MPa} \leq \bar{\sigma}_{tr,o} = 3,85 \text{ MPa} \quad \rightarrow \text{ok!} \quad (\text{tensão de tração no topo})$$

$$\sigma_{b,o} = -\frac{P_o}{A_c} - \frac{P_o e_p}{W_b} + \frac{M_o}{W_b} \geq \bar{\sigma}_{c,o} \quad \rightarrow \quad \sigma_{b,o} = -\frac{14444}{2648} - \frac{14444 \cdot 25,0}{17260} = -2,638 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{b,o} = -26,38 \text{ MPa} \geq \bar{\sigma}_{c,o} = -24,5 \text{ MPa} \quad \rightarrow \text{não ok!} \quad (\text{comparação considerando os sinais})$$

A tensão admissível à compressão na base não foi atendida na região dos apoios da viga, de modo que, mantida a seção transversal, a força de protensão ou a excentricidade devem ser reduzidas. A excentricidade

¹²⁸ Considerando a excentricidade $e_{p,máx} = 25,0$ cm e as forças de protensão $P_o = 1.444,4$ kN (ponto B) e $P_o = 1.323,2$ kN (ponto A), com a perda de protensão progressiva total de 25 %, as forças de protensão finais resultam: $P_{\infty, \text{Freq}} = 0,75 \cdot 1.444,4 = 1.083,3$ kN e $P_{\infty, \text{Rara}} = 0,75 \cdot 1.323,2 = 992,3$ kN, que são iguais às forças determinadas no exemplo do item 4.6.1.5.

¹²⁹ Essa verificação deve ser feita também na situação de após ocorridas todas as perdas de protensão, com a força P_{∞} .

pode ser diminuída inclinando-se a armadura em direção à borda superior da viga, como mostrado na Figura 5.18 e Figura 4.31b, solução que geralmente não é aplicada no Brasil, considerando que trata-se de fabricação em pista de protensão. Uma outra solução, mais simples, é manter a armadura reta e retirar de operação algumas cordoalhas (ou fios), colocando-as dentro de tubos plásticos (espaguete), o que impede a aderência entre o concreto e a cordoalha, em um comprimento delimitado nas proximidades dos apoios. Com a atuação de um número menor de cordoalhas, a força de protensão é diminuída, e consequentemente também as tensões normais, de modo que a tensão admissível possa ser atendida.¹³⁰

4.6.7 Exemplo 3 – Força de Protensão e Excentricidade em Viga I Pós-tensionada com Protensão Parcial e Excentricidade Variável

Para a viga biapoiada seção I **pós-tensionada** do exemplo apresentado no item 4.6.1.8, determinar a força de protensão e a excentricidade da armadura de protensão, considerando *protensão parcial* e os seguintes dados:¹³¹

- concreto C40 ($f_{ck} = 40$ MPa), $f_{ck,j}(t_0) = 30$ MPa (resistência do concreto na data da transferência da protensão), $\gamma_{conc} = 25$ kN/m³;
- carregamentos uniformemente distribuídos: permanente de finalização ($g_2 = 1,5$ kN/m), carga variável única ($q_1 = 16,1$ kN/m);
- na data da transferência da protensão atua somente o peso próprio;
- vão efetivo: $\ell_{ef} = 19,8$ m;
- excentricidade prática máxima $e_{p,máx} = 38,0$ cm;
- total de perdas de protensão progressivas: 18 % (fator de efetividade $R = 82$ %).

A seção transversal adotada está mostrada na Figura 4.29, com as propriedades geométricas:

$$\begin{aligned} A_c &= 2.432 \text{ cm}^2 \\ I_c &= 2.942.254 \text{ cm}^4 \\ y_b &= 47,85 \text{ cm} \\ y_t &= 53,75 \text{ cm} \\ W_t &= 54.740 \text{ cm}^3 \\ W_b &= 61.489 \text{ cm}^3 \\ \text{peso próprio: } g_1 &= 6,08 \text{ kN/m} \end{aligned}$$

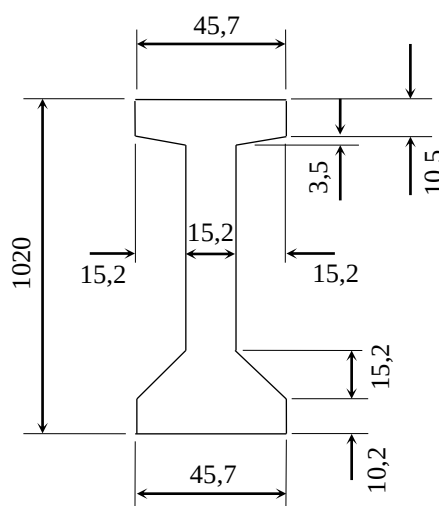


Figura 4.29 – Dimensões (mm) da seção transversal da viga I.

Resolução

a) tensões admissíveis

No caso da *protensão parcial*, para a tensão admissível do concreto à tração após ocorridas todas as perdas de protensão pode ser adotado um valor superior à tensão αf_{ct} (ver Eq. 2.6), ou pode ser desconsiderada (Eq. 4.54). A força de protensão e a excentricidade resultantes proporcionarão tensões de tração e fissuras, e a viga deverá ter armadura passiva de modo a resistir às tensões e controlar a abertura de fissura, limitada a 0,2 mm para a **combinação frequente** (ver Tabela 3.9, item 3.6). Portanto, o Estado-Limite de Formação de Fissuras não necessita ser obedecido. Para a tensão admissível à tração na transferência da protensão será considerado o valor preconizado pela NBR 6118 para o ato da protensão (ver item 3.9).

¹³⁰ Uma solução também consiste em aumentar a largura das nervuras da seção T.

¹³¹ Este exemplo toma como base os dados apresentados no exemplo de Nawy^[4] (p. 122), que determinou a força de protensão por meio de tensões admissíveis.

Instante	Tensões admissíveis	
	Compressão	Tração
Na transferência da protensão	$\bar{\sigma}_{c,0} = -0,62f_{ck,j}$ $= -0,62 \cdot 30 = -18,6 \text{ MPa}$	$\bar{\sigma}_{tr,0} = 1,2f_{ct,m} = 1,2 \cdot 0,3\sqrt{30^2}$ $\bar{\sigma}_{tr,0} = 3,48 \text{ MPa}$
Após todas as perdas	$\bar{\sigma}_{c,tot} = -0,5f_{ck}$ $= -0,5 \cdot 40 = -20,0 \text{ MPa}$	$\bar{\sigma}_{tr,tot}$ desconsiderada

b) Momentos fletores

$$\text{Do peso próprio: } M_{g1} = M_o = \frac{6,08 \cdot 19,8^2}{8} 100 = 29.795 \text{ kN.cm}$$

$$\text{Carregamento total: } p_{tot} = g_1 + g_2 + q_1 = 6,08 + 1,5 + 16,1 = 23,68 \text{ kN/m}$$

$$\text{Momento fletor do carregamento total: } M_{tot} = \frac{23,68 \cdot 19,8^2}{8} 100 = 116.044 \text{ kN.cm}$$

c) Força de protensão e excentricidade da armadura no meio do vão

No caso de seção I com mesas diferentes, as propriedades geométricas α_b e α_t da seção transversal **não** são iguais:

$$\alpha_t = A_c/W_t = 2432/54740 = 0,04443 \text{ cm}^{-1}$$

$$\alpha_b = A_c/W_b = 2432/61489 = 0,03955 \text{ cm}^{-1}$$

A Eq. 4.36 e a Eq. 4.42 fornecem o **maior** valor para a força de protensão P_o , na **transferência**:

$$\frac{1}{P_o} \geq \frac{\alpha_t e_p - 1}{A_c \bar{\sigma}_{tr,0} + \alpha_t M_o} \geq \frac{0,04443e_p - 1}{(2432 \cdot 0,348) + (0,04443 \cdot 29795)} \geq \frac{0,04443e_p - 1}{21701}$$

$$\frac{1}{P_o} \geq \frac{\alpha_b e_p + 1}{-A_c \bar{\sigma}_{c,0} + \alpha_b M_o} \geq \frac{0,03955e_p + 1}{-2432(-1,86) + (0,03955 \cdot 29795)} \geq \frac{0,03955e_p + 1}{57019}$$

A Eq. 4.48 fornece o **menor** valor para a força de protensão P_o , para o **carregamento total**:

$$\frac{1}{P_o} \leq \frac{R(\alpha_t e_p - 1)}{A_c \bar{\sigma}_{c,tot} + \alpha_t M_{tot}} \leq \frac{0,82(0,04443e_p - 1)}{2432(-2,0) + (0,04443 \cdot 116044)} \leq \frac{0,04443e_p - 1}{355,9}$$

As retas representativas das equações Eq. 4.36, Eq. 4.42, Eq. 4.48, cada qual referente a uma tensão admissível, estão mostradas na Figura 4.30, onde a área de interesse indica os pares de $P_o \times e_p$ que podem ser adotados de modo a que as tensões admissíveis sejam atendidas. Considerando uma excentricidade prática máxima de 38 cm, o maior (ponto A) e o menor (não mostrado no gráfico) valor da força P_o podem ser calculados com a Eq. 4.42 e a Eq. 4.48:

$$\frac{1}{P_o} \geq \frac{0,03955e_p + 1}{57019} \rightarrow \frac{1}{P_o} = \frac{0,03955 \cdot 38 + 1}{57019} = 4,38959 \times 10^{-4} / \text{kN} \rightarrow P_o = 2.278,1 \text{ kN}$$

$$\frac{1}{P_o} \leq \frac{0,04443e_p - 1}{355,9} \rightarrow \frac{1}{P_o} = \frac{0,04443 \cdot 38 - 1}{355,9} = 1,93408 \times 10^{-3} / \text{kN} \rightarrow P_o = 517,0 \text{ kN}$$

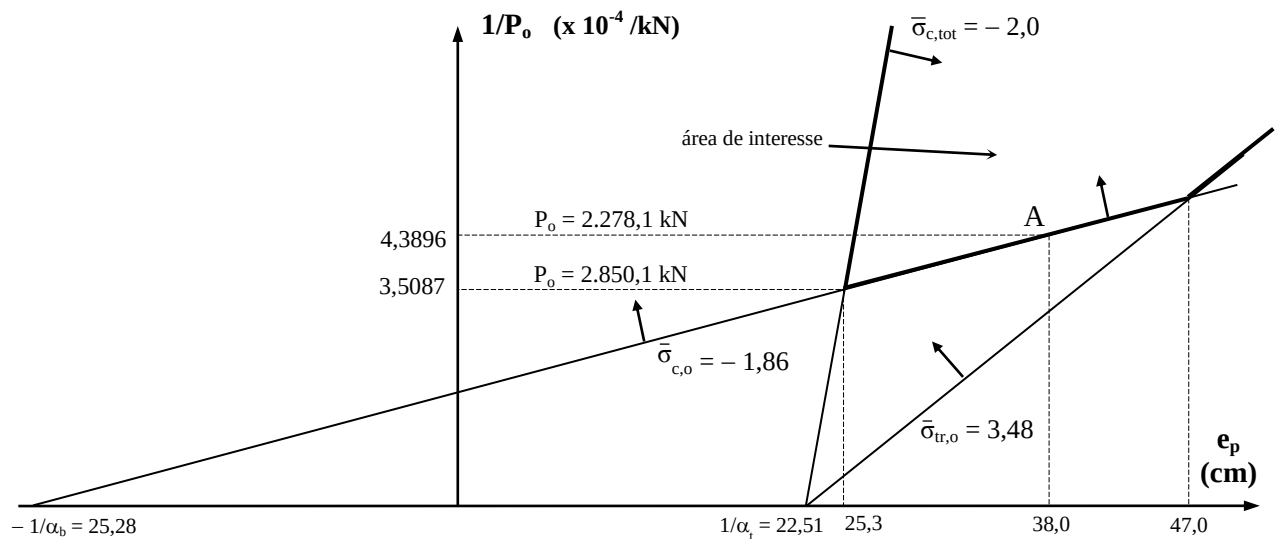


Figura 4.30 – Diagrama de Magnel com as retas que representam as equações de P_0 e e_p .

Portanto, para a excentricidade prática máxima de 38 cm, a força de protensão P_0 a ser escolhida deverá estar compreendida entre 517,0 e 2.278,1 kN, sendo condicionada pela abertura máxima de fissura de 0,2 mm, pela flecha, quantidade de armadura passiva e principalmente pelo menor custo.

4.7 Verificação de Tensões nas Seções Transversais ao Longo do Vão

Após a determinação das forças de protensão (P_i , P_a , P_0 e P_∞) e da excentricidade da armadura de protensão, as tensões normais atuantes no concreto devem ser verificadas, com o objetivo de garantir que as tensões admissíveis não sejam ultrapassadas. Geralmente, a verificação é feita na seção transversal onde ocorre a maior sollicitação devida aos carregamentos externos (maior momento fletor), considerando as diferentes etapas de carregamentos da peça. Todas as possíveis combinações de carregamentos que podem ocorrer devem ser consideradas, como:

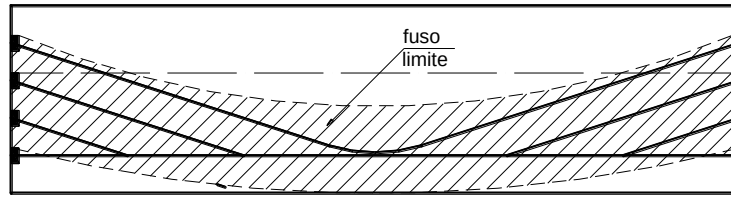
- a) na transferência da força de protensão para a peça (quando geralmente atua somente o peso próprio e a protensão), denominado *estado em vazio*;
- b) no caso de peça pré-moldada, no transporte interno ou no canteiro de obra onde a peça foi fabricada (peso próprio, protensão, efeitos dinâmicos, etc.);
- c) na estocagem (peças pré-moldadas);
- d) no transporte externo à fábrica (peças pré-moldadas);
- e) na montagem (peças pré-moldadas);
- f) no *estado em serviço* (protensão, peso próprio, demais carregamentos permanentes e frações dos carregamentos variáveis).

Para cada combinação de carregamentos ou ações devem ser verificados os Estados-Limites de Descompressão, de Formação de Fissuras, Compressão Excessiva, etc., conforme o nível de protensão. A verificação na seção de maior sollicitação, no entanto, não garante que as tensões admissíveis não sejam ultrapassadas nas demais seções ao longo do vão, de modo que também devem ser verificadas. Para evitar o trabalho laborioso de verificação de várias seções individualmente, foram desenvolvidos procedimentos simples e gráficos com essa finalidade, chamados **fuso limite** e **curvas limites**.

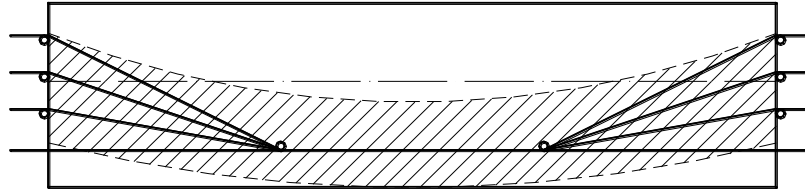
4.7.1 Processo do Fuso Limite

O **fuso limite** é uma faixa ou região dentro da altura da peça onde os cabos de protensão devem estar situados, o que proporciona que as tensões admissíveis sejam atendidas ao longo de todo o comprimento da peça. O **fuso limite** é estabelecido por meio de limites para as excentricidades da força de protensão (Figura 4.31). Sua aplicação é indicada para as peças onde não ocorre grande

variação da intensidade da força de protensão, isto é, não há interrupção de cabos ao longo do vão, e todos são ancorados nas extremidades da peça.



a) cabos curvos pós-tracionados;



b) cabos poligonais pré-tracionados.

Figura 4.31 – Exemplos de aplicação do fuso limite.

Com base nas equações apresentadas na Tabela 4.1 podem ser determinadas equações para curvas que delimitam o fuso, com uma faixa de valores da excentricidade (e_p) em qualquer seção transversal, que satisfazem as tensões admissíveis escolhidas. Isolando a excentricidade nas equações Eq. 4.35, Eq. 4.41, Eq. 4.47 e Eq. 4.53 tem-se:^[1,22]

$$P_o \leq \frac{A_c \bar{\sigma}_{tr,0} + \alpha_t M_o}{\alpha_t e_p - 1} \quad \rightarrow \quad e_p \leq \frac{M_o}{P_o} + \frac{W_t \bar{\sigma}_{tr,0}}{P_o} + \frac{1}{\alpha_t} \quad \text{Eq. 4.77}$$

$$P_o \leq \frac{-A_c \bar{\sigma}_{c,0} + \alpha_b M_o}{\alpha_b e_p + 1} \quad \rightarrow \quad e_p \leq \frac{M_o}{P_o} - \frac{W_b \bar{\sigma}_{c,0}}{P_o} - \frac{1}{\alpha_b} \quad \text{Eq. 4.78}$$

$$P_o \geq \frac{A_c \bar{\sigma}_{c,tot} + \alpha_t M_{tot}}{R(\alpha_t e_p - 1)} \quad \rightarrow \quad e_p \geq \frac{M_{tot}}{RP_o} + \frac{W_t \bar{\sigma}_{c,tot}}{RP_o} + \frac{1}{\alpha_t} \quad \text{Eq. 4.79}$$

$$P_o \geq \frac{-A_c \bar{\sigma}_{tr,tot} + \alpha_b M_{tot}}{R(\alpha_b e_p + 1)} \quad \rightarrow \quad e_p \geq \frac{M_{tot}}{RP_o} - \frac{W_b \bar{\sigma}_{tr,tot}}{RP_o} - \frac{1}{\alpha_b} \quad \text{Eq. 4.80}$$

$$W_t = \frac{I_c}{y_t} \quad ; \quad W_b = \frac{I_c}{y_b} \quad ; \quad \alpha_t = (A_c y_t)/I_c = A_c/W_t \quad ; \quad \alpha_b = (A_c y_b)/I_c = A_c/W_b$$

$\bar{\sigma}_{tr,0}$ = tensão admissível do concreto à tração na transferência da protensão;

$\bar{\sigma}_{c,0}$ = tensão admissível do concreto à compressão na transferência da protensão (valor negativo);

$\bar{\sigma}_{c,tot}$ = tensão admissível do concreto à compressão, após ocorridas as perdas progressivas (valor negativo);

$\bar{\sigma}_{tr,tot}$ = tensão admissível do concreto à tração, após ocorridas as perdas progressivas;

M_o = momento fletor solicitante atuante no instante da transferência da protensão para a peça;

M_{tot} = momento fletor solicitante atuante após ocorridas as perdas de protensão progressivas;

P_o = força de protensão atuante na peça antes das perdas de protensão progressivas dependentes do tempo (logo após a transferência da protensão);

R = coeficiente relativo às perdas de protensão progressivas dependentes do tempo, onde a força de protensão final é $P_\infty = RP_o$.

Com as equações Eq. 4.77 a Eq. 4.80 podem ser calculadas as excentricidades da armadura de protensão em seções intermediárias ao longo do vão. A **máxima** excentricidade que irá atender as tensões admissíveis de tração e compressão no concreto, na transferência da protensão, é calculada com a Eq. 4.77 e a Eq. 4.78, e com a Eq. 4.79 e a Eq. 4.80 é determinada a **mínima** excentricidade correspondente ao carregamento total atuante na peça. A Figura 4.32 mostra os limites de excentricidades, mínimas e máximas ao longo da peça, com a região onde a linha de ação representativa da *força resultante de protensão* deve situar-se, o chamado **fuso limite**.

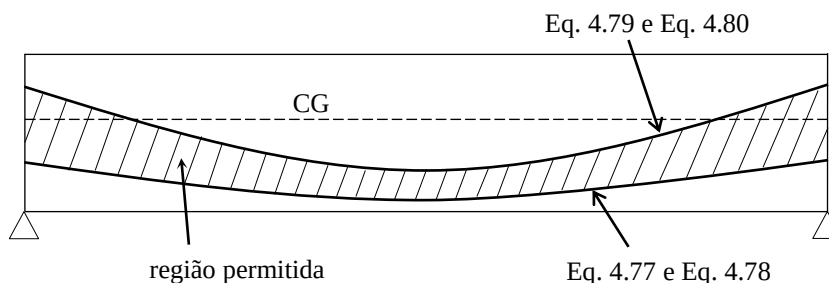


Figura 4.32 – Região do fuso limite.^[1]

Após a determinação das forças de protensão P_0 e P_∞ na seção crítica (mais solicitada pela flexão), as forças de protensão devem ser determinadas nas seções intermediárias, considerando as perdas de protensão relativas ao atrito, escorregamento na ancoragem e às perdas progressivas dependentes do tempo. Com as forças de protensão e o momento fletor atuante em cada seção, as excentricidades mínima e máxima são determinadas com as equações Eq. 4.77 a Eq. 4.80. As excentricidades mínimas (limite superior) podem resultar negativas, indicando que a força de protensão resultante pode estar acima do centro de gravidade da seção transversal naquela seção. Podem existir cabos individuais de protensão fora do **fuso limite**, desde que a força resultante esteja dentro do fuso. No caso de peças com *protensão parcial*, a Eq. 4.77 e a Eq. 4.78 são aplicadas para definirem a excentricidade máxima.^[1,22]

4.7.2 Processo das Curvas Limites

No processo das **curvas limites** pode-se estabelecer limites às tensões normais provocadas pela protensão, ao longo do comprimento da peça. As curvas limites são estabelecidas por meio de valores limites (tensões admissíveis) às tensões devidas à protensão, considerando também as tensões devidas às possíveis combinações de carregamentos que podem ocorrer. Geralmente, as verificações são feitas para as combinações de carregamentos mais desfavoráveis, sendo os mais comuns os seguintes:^[4]

a) *estado em vazio*: $g_1 + P_0$

Atuam somente o peso próprio e a força de protensão antes das perdas progressivas (*pouca carga e muita protensão*).

b) *estado em serviço*: $g_{tot} + \psi q + P_\infty$

Atuam todas as cargas permanentes, a força de protensão depois de ocorridas todas as perdas progressivas, e todas as cargas variáveis corrigidas pelos fatores ψ (*muita carga e pouca protensão*).

Para as duas situações (*estados em vazio e serviço*) são impostos limites às tensões normais causadas pela protensão e pelos carregamentos, visando respeitar os Estados-Limites de Serviço (descompressão, formação de fissuras, fissuração inaceitável, compressão excessiva, etc.).

Limites de Tensão para o Estado em Vazio

Em uma seção transversal qualquer da peça, onde $\sigma_{bv,lim}$ e $\sigma_{tv,lim}$ são os valores limites para as tensões normais no concreto, correspondentes a um determinado Estado-Limite estabelecido para o *estado em vazio*, e com a convenção de sinal negativo quando tratar-se de tensões de compressão e positivo quando de tração, tem-se (Figura 4.33):

a) na borda inferior

$$\sigma_{bP_0} + \sigma_{bg1} = \sigma_{bv} \geq \sigma_{bv,lim}$$

$$\sigma_{bP_0} \geq \sigma_{bv,lim} - \sigma_{bg1} \quad (I) \quad \text{Eq. 4.81}$$

b) na borda superior

$$\sigma_{tP_0} + \sigma_{tg1} = \sigma_{tv} \leq \sigma_{tv,lim}$$

$$\sigma_{tP_0} \leq \sigma_{tv,lim} - \sigma_{tg1} \quad (II) \quad \text{Eq. 4.82}$$

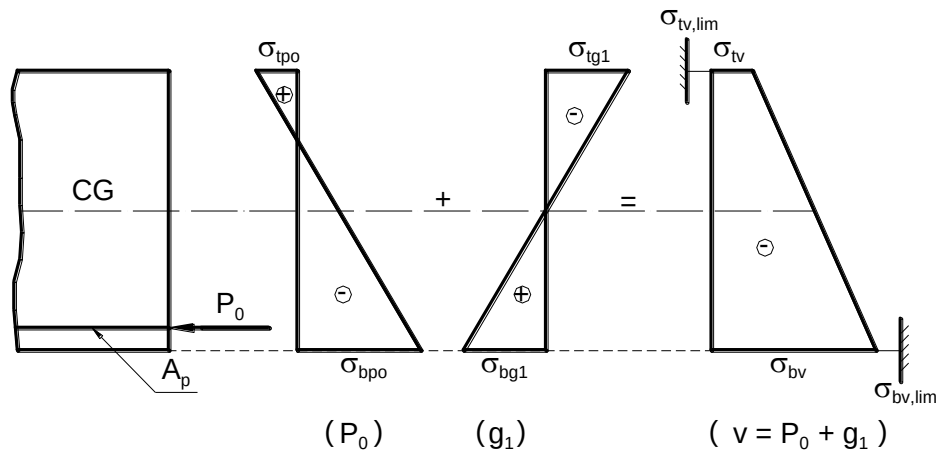


Figura 4.33 – Tensões normais atuantes no estado em vazio.^[4]

Limites de Tensão para o Estado em Serviço

De modo semelhante, tem-se (Figura 4.34):

a) na borda inferior

$$\sigma_{bP_\infty} + \sigma_{bg} + \sigma_{bq} = \sigma_{bs} \leq \sigma_{bs,lim}$$

$$\sigma_{bP_\infty} \leq \sigma_{bs,lim} - \sigma_{bg} - \sigma_{bq} \quad (III) \quad \text{Eq. 4.83}$$

b) na borda superior

$$\sigma_{tP_\infty} + \sigma_{tg} + \sigma_{tq} = \sigma_{ts} \geq \sigma_{ts,lim}$$

$$\sigma_{tP_\infty} \geq \sigma_{ts,lim} - \sigma_{tg} - \sigma_{tq} \quad (IV) \quad \text{Eq. 4.84}$$

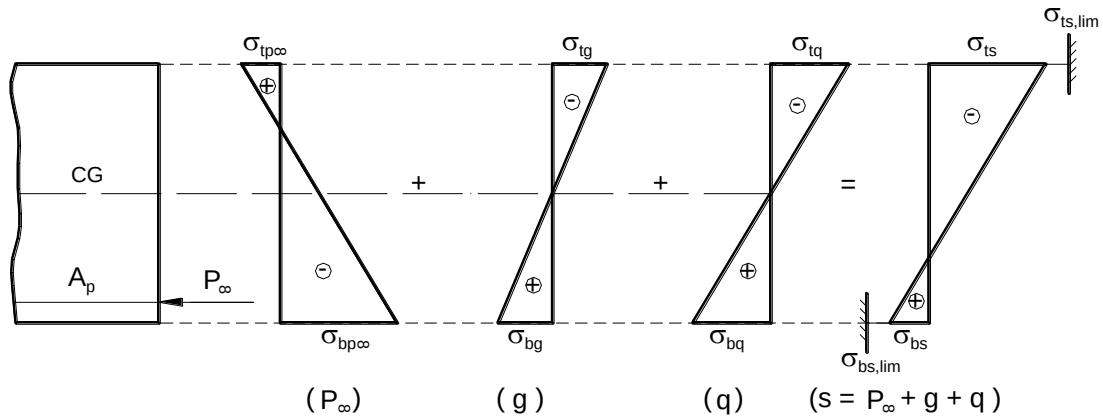


Figura 4.34 – Tensões normais atuantes no estado em serviço.^[4]

Curvas Limites para as Tensões Normais

As equações I a IV (Eq. 4.81 a Eq. 4.84) definem **curvas limites** para as tensões atuantes devidas à protensão e aos carregamentos. Dividindo os membros de cada equação pela tensão devida à protensão no meio do vão, para as forças P_0 e P_∞ ($\sigma_{bP_0,m}$, $\sigma_{tP_0,m}$, $\sigma_{bP_\infty,m}$ e $\sigma_{tP_\infty,m}$), surgem as equações relativas às **curvas limites**:

$$\frac{\sigma_{bP_0}}{\sigma_{bP_0,m}} \leq \frac{\sigma_{bv,lim} - \sigma_{bg1}}{\sigma_{bP_0,m}} \rightarrow C_{bv} \text{ (Ia)} \quad \text{Eq. 4.85}$$

curva limite para a borda inferior, no **estado em vazio**.

$$\frac{\sigma_{tP_0}}{\sigma_{tP_0,m}} \leq \frac{\sigma_{tv,lim} - \sigma_{tg1}}{\sigma_{tP_0,m}} \rightarrow C_{tv} \text{ (IIa)} \quad \text{Eq. 4.86}$$

curva limite para a borda superior, no **estado em vazio**.

$$\frac{\sigma_{bP_\infty}}{\sigma_{bP_\infty,m}} \geq \frac{\sigma_{bs,lim} - \sigma_{bg} - \sigma_{bq}}{\sigma_{bP_\infty,m}} \rightarrow C_{bs} \text{ (IIIa)} \quad \text{Eq. 4.87}$$

curva limite para a borda inferior, no **estado em serviço**.

$$\frac{\sigma_{tP_\infty}}{\sigma_{tP_\infty,m}} \geq \frac{\sigma_{ts,lim} - \sigma_{tg} - \sigma_{tq}}{\sigma_{tP_\infty,m}} \rightarrow C_{ts} \text{ (IVa)} \quad \text{Eq. 4.88}$$

curva limite para a borda superior, no **estado em serviço**.

Exemplo de Curvas Limites

Na Figura 4.35 está mostrada uma viga simplesmente apoiada, protendida em pista de protensão com armadura composta por 6 cordoalhas retas. No esquema gráfico, a seção 0 corresponde à seção do meio do vão, no eixo de simetria da viga, e 5 é a seção de apoio. As curvas limites, de I a IV, estão desenhadas abaixo da viga, conforme os valores das ordenadas dadas no primeiro termo da Eq. 4.85 a Eq. 4.88. No meio do vão (seção 0), a ordenada máxima das tensões relativas ($\sigma_p/\sigma_{p,m}$) causadas pela protensão é igual a 1, ou seja, no meio do vão as 6 cordoalhas produzem efeitos totais (100 %). A ordenada 1 é dividida em partes iguais, relativas ao número de cordoalhas (6 no caso), e cada 1/6 representa a contribuição de uma cordoalha nas tensões causadas pela força de protensão total. Em qualquer seção ao longo do vão, a reta horizontal de ordenada 1 não pode interceptar e

ultrapassar qualquer curva limite, pois se interceptar uma curva limite, significa que a tensão limite daquela curva foi alcançada. Quando isso ocorre, a solução usual é diminuir a força de protensão, retirando de ação uma parcela da armadura de protensão, e assim a excentricidade pode ser mantida.

Em pistas de protensão o efeito da protensão de uma cordoalha (ou fio) pode ser desativado eliminando-se a aderência entre a cordoalha e o concreto, a partir de uma determinada seção, o que pode ser feito revestindo-se a cordoalha com betume, papel kraft, revestimento com mangueiras de plástico flexível (espaguete), etc. Cada interrupção de uma cordoalha resulta na perda de contribuição dessa cordoalha, representada pelos degraus no diagrama das tensões relativas, isto é, cada degrau significa a desativação de uma ou mais cordoalhas.

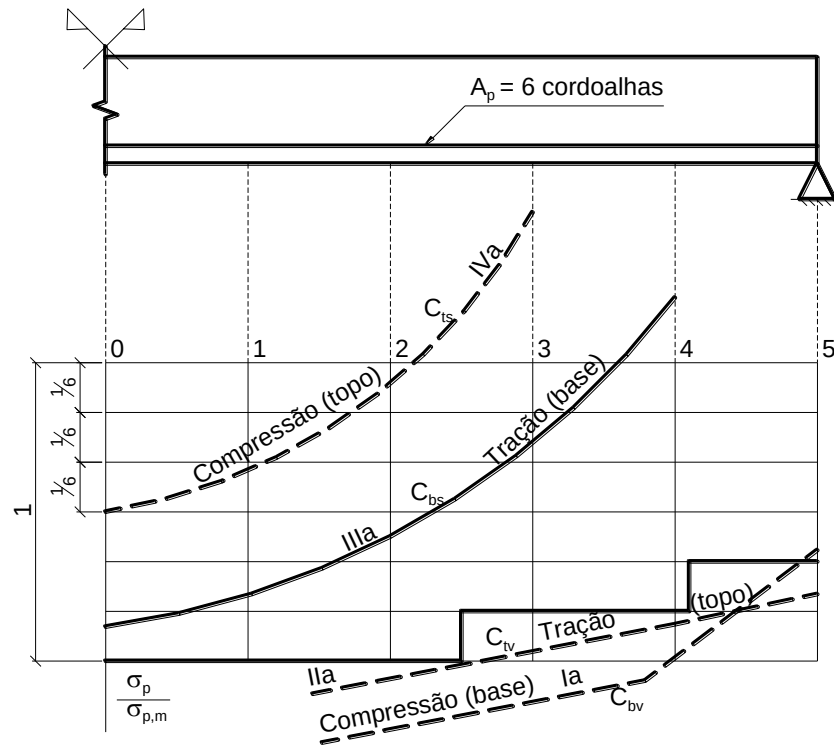


Figura 4.35 – Exemplo de curvas limites em viga com armadura de protensão composta por seis cordoalhas.^[4]

Como se nota no gráfico da Figura 4.35, as tensões relativas devidas aos carregamentos e à protensão com 6 cordoalhas (dadas pela reta horizontal de ordenada 1) não podem ser mantidas constantes e iguais a 1 entre a seção do meio do vão (0) e o apoio (5), porque a reta interceptaria as curvas limites, primeiro a curva C_{IV} e depois a curva C_{bv} , o que significa que as tensões limites dessas curvas seriam ultrapassadas no *estado em vazio*. Para evitar essa situação, pode-se interromper o efeito de uma ou mais cordoalhas, isto é, diminuir a intensidade da força de protensão. No caso da viga da Figura 4.35, uma cordoalha foi retirada de ação, entre as seções 2 e 3, de modo que 5 cordoalhas continuaram em ação, até um ponto entre as seções 4 e 5, quando novamente as duas curvas seriam interceptadas, e foi necessário retirar de ação mais uma cordoalha. Portanto, duas cordoalhas foram retiradas de ação nas posições convenientes, e na seção 5 do apoio apenas 4 cordoalhas foram mantidas em ação.

Outras combinações de carregamentos importantes também podem ser analisadas, ou seja, outras curvas limites podem ser geradas, embora seja mais prático trabalhar com apenas as duas mais desfavoráveis. O processo das **curvas limites** pode também ser empregado no caso de cabos de protensão curvos, interrompidos antes das extremidades da peça, comuns na pós-tração.

5. PERDAS DE PROTENSÃO

5.1 Introdução

A tensão na armadura de protensão decresce continuamente com o tempo, rapidamente no início, e depois mais lentamente ao longo da vida útil da peça. A redução da tensão se deve à diminuição do alongamento da armadura, por diversas causas, o que leva à redução da força de protensão (Figura 5.1). Todas as diferentes perdas são somadas para configurar a chamada **perda de protensão total**, que deve ser calculada para se poder estimar as forças de protensão inicial e final, necessárias no projeto de peças protendidas.

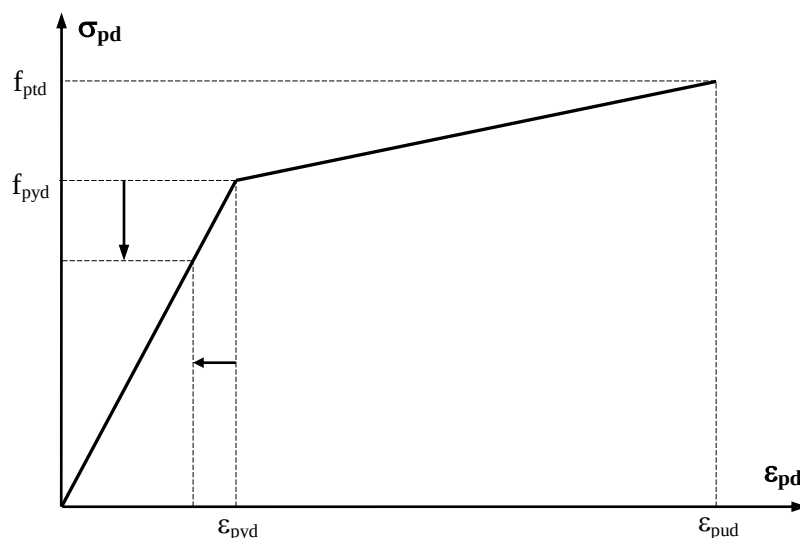


Figura 5.1 – Reduções de alongamento na armadura de protensão originam reduções de tensão.

São as seguintes as perdas individuais importantes:¹³²

1. **Escorregamento na ancoragem:** após a operação de estiramento da armadura de protensão,¹³³ o cilindro hidráulico “solta” a armadura, que escorrega alguns milímetros e neste movimento arrasta a cunha para dentro do furo cônico da peça porta-cunha, até a sua completa cravação;
2. **Relaxação:** após o estiramento a armadura de protensão permanece sob alongamento e tensão, e por uma propriedade natural do aço apresenta uma perda de tensão ao longo do tempo;
3. **Encurtamento elástico inicial:** quando a força de protensão é aplicada na peça, comprime o concreto, que deforma-se e encurta. A armadura de protensão simultaneamente também encurta, ocorre uma perda de parte do alongamento inicial, e conseqüentemente perda de força de protensão;
4. **Retração:** a água livre do concreto evapora ao longo do tempo (entre outras causas de retração), e origina uma diminuição de volume do concreto, e conseqüentemente o encurtamento da peça e da armadura de protensão;
5. **Fluência:** a força de protensão e os carregamentos externos aplicam tensões de compressão no concreto, que causam deformações de encurtamento na peça ao longo do tempo, as quais originam diminuição de tensão na armadura de protensão;
6. **Atrito:** quando a armadura é movimentada no estiramento, ocorre atrito entre a bainha e o aço de protensão, especialmente em cabos curvos, que diminui a tensão aplicada no aço ao longo da bainha e do comprimento da peça.

¹³² Cada uma das diferentes perdas será novamente analisada e terá a formulação de cálculo apresentada.

¹³³ A armadura de protensão pode ser formada por fios, cordoalhas ou cabos (conjunto de cordoalhas embutidas em bainha).

Como se nota nessas definições, as perdas de protensão se devem ao concreto e ao aço, e são instantâneas ou dependentes do tempo (diferidas), como ilustrado na Figura 5.2. As perdas de força de protensão também têm sua ocorrência dependente do tipo de aplicação da protensão, **pré** ou **pós-tensionada**, como apresentadas na Tabela 5.1.

As perdas dependentes do tempo podem ser interdependentes, como por exemplo a relaxação, que ao diminuir a tensão no aço, reduz também a tensão no concreto, e assim reduz a perda por fluência, que por sua vez, reduz a relaxação no aço.

A intensidade das perdas de protensão pode variar ao longo do comprimento da peça, conforme a posição de uma seção, e geralmente a perda que interessa é em uma seção crítica, como a seção mais solicitada pelos carregamentos externos.

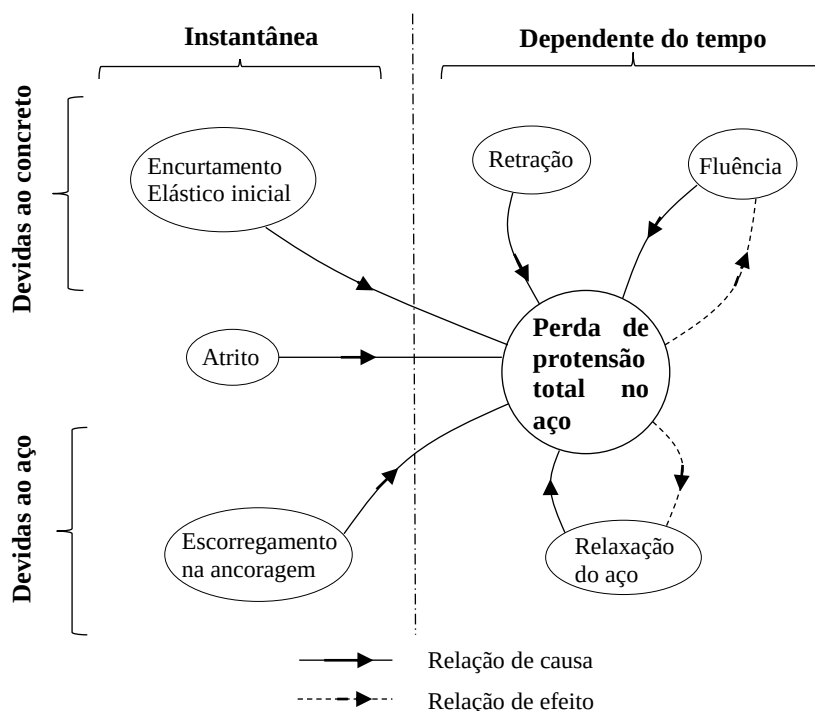


Figura 5.2 – Contribuição de cada perda de protensão na perda total.^[2]

A NBR 6118 (item 9.6.3.1) apresenta que “O projeto deve prever as perdas da força de protensão em relação ao valor inicial aplicado pelo aparelho tensor, ocorridas antes da transferência da protensão ao concreto (**perdas iniciais**, na pré-tração), durante essa transferência (**perdas imediatas**) e ao longo do tempo (**perdas progressivas**).” Portanto, a norma faz uma classificação das perdas em função do instante de ocorrência:¹³⁴

- perdas iniciais** (na **pré-tração**): aquelas que ocorrem **antes** da transferência da protensão para a peça;
- perdas imediatas**: aquelas que ocorrem **durante** a transferência da protensão para a peça;
- perdas progressivas posteriores**: aquelas que ocorrem **após** a transferência da protensão, crescentes ao longo do tempo de vida útil da peça.

Na Tabela 5.1 estão apresentadas as perdas de protensão conforme a Ref. [2], que além da questão relativa à **transferência da protensão** considera também o **instante do estiramento** da armadura. Observa-se que algumas perdas de protensão são dependentes do tempo (chamadas progressivas ou diferidas), e outras perdas não são dependentes do tempo.

¹³⁴ Mais importante que a classificação e os nomes dados é o entendimento do fenômeno e porque ocorrem as diferentes perdas de força de protensão.

Tabela 5.1 – Perdas de protensão e ocorrência.^[2]

Fonte da perda de protensão	Estágio de ocorrência		Perda de força na armadura	
	Peça Pré-tensionada	Peça Pós-tensionada	Durante intervalo de tempo (t;t ₀)	Total ou durante a vida
Escorregamento na ancoragem	Antes da transferência	Na transferência	–	ΔP_{anc}
Atrito	–	No estiramento	–	ΔP_{atr}
Relaxação do aço	Antes e após a transferência	Após o estiramento	$\Delta P_r(t;t_0)$	ΔP_r
Encurtamento elástico inicial do concreto	Na transferência	No estiramento	–	ΔP_{enc}
Retração do concreto	Após a transferência	Após a transferência	$\Delta P_{cs}(t;t_0)$	ΔP_{cs}
Fluência do concreto	Após a transferência	Após a transferência	$\Delta P_{cc}(t;t_0)$	ΔP_{cc}
Total	Vida útil	Vida útil	$\Delta P_{tot}(t;t_0)$	ΔP_{tot}

5.2 Perdas de Protensão na Pré-tração

O gráfico da Figura 5.3 mostra as perdas de força de protensão que ocorrem na armadura de protensão na **pré-tração** (ou **pré-tensão**), ao longo do tempo de vida da peça. Considerando que a fabricação seja feita em pista de protensão, no término da operação de estiramento de um fio (ou cordoalha), o cilindro hidráulico “solta” o fio, e na sua movimentação elástica contrária ao alongamento, escorrega alguns poucos milímetros nos dispositivos de fixação (cunha e porta-cunha), e assim ocorre a primeira perda de protensão, classificada como **inicial** (ΔP_{anc}). Essa perda, como mostrado na Tabela 5.1, ocorre antes da transferência da protensão no caso da peça pré-tensionada. A partir desse instante os fios permanecem alongados ao longo da pista, fixados nas extremidades, e só serão relaxados (soltos) quando o concreto das peças tiver a resistência necessária. Portanto, como os fios se mantêm sob tensão e com comprimento constante durante esse período, ocorre uma perda por relaxação (ΔP_{r1}), classificada como inicial, pois a transferência da protensão para a peça ainda não foi realizada. Após terminado o estiramento de todos os fios e a preparação das fôrmas, o concreto é lançado, adere aos fios, e tem o endurecimento iniciado. Independentemente do processo de cura (natural ou térmica¹³⁵), o concreto começa a diminuir de volume, originando assim a perda por retração (ΔP_{cs1}),¹³⁶ também chamada inicial.

¹³⁵ Na cura térmica a vapor a retração é muito pequena, podendo ser desprezada, embora ainda ocorra devida a reações químicas do concreto. Na cura natural, em ambiente de fábrica, com a peça sob cobertura e abrigada do vento, e com a cura iniciada logo após o adensamento, pode-se também desprezar o efeito da retração inicial do concreto, porque o intervalo de tempo entre a concretagem e a transferência da protensão é pequeno.^[4] Peças curadas em dias quentes e sob vento/sol devem ter a perda por retração inicial melhor avaliada.

¹³⁶ A notação **c** indica concreto e **s** *shrinkage* (retração).

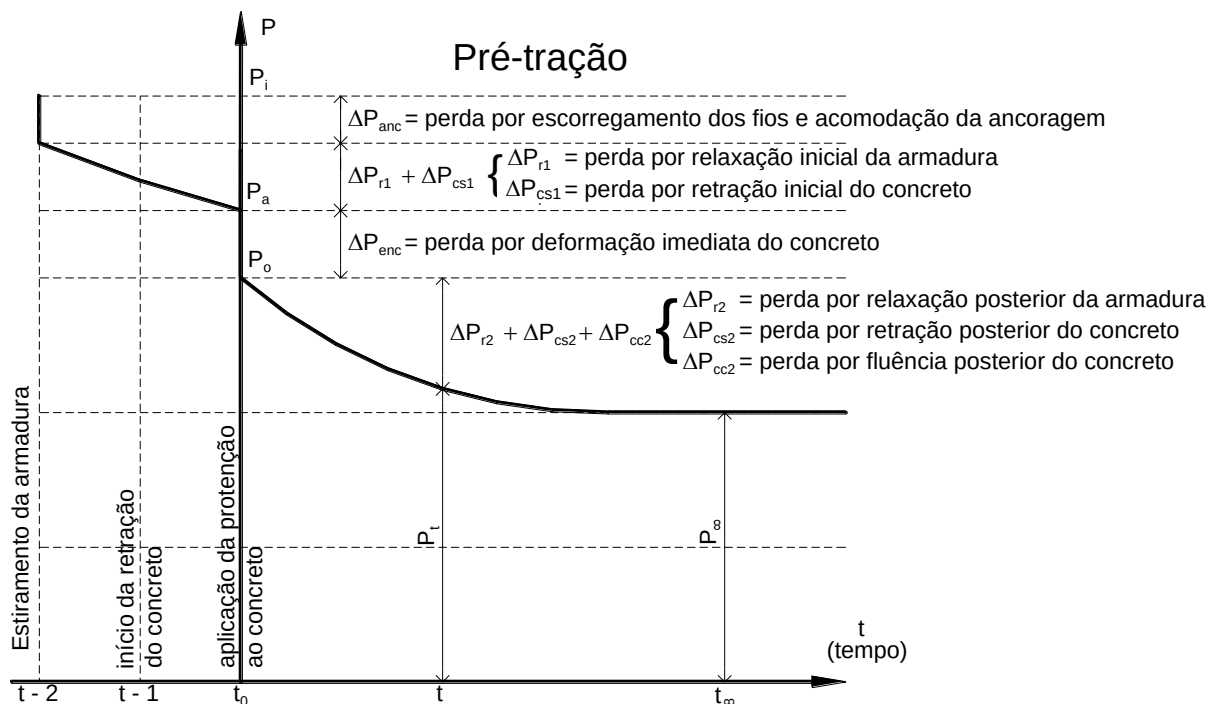


Figura 5.3 – Perdas de força de protensão com o tempo na armadura de protensão na **pré-tração**.^[4]

Quando o concreto apresenta a resistência necessária, os fios são relaxados (soltos) das ancoragens nas extremidades da pista, e nesse instante ocorre a transferência da protensão para a peça. Sob efeito da força de protensão, o concreto deforma-se e encurta, provocando a perda de protensão por encurtamento elástico inicial (ΔP_{enc}). A partir da transferência, os fios permanecem alongados no interior da peça, por toda sua vida útil, o que leva à perda por relaxação posterior (ΔP_{r2}), a qual cresce lentamente com o tempo, por isso chamada progressiva, até a estabilização. O concreto também continua a apresentar deformações, oriundas da retração e da fluência, que proporcionam outras duas perdas posteriores e progressivas (ΔP_{cs2} e ΔP_{cc2}).¹³⁷ A **perda de força de protensão total na pré-tensão** é, portanto:

$$\Delta P_{tot} = (\Delta P_{anc} + \Delta P_{r1} + \Delta P_{cs1}) + \Delta P_{enc} + (\Delta P_{r2} + \Delta P_{cs2} + \Delta P_{cc2}) \quad \text{Eq. 5.1}$$

onde as três primeiras perdas são **iniciais**, ΔP_{enc} é uma perda **imediata**, e as três últimas são perdas progressivas **posteriores**.

Na pré-tensão, se os fios ou cordoalhas não forem retos, ou seja, terem mudança de direção, deve-se acrescentar a perda por atrito que ocorre nos desvios (apoios - ver Figura 5.18). A Figura 5.4 apresenta a variação típica de tensão na armadura de protensão em peça pré-moldada **pré-tensionada**, com cura a vapor, tensão inicial no aço de $0,8f_{ptk}$ e tensão final um pouco superior a $0,5f_{ptk}$.^[2]

¹³⁷ Em ΔP_{cs2} a letra **c** indica concreto e **s** indica *shrinkage* (retração). Em ΔP_{cc2} a primeira letra **c** indica concreto e a segunda indica *creep* (fluência).

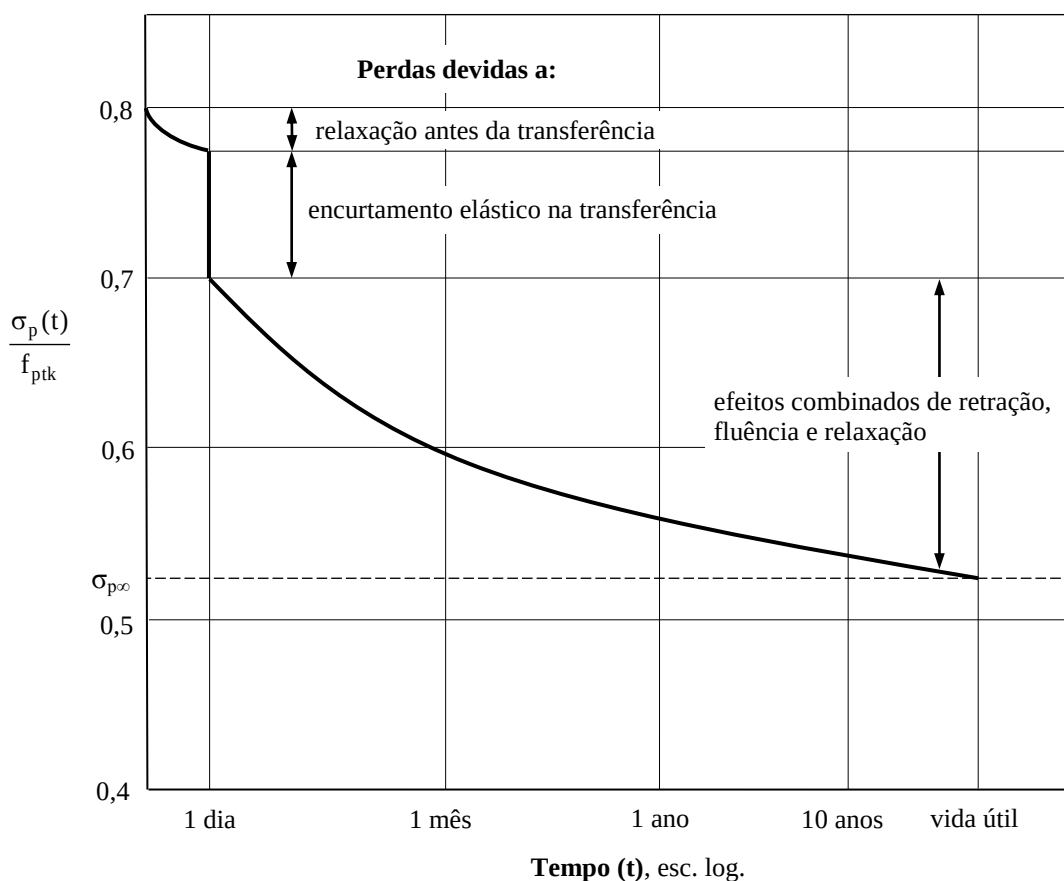


Figura 5.4 – Variação típica de tensão na armadura de protensão na **pré-tensão**, em peça pré-moldada com cura a vapor.^[2]

5.3 Perdas de Protensão na Pós-tração

O gráfico da Figura 5.5 mostra as perdas de força de protensão que ocorrem em **um cabo**¹³⁸ de protensão na **pós-tração** (ou **pós-tensão**), ao longo do tempo de vida de uma peça que contém alguns cabos (ou cordoalhas engraxadas)¹³⁹ curvos (ver Figura 1.39), estirados um a um em instantes diferentes e sequencialmente. Quando as cordoalhas do primeiro cabo são estiradas, devido à curvatura do cabo¹⁴⁰ ocorre atrito entre as cordoalhas e a superfície interna da bainha, que diminui o movimento de alongamento das cordoalhas ao longo da peça, e assim surge a primeira perda de protensão, por **atrito** (ΔP_{atr}). No término do estiramento, o cilindro hidráulico “solta” as cordoalhas, que então se movimentam (escorregam) contrariamente ao alongamento, até que ocorra a completa fixação proporcionada pelas cunhas inseridas nos furos cônicos da placa de aço dos dispositivos de ancoragem, e assim ocorre a perda por **escorregamento na ancoragem** (ΔP_{anc}). A partir deste instante (a completa cravação das cunhas) começam a atuar no cabo as perdas por **relaxação do aço e retração e fluência do concreto** (ΔP_{r1} , ΔP_{cs1} e ΔP_{cc1}), chamadas **iniciais** quando outros cabos são estirados subsequentemente, pois a força de protensão total ainda não está completamente aplicada na peça. Portanto, as perdas de protensão **iniciais** por **relaxação** da armadura e por **retração e fluência** do concreto só ocorrem quando existem múltiplos cabos de protensão, e que são estirados em instantes diferentes. No caso de existir apenas um cabo, essas perdas deixam de ser chamadas iniciais e passam a ser consideradas progressivas posteriores.

Convencionalmente considera-se que a força de protensão P_0 corresponde à força aplicada na peça ao término da operação de estiramento de todos os cabos, ou seja, corresponde à soma das forças

¹³⁸ **Cabo** é um conjunto de cordoalhas, como mostrado na Figura 1.42 e na Figura 1.43.

¹³⁹ Na **pós-tensão** geralmente são utilizados cabos, mas vem crescendo o uso de cordoalhas engraxadas, em lajes de pavimentos e pisos principalmente. As perdas apresentadas na **pós-tensão** ocorrem tanto nos cabos quanto nas cordoalhas engraxadas, mas considerando que a perda por **atrito** é muito pequena nas cordoalhas engraxadas.

¹⁴⁰ Em cabos retilíneos também surgem perdas por **atrito**, devidas a imperfeições na retinidade da bainha, como será visto no item 5.6.3.

Pós-tração

Estiramento do 1º cabo

Perdas de tensão:

- $\Delta P_{atr} + \Delta P_{anc}$
 - ΔP_{atr} = perda por atrito ao longo da armadura
 - ΔP_{anc} = perda por escorregamento dos fios e acomodação da ancoragem
- ΔP_{enc} = perda por deformação imediata do concreto pelo estiramento dos cabos restantes
- $\Delta P_{r1} + \Delta P_{cs1} + \Delta P_{cc1}$
 - ΔP_{r1} = perda por relaxação inicial da armadura
 - ΔP_{cs1} = perda por retração inicial do concreto
 - ΔP_{cc1} = perda por fluência inicial do concreto
- $\Delta P_{r2} + \Delta P_{cs2} + \Delta P_{cc2}$
 - ΔP_{r2} = perda por relaxação posterior da armadura
 - ΔP_{cs2} = perda por retração posterior do concreto
 - ΔP_{cc2} = perda por fluência posterior do concreto

Parâmetros do gráfico:

- P_i : Tensão imediatamente após a tração.
- P_0 : Tensão imediatamente após o estiramento do primeiro cabo.
- P_i : Tensão imediatamente após a tração (repetida).
- P_g : Tensão imediatamente após a tração (repetida).
- t_0 : Tempo imediatamente após a tração.
- t : Tempo após a tração.
- t_∞ : Tempo infinito (estado final).

A partir da transferência completa da força de protensão, com todos os cabos permanentemente alongados por toda a vida da peça, ocorrem as chamadas **perdas progressivas posteriores**, por **relaxação** do aço (ΔP_{r2}) e por **retração** e **fluência** do concreto (ΔP_{cs2} e ΔP_{cc2}). A **perda de força de protensão total na pós-tensão** é, portanto:

$$\Delta P_{\text{tot}} = (\Delta P_{\text{atr}} + \Delta P_{\text{anc}}) + \Delta P_{\text{enc}} + (\Delta P_{\text{r1}} + \Delta P_{\text{cs1}} + \Delta P_{\text{cc1}}) + (\Delta P_{\text{r2}} + \Delta P_{\text{cs2}} + \Delta P_{\text{cc2}}) \quad \text{Eq. 5.2}$$

¹⁴¹ Em vigas pré-moldadas, por exemplo, é comum que o período de tempo entre o estiramento do primeiro cabo e do último cabo seja pequeno, de apenas algumas horas, de tal sorte que as perdas iniciais por **relaxação** e **retração** e **fluência** do concreto são de baixa intensidade e podem por isso ser desprezadas. Quando o período de tempo entre os estiramentos dos cabos não for pequeno, essas perdas iniciais devem ser determinadas. No caso de não haver necessidade de um cálculo mais refinado, podem ser apenas estimadas, com valores sempre a favor da segurança.^[5]

As seis primeiras perdas são **imediatas**, e as três últimas são perdas progressivas **posteriores**. A Figura 5.6 apresenta a variação típica de tensão na armadura de protensão em peça **pós-tensionada**, com tensão inicial no aço de $0,8f_{ptk}$, e um pouco superior a $0,5f_{ptk}$ para a tensão final.^[2]

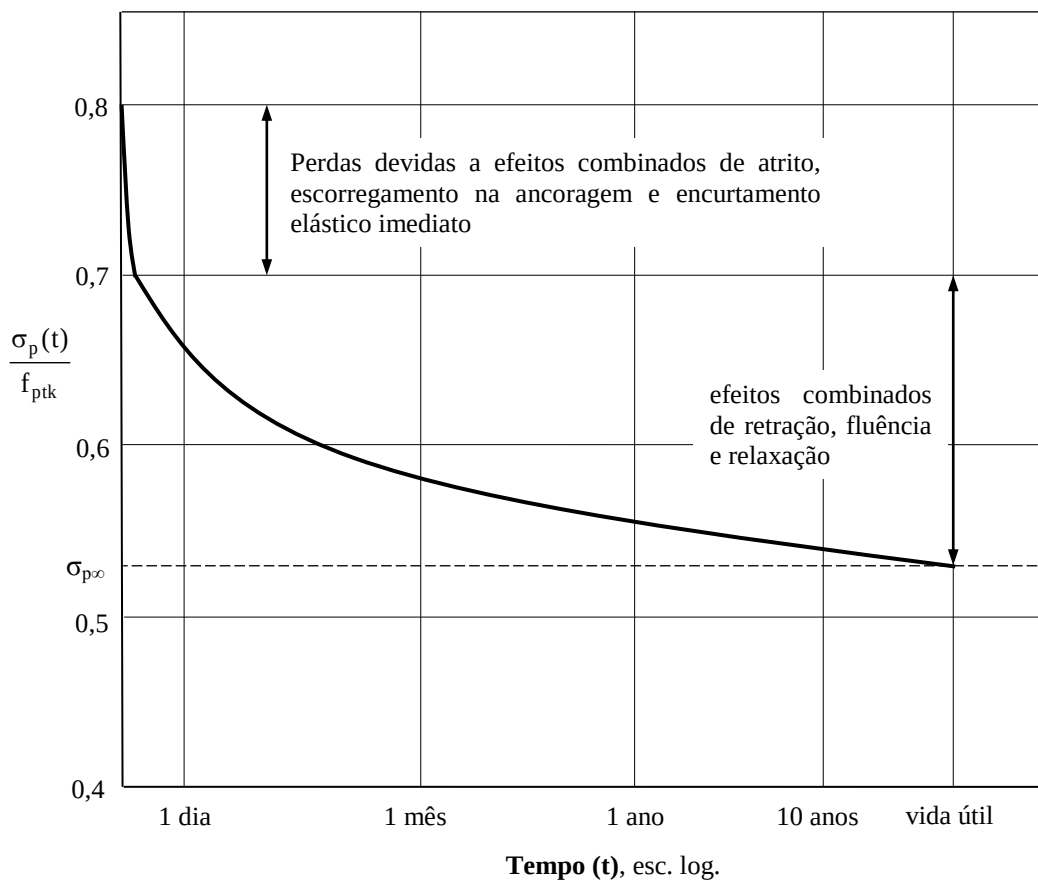


Figura 5.6 – Variação típica de tensão na armadura de protensão na **pós-tensão**.^[2]

5.4 Valores Típicos da Força de Protensão

Durante o desenvolvimento do projeto e na execução de peças de Concreto Protendido, existem situações ou fases em que podem ser associados valores particulares da força de protensão, e que servem de orientação na verificação de esforços solicitantes e execução da protensão na obra ou na fábrica.^[5] Conforme se pode observar na Figura 5.3 e também na Figura 5.5, as forças de protensão típicas (P_i , P_a , P_o , P_t e P_∞) estão apresentadas, em função das diferentes perdas de protensão que podem ocorrer nas peças. Essas forças encontram-se definidas no item 9.1 da NBR 6118.

5.4.1 Força de Protensão P_i

P_i é a “força máxima aplicada à armadura de protensão pelo equipamento de tração.”,¹⁴² é a força máxima inicial aplicada na armadura antes da fixação nas ancoragens, tanto na pré-tensão (pista de protensão) quanto na pós-tensão.

A tensão inicial na armadura (σ_{pi}), correspondente à força P_i , é limitada a valores máximos estabelecidos pela NBR 6118, como apresentado no item 3.8. A força aplicada pelo cilindro hidráulico é verificada pelos operadores por meio da leitura da pressão do óleo no manômetro da bomba hidráulica que aciona o cilindro, bem como também pela medida dos alongamentos que a armadura apresenta, conforme valores fornecidos pelo projetista.^[5]

¹⁴² Geralmente o equipamento é o cilindro hidráulico, também conhecido como “macaco hidráulico”.

5.4.2 Força de Protensão P_a

A força P_a ocorre **somente na pré-tensão** e corresponde à força na armadura de protensão no instante imediatamente anterior à liberação das ancoragens.¹⁴³ É chamada **força ancorada**, aquela imediatamente anterior à transferência da protensão para a peça.

É determinada com a força P_i subtraída das perdas de protensão decorrentes do escorregamento dos fios nas ancoragens das extremidades da pista, da relaxação inicial do aço e da retração inicial do concreto.

$$P_a = P_i - (\Delta P_{anc} + \Delta P_{r1} + \Delta P_{cs1}) \quad \text{Eq. 5.3}$$

5.4.3 Força de Protensão P_o

A força $P_o(x)$ é a “força na armadura de protensão no tempo $t = 0$, na seção de abcissa x .” É o valor inicial da força de protensão transferida ao concreto. A norma define x como a “abscissa contada a partir da seção do cabo, na qual se admite que a protensão tenha sido aplicada ao concreto.” (ancoragem ativa na pós-tensão).

Na **pré-tensão** é a **força ancorada** (P_a - Eq. 5.3) diminuída da perda de protensão por encurtamento elástico imediato do concreto:

$$P_o = P_a - \Delta P_{enc} \quad \text{Eq. 5.4}$$

Na **pós-tensão** é a força inicial no cilindro hidráulico (P_i) diminuída das perdas de protensão devidas ao atrito dos cabos nas bainhas, do escorregamento da armadura na ancoragem, do encurtamento elástico imediato do concreto devido o estiramento dos cabos restantes, da relaxação inicial da armadura, e da retração e fluência iniciais do concreto.

$$P_o(x) = P_i - (\Delta P_{atr} + \Delta P_{anc} + \Delta P_{enc} + \Delta P_{r1} + \Delta P_{cs1} + \Delta P_{cc1}) \quad \text{Eq. 5.5}$$

Corresponde à força de protensão no instante imediatamente posterior à transferência da protensão ao concreto, e antes do início das perdas progressivas (decorrentes do tempo).

5.4.4 Força de Protensão P_t

A força $P_t(x)$ é a “força na armadura de protensão, no tempo t , na seção de abcissa x .” É variável no tempo t em função das perdas progressivas posteriores ($\Delta P_{t(x)}$: perda por relaxação da armadura + perda por retração e fluência do concreto), e corresponde a valores menores que P_o . Tende à $P_\infty(x)$, que é a força de protensão final, aquela após ocorridas todas as perdas.¹⁴⁴

$$P_t(x) = P_o(x) - \Delta P_t(x) \quad \text{Eq. 5.6}$$

5.4.5 Valores Característicos e de Cálculo da Força de Protensão

Nos itens 9.6.1.3 e 9.6.1.4 a NBR 6118 apresenta: “Os valores médios, calculados de acordo com 9.6.1.1, podem ser empregados no cálculo dos valores característicos dos efeitos hiperestáticos da protensão. Para as obras em geral, admite-se que os valores característicos $P_{k,t}(x)$ da força de protensão possam ser considerados iguais ao valor médio, exceto quando a perda máxima $[\Delta P_o(x) + \Delta P_t(x)]_{máx}$ for maior que $0,35 P_i$. Neste caso e nas obras especiais que devem ser projetadas de acordo com normas específicas, que considerem os valores característicos superior e inferior da força de protensão, devem ser adotados os valores:

¹⁴³ A força de protensão P_a não é definida pela NBR 6118.

¹⁴⁴ A NBR 6118 (item 9.6.1.1) apresenta uma expressão para cálculo de P_t : $P_t(x) = P_o(x) - \Delta P_t(x) = P_i - \Delta P_o(x) - \Delta P_t(x)$, onde “ $\Delta P_t(x)$ - perda de protensão na seção da abcissa x , no tempo t , calculada após o tempo $t = 0$.”

$$[P_{k,t}(x)]_{\text{sup}} = 1,05 P_t(x)$$

Eq. 5.7

$$[P_{k,t}(x)]_{\text{inf}} = 0,95 P_t(x)$$

Os valores de cálculo da força de protensão no tempo t são dados pela expressão:

$$P_{d,t}(x) = \gamma_p P_t(x)$$

Eq. 5.8

sendo o valor de γ_p estabelecido na Seção 11.”

São apresentadas a seguir algumas metodologias aplicadas no cálculo das diversas perdas de protensão.

5.5 Perdas de Protensão Iniciais

A NBR 6118 (item 9.6.3.2) define as **perdas iniciais** da força de protensão como: “Consideram-se iniciais as perdas ocorridas na **pré-tração** antes da liberação do dispositivo de tração e decorrentes de:

- atrito** nos pontos de desvio da armadura poligonal, cuja avaliação deve ser feita experimentalmente, em função do tipo de aparelho de desvio empregado;
- escorregamento dos fios na ancoragem**, cuja determinação deve ser experimental, ou devem ser adotados os valores indicados pelo fabricante dos dispositivos de ancoragem;
- relaxação inicial da armadura**, função do tempo decorrido entre o alongamento da armadura e a liberação do dispositivo de tração;
- retração inicial do concreto**, considerado o tempo decorrido entre a concretagem do elemento estrutural e a liberação do dispositivo de tração.

A avaliação das perdas iniciais deve considerar os efeitos provocados pela temperatura, quando o concreto for curado termicamente.”

5.5.1 Perda por Escorregamento da Armadura na Ancoragem na Pré-Tensão

Na **pré-tensão** em pista de protensão, geralmente a armadura (cordoalha ou fio) é fixada em uma extremidade (cabeceira da pista) e estirada pelo cilindro hidráulico na outra extremidade. Quando a força ou tensão de estiramento é alcançada, a armadura é solta pelo cilindro e então movimenta-se elasticamente em sentido contrário ao alongamento, e ocorre, portanto, um pequeno escorregamento relativo à cunha, que com o atrito é forçada a penetrar mais profundamente no furo cônico do dispositivo porta-cunha, até que se fixa e consequentemente trava a armadura. Desse modo, a armadura tem o comprimento decrescido em um valor igual ao do escorregamento, ou seja, ocorre diminuição da deformação de alongamento, e portanto da força de protensão. Na ancoragem passiva também podem ocorrer pequenos escorregamentos, mas não causam perda de protensão, pois são compensados na operação de estiramento, até que se estabilizam.

O escorregamento é da ordem de 4 a 10 mm,^[2] e depende dos dispositivos de ancoragem, do tipo de armadura de protensão (fio, cordoalha ou conjunto de cordoalhas) e das características do equipamento de tracionamento da armadura (cilindro hidráulico – existem equipamentos que minimizam ou até praticamente anulam o escorregamento, com pistão de cravação da cunha no furo do porta-cunha). Geralmente o valor do escorregamento é fornecido pelo fabricante do equipamento e dos dispositivos de ancoragem, e também os engenheiros fazem medições do escorregamento nas fábricas de peças pré-moldadas.



Figura 5.7 – Detalhe da fixação das cordoalhas na viga metálica da ancoragem ativa em pista de protensão.
(Fonte: Marka Soluções Pré-fabricadas, Fotografia do Autor)

O valor dessa perda de protensão é muito dependente do comprimento da armadura, isto é, da pista de protensão: quanto maior o comprimento da pista, menor é a perda.

Exemplo: comprimento da pista = 160 m = 160.000 mm
 deformação do aço = 0,7 % = 0,007;
 alongamento do aço = 160.000 . 0,007 = 1.120 mm = 112 cm;
 escorregamento = 10 mm;

$$\Delta P_{\text{anc}} = \frac{10}{1120} 100 = 0,89 \%$$

que pode ser considerada uma perda pequena, porque a pista tem grande comprimento. Para uma pista de 60 m, a perda de protensão altera-se para 2,4 %, configurando uma perda que não é pequena. Neste caso pode-se diminuir ou eliminar a perda com a aplicação pelo cilindro de uma tensão de estiramento um pouco maior, de modo a provocar um alongamento adicional para compensar o escorregamento.

No caso de protensão com **pós-tensão** também ocorre perda de protensão por escorregamento, mas é diferente da pista de protensão porque a armadura encontra-se embutida em bainha metálica,¹⁴⁵ que causa um atrito contrário ao movimento de escorregamento, como será visto no item 5.6.4.

5.5.2 Perda por Relaxação da Armadura

Relaxação é a perda de tensão com o tempo em um aço estirado e mantido com comprimento e temperatura constantes. Depende do material, que deforma-se com a tensão aplicada, e causa perda de força de protensão, pequena e desprezível para tensões no aço de até $0,5f_{\text{ptk}}$, mas que aumenta rapidamente com tensões e temperaturas maiores. Portanto, a relaxação ocorre a partir do instante que o aço é estirado, e a perda de força de protensão que causa não é pequena, em função de quanto a tensão de estiramento é maior que $0,5f_{\text{ptk}}$.

A **relaxação** depende também da resistência do aço, e da classe conforme a fabricação: aço de relaxação normal (RN) e aço de relaxação baixa (RB), sendo que o aço RB apresenta apenas 25 % da relaxação do aço de relaxação normal (RN).

A Figura 5.8 mostra a variação de perda por relaxação com o tempo, para três níveis de tensão inicial na armadura, e a Figura 5.9 mostra o efeito da temperatura, em aço de relaxação baixa (RB). Nota-se que a relaxação é maior no início, continua a aumentar com o tempo mas em uma taxa menor de crescimento, e é maior com o aumento da temperatura.

¹⁴⁵ Há também o caso de pós-tensão com cordoalha engraxada, onde o atrito contrário é bastante diminuído pela graxa.

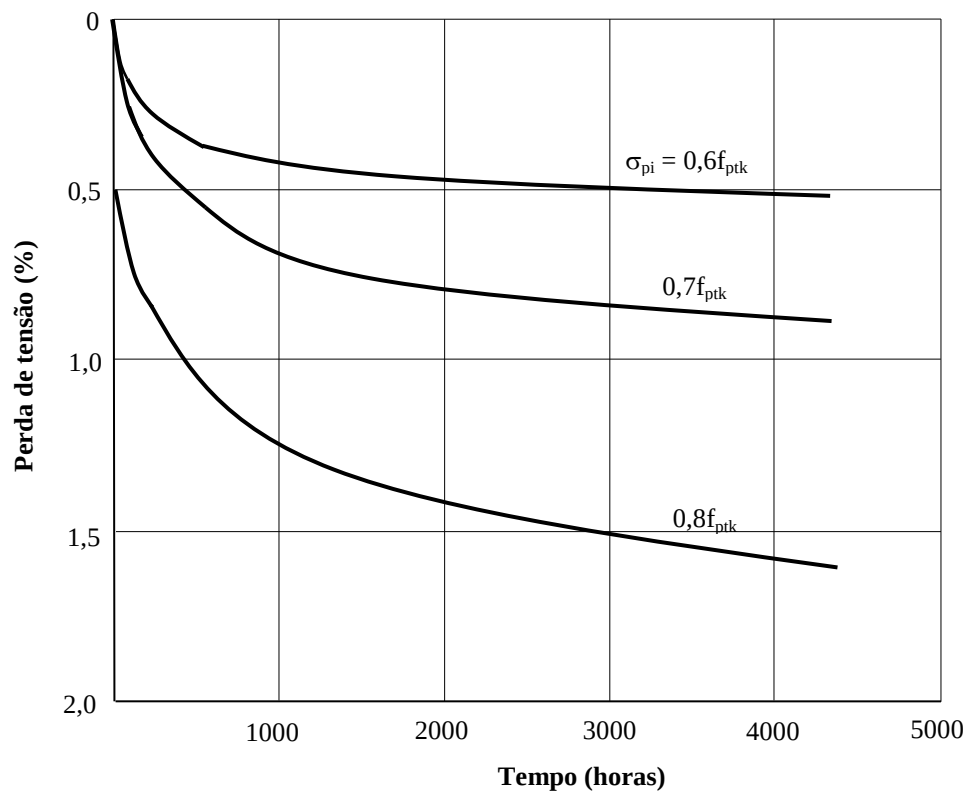


Figura 5.8 – Perda de tensão típica por relaxação de aços com relaxação baixa (RB), (fio RB, $\phi = 7 \text{ mm}$, $20 \text{ }^{\circ}\text{C}$).^[2]

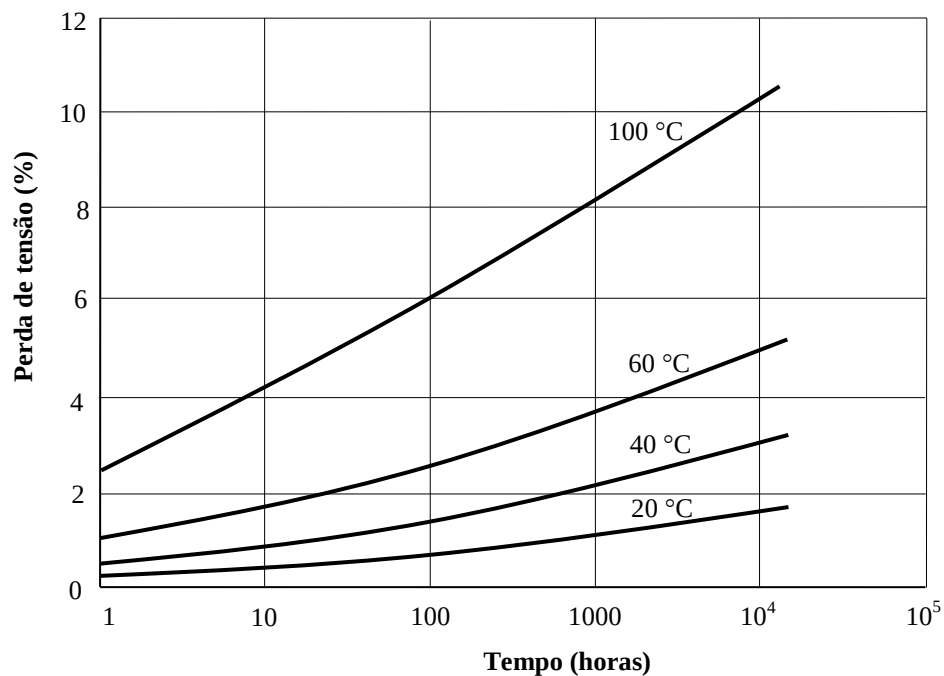


Figura 5.9 – Efeito típico da temperatura sobre a relaxação de aços com relaxação baixa (RB), (fio RB, $\phi = 7 \text{ mm}$, $\sigma_{pi} = 0,7f_{ptk}$).^[2]

As normas NBR 7482 e 7483 (ver também a NBR 7484)¹⁴⁶ estabelecem valores médios determinados experimentalmente para o **coeficiente de relaxação** de fios e cordoalhas (ψ_{1000}), bem

¹⁴⁶ ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *Fios de aço para estruturas de concreto protendido* – Especificação, NBR 7482. Rio de Janeiro, ABNT, 2008, 8p.

como a NBR 6118 (8.4.8): “A relaxação de fios e cordoalhas, após 1000 horas a 20 °C (ψ_{1000}) e para tensões variando de $0,5f_{ptk}$ a $0,8f_{ptk}$, obtida nos ensaios descritos na ABNT NBR 7484, não pode ultrapassar os valores dados nas ABNT NBR 7482 e ABNT NBR 7483, respectivamente. Para efeito de projeto, os valores de ψ_{1000} da Tabela 8.3 podem ser adotados.”, aqui mostrados na Tabela 5.2.¹⁴⁷ Para tensões inferiores a $0,5f_{ptk}$ admite-se que não haja perda de tensão por relaxação.

Tabela 5.2 - Valores de ψ_{1000} (%). (Tabela 8.3 da NBR 6118, item 8.4.8)

σ_{po}	Cordoalhas		Fios		Barras
	RN	RB	RN	RB	
$0,5f_{ptk}$	0	0	0	0	0
$0,6f_{ptk}$	3,5	1,3	2,5	1,0	1,5
$0,7f_{ptk}$	7,0	2,5	5,0	2,0	4,0
$0,8f_{ptk}$	12,0	3,5	8,5	3,0	7,0
“Onde RN é a relaxação normal; RB é a relaxação baixa.”					

Obs.: “Para tensões intermediárias entre os valores fixados na Tabela 8.3, pode ser feita interpolação linear.”

Conforme a NBR 6118 (9.6.3.4.5), “A intensidade da relaxação do aço deve ser determinada pelo coeficiente $\psi(t, t_o)$, calculado por:”

$$\psi(t; t_o) = \frac{\Delta\sigma_{pr}(t; t_o)}{\sigma_{pi}} \quad \text{Eq. 5.9}$$

$\Delta\sigma_{pr}(t; t_o)$ = perda de tensão por relaxação pura desde o instante t_o do estiramento da armadura até o instante t considerado;

σ_{pi} = tensão na armadura ativa imediatamente após a aplicação da protensão (estiramento da armadura).

E a **perda de tensão por relaxação** é:

$$\Delta\sigma_{pr}(t; t_o) = \psi(t; t_o) \sigma_{pi} \quad \text{Eq. 5.10}$$

“Os valores correspondentes a tempos diferentes de 1 000 h, sempre a 20 °C, podem ser determinados a partir da seguinte expressão, devendo o tempo ser expresso em dias:”

$$\psi(t; t_o) = \psi_{1000} \left(\frac{t - t_o}{41,67} \right)^{0,15} \quad (t \text{ em dias}) \quad \text{Eq. 5.11}$$

E para o tempo expresso em horas:

$$\psi(t; t_o) = \psi_{1000} \left(\frac{t - t_o}{1000} \right)^{0,15} \quad (t \text{ em horas}) \quad \text{Eq. 5.12}$$

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. Cordoalhas de aço para estruturas de concreto protendido – Especificação, NBR 7483. Rio de Janeiro, ABNT, 2008, 7p.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. Barras, cordoalhas e fios de aço destinados a armaduras de protensão – Método de ensaio de relaxação isotérmica, NBR 7484. Rio de Janeiro, ABNT, 2009, 5p.

¹⁴⁷ No item 9.6.3.4.5 a NBR 6118 apresenta: “Os valores médios da relaxação, medidos após 1 000 h, à temperatura constante de 20 °C, para as perdas de tensão referidas a valores básicos da tensão inicial de 50 % a 80 % da resistência característica f_{ptk} (ψ_{1000}), são definidos na Tabela 8.3.”

“Pode-se considerar que para o **tempo infinito**¹⁴⁸ o valor de $\psi(t;t_o)$ é dado por:”

$$\psi(t_o;t_o) \cong 2,5 \psi_{1000} \quad \text{Eq. 5.13}$$

Exemplo: considere-se um período de tempo de 25 horas entre o estiramento e a aplicação da protensão no concreto; fio relaxação normal (RN) e $\sigma_{pi} = 0,8f_{ptk}$.

Da Tabela 5.2: $\psi_{1000} = 8,5 \%$, e aplicando a Eq. 5.12, para 25 horas tem-se:

$$\psi(t;t_o) = 8,5 \left(\frac{25-0}{1000} \right)^{0,15} = 4,9 \%$$

Perda por relaxação (Eq. 5.10):

$$\Delta\sigma_{pr}(t;t_o) = \psi(t;t_o) \sigma_{pi} = \frac{4,9}{100} (0,8f_{ptk}) = 0,039f_{ptk}$$

A perda de tensão neste caso, de 3,9 %, não é desprezível, e se utilizada cura a vapor, com elevação da temperatura na armadura de protensão, a perda é ainda maior.

Na verdade existe uma interação entre a relaxação na armadura e as deformações de encurtamento do concreto por retração e fluência, pois essas deformações causam uma diminuição da tensão na armadura, e assim a perda de tensão por relaxação é menor que aquela por relaxação pura.

Variações comuns na temperatura ambiente modificam muito pouco as propriedades mecânicas dos aços de protensão. Mudança na temperatura de 20 para 40°C aumenta em 50 % a relaxação em 1.000 horas, mas considerando um longo período de tempo a perda por relaxação é aproximadamente igual. A única diferença é que em maior temperatura a perda por relaxação será alcançada em um tempo menor.^[2]

O Eurocode 2^[19] (item 3.3.2) apresenta equações para o cálculo da perda devida à relaxação, e no caso de **fios ou cordoalhas de baixa relaxação** (Classe 2), a expressão é:

$$\frac{\Delta\sigma_{pr}}{\sigma_{pi}} = 0,66\psi_{1000} e^{9,1\mu} \left(\frac{t}{1000} \right)^{0,75(1-\mu)} \cdot 10^{-5} \quad \text{Eq. 5.14}$$

$\Delta\sigma_{pr}$ = valor absoluto das perdas de protensão devidas à relaxação;

σ_{pi} = para a **pós-tensão**, é o valor absoluto da tensão inicial de protensão $\sigma_{pi} = \sigma_{po}$; para **pré-tensão**, é a tensão de tração máxima aplicada nos cabos deduzidas as perdas instantâneas que ocorrem durante as operações de protensão, portanto, $\sigma_{pi} = \sigma_{pa}$;

t = tempo depois da aplicação da protensão (em horas);

$\mu = \sigma_{pi} / f_{ptk}$, em que f_{ptk} é o valor característico da resistência à tração do aço de protensão;

ψ_{1000} = valor da perda devida à relaxação (%), às 1.000 horas depois da aplicação da protensão e a uma temperatura média de 20 °C.

“Os valores a longo prazo (finais) das perdas devidas à relaxação podem ser estimados para um tempo t igual a 500.000 horas (ou seja, cerca de 57 anos). As perdas devidas à relaxação são muito sensíveis à temperatura do aço. Nos casos em que se aplica um tratamento térmico ao concreto (por exemplo, cura por meio de vapor), aplica-se o disposto em 10.3.2.2. Nos outros casos, quando a temperatura é superior a 50 °C, as perdas devidas à relaxação devem ser verificadas.” Eurocode 2^[19] (item 3.3.2)

O Eurocode 2^[19] (item 10.3.2) apresenta uma equação para levar em consideração o aumento da temperatura da armadura no aumento da relaxação, como no caso de cura térmica do concreto. Neste caso, um **tempo equivalente** (t_{eq}) em horas pode ser considerado e somado ao tempo t ocorrido após o estiramento, e considerado na Eq. 5.14:

¹⁴⁸ Como tempo infinito costuma-se considerar o tempo de vida útil da peça, para efeito de projeto.

$$t_{eq} = \frac{1,14^{(T_{m\acute{a}x} - 20)}}{T_{m\acute{a}x} - 20} \sum_{i=1}^n (T_{(\Delta t_i)} - 20) \Delta t_i \quad \text{Eq. 5.15}$$

$T_{(\Delta t_i)}$ = temperatura em °C durante o intervalo de tempo Δt_i ;

$T_{m\acute{a}x}$ = temperatura máxima em °C durante o período de tratamento térmico.

O gráfico da Figura 5.10 mostra a perda de protensão por relaxação de cordoalha, devida ao aumento da temperatura durante apenas algumas horas do período de cura térmica do concreto, onde verifica-se que a elevação da temperatura afeta a perda apenas no período de cura, e não afeta a perda após o término da cura.

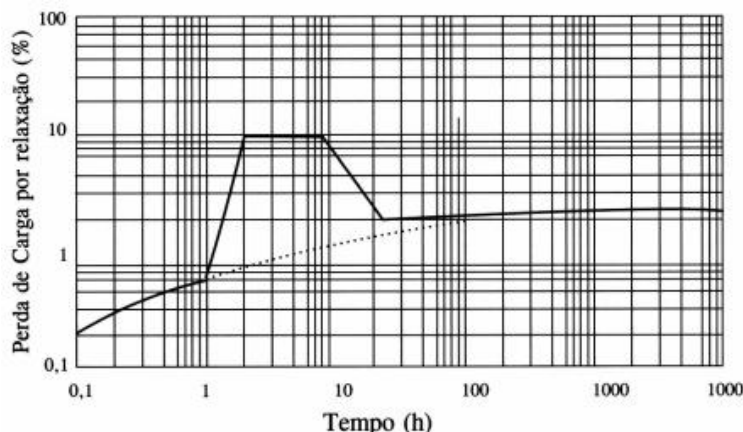


Figura 5.10 – Perda de carga por relaxação de cordoalha aquecida em cura térmica.^[25]

5.5.3 Perda por Retração e por Fluência do Concreto

O cálculo da perda de força de protensão devida à **retração e fluência do concreto** pode ser feito com um procedimento simples (aproximado – NBR 6118, item 8.2.11), ou com um procedimento de maior precisão (NBR 6118, Anexo A.2.3).

5.5.3.1 Cálculo Aproximado

Retração

A perda de tensão na armadura devida à **retração** do concreto pode ser aproximada por:

$$\Delta\sigma_{pcs} = \varepsilon_{cs} \cdot E_p \quad \text{Eq. 5.16}$$

ε_{cs} = deformação específica de retração do concreto ao nível do CG da armadura, no tempo considerado (ver Tabela 5.3);

E_p = módulo de elasticidade do aço de protensão.

Fluência

A deformação no concreto por fluência, ao nível da armadura de protensão, depende da tensão de compressão atuante no concreto naquele nível. Semelhantemente à perda por retração, a perda de tensão por **fluência** no concreto é:

$$\Delta\sigma_{pcc} = \varepsilon_{cc} \cdot E_p \quad \text{Eq. 5.17}$$

$\varepsilon_{cc}(t_{\infty}, t_0)$ = deformação específica por fluência do concreto ao nível do CG da armadura, no tempo considerado, determinada com a equação:

$$\varepsilon_{cc}(t_{\infty}; t_0) = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_{ci,28}} \varphi(t_{\infty}; t_0) \quad \text{Eq. 5.18}$$

No item 8.2.11 a NBR 6118 trata do cálculo da retração e da fluência e assim apresenta: “Em casos onde **não** é necessária grande precisão, os valores finais do coeficiente de fluência $\varphi(t_{\infty}, t_0)$ e da deformação específica de retração $\varepsilon_{cs}(t_{\infty}, t_0)$ do concreto, submetidos a tensões menores que $0,5f_c$ quando do primeiro carregamento, podem ser obtidos, por interpolação linear, a partir da Tabela 8.1. A Tabela 8.1 fornece o valor do coeficiente de fluência $\varphi(t_{\infty}, t_0)$ e da deformação específica de retração $\varepsilon_{cs}(t_{\infty}, t_0)$ em função da umidade média ambiente e da espessura fictícia $2A_c/u$, onde A_c é a área da seção transversal e u é o perímetro da seção em contato com a atmosfera. Os valores desta Tabela são relativos a temperaturas do concreto entre 10 °C e 20 °C, podendo-se, entretanto, admiti-los como válidos para temperaturas entre 0 °C e 40 °C. Esses valores são válidos para concretos plásticos e de cimento Portland comum. Deformações específicas devidas à fluência e à retração mais precisas podem ser calculadas segundo indicação do Anexo A.”

Portanto, em casos onde **não** é necessária grande precisão e as tensões são menores que $0,5f_c$ relativamente ao primeiro carregamento, o valor final da deformação específica de retração do concreto $\varepsilon_{cs}(t_{\infty}, t_0)$ e o coeficiente de fluência $\varphi(t_{\infty}, t_0)$, podem ser obtidos na Tabela 5.3, do tempo t_0 (dias) até o tempo final (t_{∞}).

Tabela 5.3 - Valores característicos superiores da deformação específica de retração $\varepsilon_{cs}(t_{\infty}, t_0)$ e do coeficiente de fluência $\varphi(t_{\infty}, t_0)$. (Tabela 8.1 da NBR 6118)

Umidade média ambiente (%)		40		55		75		90		
Espessura fictícia 2A _c /u (cm)		20	60	20	60	20	60	20	60	
φ(t _∞ ,t ₀) Concreto das classes C20 a C45	t ₀ (dias)	5	4,6	3,8	3,9	3,3	2,8	2,4	2,0	1,9
		30	3,4	3,0	2,9	2,6	2,2	2,0	1,6	1,5
		60	2,9	2,7	2,5	2,3	1,9	1,8	1,4	1,4
φ(t _∞ ,t ₀) Concreto das classes C50 a C90		5	2,7	2,4	2,4	2,1	1,9	1,8	1,6	1,5
		30	2,0	1,8	1,7	1,6	1,4	1,3	1,1	1,1
		60	1,7	1,6	1,5	1,4	1,2	1,2	1,0	1,0
ε _{cs} (t _∞ ,t ₀) (%)		5	- 0,53	- 0,47	- 0,48	- 0,43	- 0,36	- 0,32	- 0,18	- 0,15
		30	- 0,44	- 0,45	- 0,41	- 0,41	- 0,33	- 0,31	- 0,17	- 0,15
		60	- 0,39	- 0,43	- 0,36	- 0,40	- 0,30	- 0,31	- 0,17	- 0,15

5.5.3.2 Cálculo Conforme o Anexo A da NBR 6118

Quando é exigida maior precisão no cálculo da **retração** e da **fluência** do concreto, pode-se aplicar a formulação contida no Anexo A, de caráter informativo. O Anexo A da norma trata do “**Efeito do tempo no concreto estrutural**”, e informa que “As prescrições deste Anexo têm caráter informativo que podem, na falta de dados melhores, ser usadas no projeto de estruturas com concretos do grupo I e do grupo II da ABNT NBR 8953 cobertos por esta Norma. Outros valores podem ser usados, desde que comprovados experimentalmente, por meio de ensaios realizados de acordo com Normas Brasileiras específicas, levando em conta variações nas características e propriedades dos componentes do concreto, ou ainda desde que respaldados por Normas Internacionais ou literatura técnica.”

Deformações do Concreto

Conforme a NBR 6118 (item A.2), “Quando **não** há impedimento à livre deformação do concreto, e a ele é aplicada, no tempo t_0 , uma tensão constante no intervalo $t - t_0$, sua deformação total, no tempo t , vale:

$$\varepsilon_c(t) = \varepsilon_c(t_0) + \varepsilon_{cc}(t) + \varepsilon_{cs}(t) \quad \text{Eq. 5.19}$$

“onde

$\varepsilon_c(t_0) = \sigma_c(t_0) / E_{ci}(t_0)$ é a **deformação imediata**, por ocasião do carregamento, com $E_{ci}(t_0)$ calculado pela expressão constante em 8.2.8;

$\varepsilon_{cc}(t) = [\sigma_c(t_0) / E_{ci28}] \varphi(t, t_0)$ é a **deformação por fluência**, no intervalo de tempo (t, t_0) , com E_{ci28} calculado pela mesma expressão para $j = 28$ dias;

$\varepsilon_{cs}(t)$ é a **deformação por retração**, no intervalo de tempo (t, t_0) .”

Fluência do Concreto

O item A.2.2 da NBR 6118 preconiza: “A deformação por fluência do concreto (ε_{cc}) é composta de duas partes, uma rápida e outra lenta. A deformação rápida (ε_{cca}) é irreversível e ocorre durante as primeiras 24 h após a aplicação da carga que a originou. A deformação lenta é, por sua vez, composta por duas outras parcelas: a deformação lenta irreversível (ε_{ccf}) e a deformação lenta reversível (ε_{ccd}).”

$$\varepsilon_{cc} = \varepsilon_{cca} + \varepsilon_{ccf} + \varepsilon_{ccd} \quad \text{Eq. 5.20}$$

ε_{cca} = deformação rápida irreversível, primeiras 24 horas;

ε_{ccf} = deformação lenta irreversível (umidade, consistência, espessura, idade);

ε_{ccd} = deformação lenta reversível, depende apenas da duração do carregamento.

$$\varepsilon_{c,tot} = \varepsilon_c + \varepsilon_{cc} = \varepsilon_c (1 + \varphi) \quad \text{Eq. 5.21}$$

$$\varphi = \varphi_a + \varphi_f + \varphi_d \quad \text{Eq. 5.22}$$

$\varepsilon_{c,tot}$ = deformação total do concreto;

φ = coeficiente de fluência;

φ_a = coeficiente de deformação rápida;

φ_f = coeficiente de deformação lenta irreversível;

φ_d = coeficiente de deformação lenta reversível.

Conforme a NBR 6118 (item A.2.2.2), “Para o cálculo dos efeitos da fluência, quando as tensões no concreto são as de serviço, admitem-se as seguintes hipóteses:

- a) a deformação por fluência ε_{cc} varia linearmente com a tensão aplicada;
- b) para acréscimos de tensão aplicados em instantes distintos, os respectivos efeitos de fluência se superpõem;
- c) a deformação rápida produz deformações constantes ao longo do tempo; os valores do coeficiente φ_a são função da relação entre a resistência do concreto no momento da aplicação da carga e a sua resistência final;
- d) o coeficiente de deformação lenta reversível φ_d depende apenas da duração do carregamento; o seu valor final e o seu desenvolvimento ao longo do tempo são independentes da idade do concreto no momento da aplicação da carga;
- e) o coeficiente de deformação lenta irreversível φ_f depende de:
 - umidade relativa do ambiente (U);
 - consistência do concreto no lançamento;
 - espessura fictícia da peça h_{fic} (ver A.2.4);
 - idade fictícia do concreto (ver A.2.4) no instante (t_0) da aplicação da carga;
 - idade fictícia do concreto no instante considerado (t);
- f) para o mesmo concreto, as curvas de deformação lenta irreversível em função do tempo, correspondentes às diferentes idades do concreto no momento do carregamento, são obtidas, umas

em relação às outras, por deslocamento paralelo ao eixo das deformações, conforme a Figura A.1.” (ver Figura 5.11).

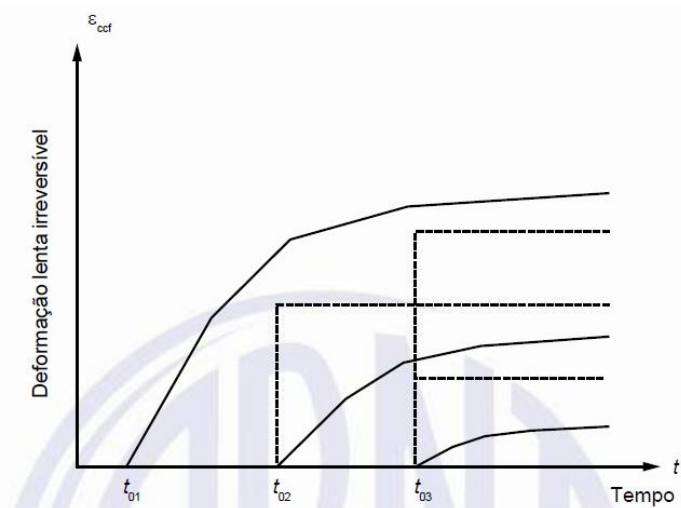


Figura 5.11 – Variação de $\varepsilon_{ccf}(t)$. (Figura A.1 da NBR 6118)

Conforme o item A.2.2.3, o **valor da fluência** é calculado como segue. No instante t a deformação devida à fluência é dada por:

$$\varepsilon_{cc}(t; t_0) = \varepsilon_{cca} + \varepsilon_{ccd} + \varepsilon_{ccf} = \frac{\sigma_c}{E_{c,28}} \varphi(t; t_0) \quad \text{Eq. 5.23}$$

com o módulo de elasticidade tangente inicial para $j = 28$ dias ($E_{c,28}$), obtido em ensaio segundo a NBR 8522 ou calculado pela Eq. 2.7: $E_{c,28} = E_{ci,28} = \alpha_E 5600 \sqrt{f_{ck}}$.

O **coeficiente de fluência** $\varphi(t; t_0)$, válido também para a tração, é:

$$\varphi(t; t_0) = \varphi_a + \varphi_{f\infty} [\beta_f(t) - \beta_f(t_0)] + \varphi_{d\infty} \beta_d \quad \text{Eq. 5.24}$$

t = idade fictícia do concreto no instante considerado, em dias;

t_0 = idade fictícia do concreto ao ser feito o carregamento único, em dias;

φ_a = coeficiente de fluência rápida:

$$\varphi_a = 0,8 \left[1 - \frac{f_c(t_0)}{f_c(t_\infty)} \right] \quad , \text{ para concretos de classes C20 a C45; } \quad \text{Eq. 5.25}$$

$$\varphi_a = 1,4 \left[1 - \frac{f_c(t_0)}{f_c(t_\infty)} \right] \quad , \text{ para concretos de classes C50 a C90. } \quad \text{Eq. 5.26}$$

$\frac{f_c(t_0)}{f_c(t_\infty)}$ = função do crescimento da resistência do concreto com a idade (NBR 6118, item 12.3);

β_1 depende da relação entre f_{ckj}/f_{ck} , e conforme o item 12.3.3.b da NBR 6118:

$$\beta_1 = \exp \left\{ s \left[1 - \left(\frac{28}{t} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \right\} \quad \text{Eq. 5.27}$$

com s dependente do tipo de cimento:

s = 0,38 para concreto com cimento CP III e IV;
s = 0,25 para concreto com cimento CP I e II;
s = 0,20 para concreto com cimento CP V ARI;
t = idade fictícia do concreto, em dias.

Faz-se:

$$\frac{f_c(t_o)}{f_c(t_\infty)} = \frac{\beta_1(t_o = t)}{\beta_1(t_\infty)} \quad \text{Eq. 5.28}$$

t_∞ = tempo da vida útil;

$\varphi_{f\infty}$ = valor final do coeficiente de deformação lenta irreversível, calculado como:

$$\varphi_{f\infty} = \varphi_{1c} \cdot \varphi_{2c} \quad \text{- para concretos de classes C20 a C45} \quad \text{Eq. 5.29}$$

$$\varphi_{f\infty} = 0,45 \varphi_{1c} \cdot \varphi_{2c} \quad \text{- para concretos de classes C50 a C90} \quad \text{Eq. 5.30}$$

φ_{1c} = coeficiente dependente da umidade relativa do ambiente U (%), e da consistência do concreto. Está apresentado na nota a) da Tabela 5.4 e para abatimento no intervalo de 5 a 9 cm e $U \leq 90$ %, tem a seguinte equação:

$$\varphi_{1c} = 4,45 - 0,035U \quad \text{Eq. 5.31}$$

φ_{2c} = coeficiente dependente da espessura fictícia ponderada (h) calculada em função da espessura fictícia da peça (h_{fic}):

$$\varphi_{2c} = \frac{42 + h}{20 + h}, \quad h \text{ em cm} \quad \text{Eq. 5.32}$$

A espessura fictícia, conforme o item A.2.4.2 da NBR 6118, é:

$$h_{fic} = \frac{2A_c}{u_{ar}} \quad \text{Eq. 5.33}$$

A_c = área da seção transversal da peça;

u_{ar} = parte do perímetro externo da seção transversal da peça em contato com o ar.

A espessura fictícia ponderada (h) é:

$$h = \gamma h_{fic} = \gamma \frac{2A_c}{u_{ar}} \quad \text{Eq. 5.34}$$

γ é o coeficiente dependente da umidade relativa do ambiente (U %), (ver nota d) da Tabela 5.4 ou Tabela A.1 da NBR 6118), sendo:

$$\gamma = 1 + \exp(-7,8 + 0,1U) \quad \text{Eq. 5.35}$$

Tabela 5.4 - Valores numéricos usuais para a determinação da fluência e da retração.
(Tabela A.1 da NBR 6118)

Ambiente	Umidade U (%)	Fluência $\phi_{1c}^{a),c)}$			Retração $10^4 \varepsilon_{1s}^{b), c)}$			$\gamma^{d)}$
		Abatimento de acordo com a ABNT NBR 16889 (cm)						
		0 – 4	5 – 9	10 – 15	0 – 4	5 – 9	10 – 15	
Na água	–	0,6	0,8	1,0	+ 1,0	+1,0	+ 1,0	30,0
Em ambiente muito úmido imediatamente acima da água	90	1,0	1,3	1,6	– 1,9	– 2,5	– 3,1	5,0
Ao ar livre, em geral	70	1,5	2,0	2,5	– 3,8	– 5,0	– 6,2	1,5
Em ambiente seco	40	2,3	3,0	3,8	– 4,7	– 6,3	– 7,9	1,0

a) $\phi_{1c} = 4,45 - 0,035U$ para abatimento no intervalo de 5 cm a 9 cm e $U \leq 90 \%$.

b) $10^4 \varepsilon_{1s} = - 8,09 + (U/15) - (U^2/2.284) - (U^3/133.765) + (U^4/7.608.150)$ para abatimentos de 5 cm a 9 cm e $40 \% \leq U \leq 90 \%$.

c) Os valores de ϕ_{1c} e ε_{1s} para $U \leq 90 \%$ e abatimento entre 0 cm e 4 cm são 25 % menores e, para abatimentos entre 10 cm e 15 cm, são 25 % maiores.

d) $\gamma = 1 + \exp (- 7,8 + 0,1 U)$ para $U \leq 90 \%$.

NOTA 1: Para efeito de cálculo as mesmas expressões e os mesmos valores numéricos podem ser empregados, no caso de tração.

NOTA 2: Para o cálculo dos valores de fluência e retração, a consistência do concreto é aquela correspondente à obtida com o mesmo traço, sem a adição de superplastificantes e superfluidificantes.

$\beta_f(t)$ ou $\beta_f(t_0)$ = coeficiente relativo à deformação lenta irreversível, função da idade do concreto (ver Figura 5.12);

$\phi_{d\infty}$ = valor final do coeficiente de deformação lenta reversível, considerado igual a 0,4 (item A.2.2.3 da NBR 6118);

$\beta_d(t)$ = coeficiente relativo à deformação lenta reversível, função do tempo $(t - t_0)$, decorrido após o carregamento:

$$\beta_d(t) = \frac{t - t_0 + 20}{t - t_0 + 70} \quad \text{Eq. 5.36}$$

$$\beta_f(t) = \frac{t^2 + At + B}{t^2 + Ct + D} \quad \text{Eq. 5.37}$$

$$A = 42h^3 - 350h^2 + 588h + 113 \quad \text{Eq. 5.38}$$

$$B = 768h^3 - 3060h^2 + 3234h - 23 \quad \text{Eq. 5.39}$$

$$C = -200h^3 + 13h^2 + 1090h + 183 \quad \text{Eq. 5.40}$$

$$D = 7579h^3 - 31916h^2 + 35343h + 1931 \quad \text{Eq. 5.41}$$

“ h é a espessura fictícia ponderada igual a γh_{fic} , expressa em metros (m), definido na Tabela A.1. Para valores de h fora do intervalo $(0,05 \leq h \leq 1,6)$, adotam-se os extremos correspondentes; t é o tempo, expresso em dias $(t \geq 3)$.”

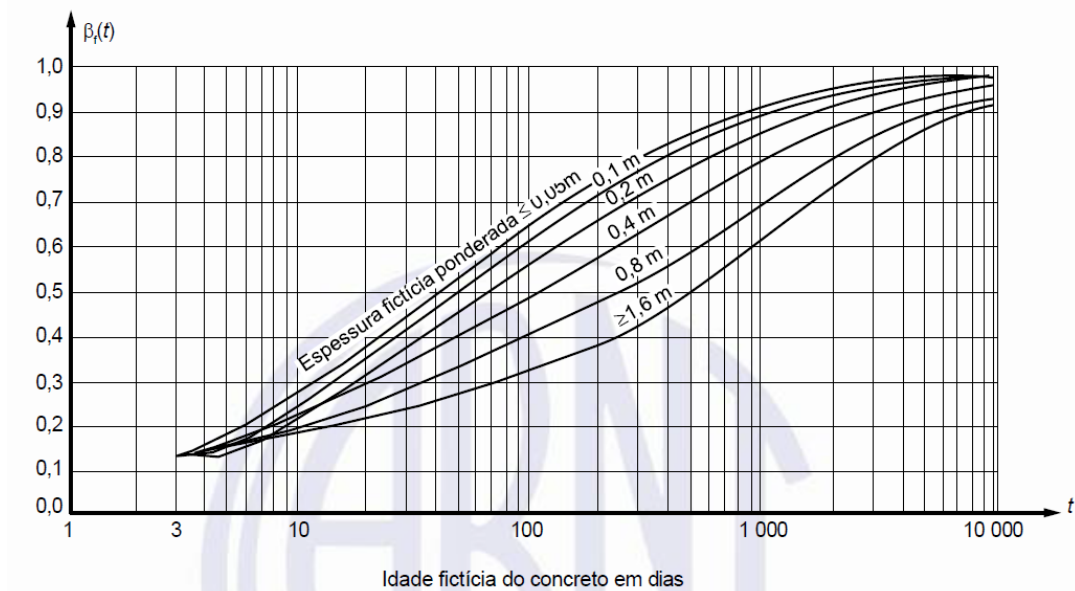


Figura 5.12 – Variação de $\beta_f(t)$. (Figura A.2 da NBR 6118)

Retração

“O valor da retração do concreto depende da: a) umidade relativa do ambiente; b) consistência do concreto no lançamento; c) espessura fictícia da peça.” (A.2.3 da NBR 6118)

Entre os instantes t_0 e t a retração é dada por:

$$\varepsilon_{cs}(t; t_0) = \varepsilon_{cs\infty} [\beta_s(t) - \beta_s(t_0)] \quad \text{Eq. 5.42}$$

$$\varepsilon_{cs\infty} = \varepsilon_{1s} \cdot \varepsilon_{2s} \quad \text{Eq. 5.43}$$

$\varepsilon_{cs\infty}$ = valor final da retração;

ε_{1s} = coeficiente dependente da umidade relativa do ambiente e da consistência do concreto (ver Tabela 5.4);

ε_{2s} = coeficiente dependente da espessura fictícia da peça:

$$\varepsilon_{2s} = \frac{33 + 2h}{20,8 + 3h} \quad \text{Eq. 5.44}$$

h = espessura fictícia ponderada γh_{fic} , em cm (ver Eq. 5.34), com γ definido na Tabela 5.4;

$\beta_s(t)$ ou $\beta_s(t_0)$ = coeficientes relativos à retração, nos instantes t ou t_0 , dados na Figura 5.13 (Figura A.3 da NBR 6118);

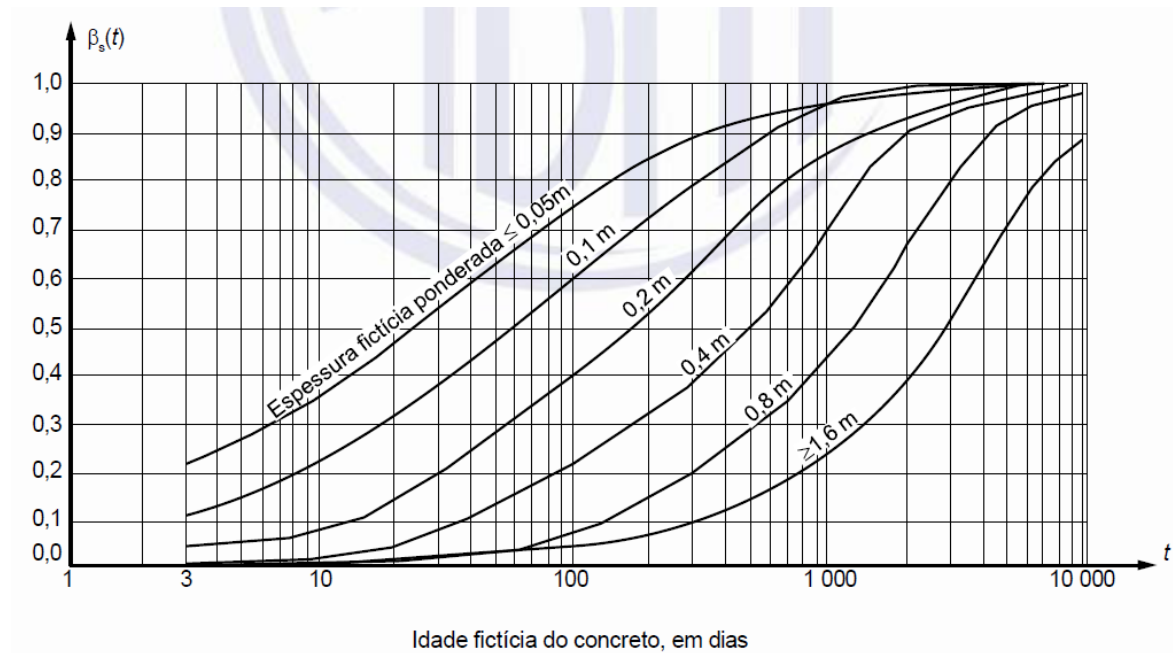


Figura 5.13 – Variação de $\beta_s(t)$. (Figura A.3 da NBR 6118)

$$\beta_s(t) = \frac{\left(\frac{t}{100}\right)^3 + A\left(\frac{t}{100}\right)^2 + B\left(\frac{t}{100}\right)}{\left(\frac{t}{100}\right)^3 + C\left(\frac{t}{100}\right)^2 + D\left(\frac{t}{100}\right) + E} \quad \text{Eq. 5.45}$$

com $A = 40$, e :

$$B = 116h^3 - 282h^2 + 220h - 4,8 \quad \text{Eq. 5.46}$$

$$C = 2,5h^3 - 8,8h + 40,7 \quad \text{Eq. 5.47}$$

$$D = -75h^3 + 585h^2 + 496h - 6,8 \quad \text{Eq. 5.48}$$

$$E = -169h^4 + 88h^3 + 584h^2 - 39h + 0,8 \quad \text{Eq. 5.49}$$

“ h é a espessura fictícia, expressa em metros (m); para valores de h fora do intervalo $(0,05 \leq h \leq 1,6)$, adotam-se os extremos correspondentes;

t é o tempo, expresso em dias ($t \geq 3$).”

t_0 = idade fictícia do concreto no instante em que o efeito da retração na peça começa a ser considerado, em dias;

t = idade fictícia do concreto no instante considerado, em dias, e conforme o item A.2.4.1 da NBR 6118): “A idade a considerar é a idade fictícia (αt_{ef}), em dias, quando o endurecimento é feito à temperatura ambiente de 20 °C e, nos demais casos, quando não houver cura a vapor, a idade a considerar é a idade fictícia dada por:

$$t = \alpha \sum_i \frac{T_i + 10}{30} \Delta t_{ef,i} \quad \text{Eq. 5.50}$$

“ t é a idade fictícia, expressa em dias;

α é o coeficiente dependente da velocidade de endurecimento do cimento; na falta de dados experimentais, permite-se o emprego dos valores constantes na Tabela A.2; (ver Tabela 5.5)

T_i é a temperatura média diária do ambiente, expressa em graus Celsius ($^{\circ}\text{C}$);

$\Delta t_{ef,i}$ é o período, expresso em dias, durante o qual a temperatura média diária do ambiente, T_i , pode ser admitida constante.

NOTA: Essa expressão não se aplica à cura a vapor.”

Tabela 5.5 - Valores da fluência e da retração em função da velocidade de endurecimento do cimento. (Tabela A.2 da NBR 6118)

Cimento Portland (CP)	α	
	Fluência	Retração
De endurecimento lento (CP III e CP IV, todas as classes de resistência)	1	1
De endurecimento normal (CP I e CP II, todas as classes de resistência)	2	
De endurecimento rápido (CP V-ARI)	3	

“Legenda:
CP I e CP I-S – Cimento Portland comum;
CP II-E, CP II-F e CP II-Z – Cimento Portland composto;
CP III – Cimento Portland de alto forno;
CP IV – Cimento Portland pozolânico;
CP V-ARI – Cimento Portland de alta resistência inicial;
RS – Cimento Portland resistente a sulfatos (propriedade específica de alguns dos tipos de cimento citados)”

Deformação Total do Concreto

“Quando há variação de tensão ao longo do intervalo, induzida por ações externas ou agentes de diferentes propriedades reológicas (incluindo-se armadura, concretos de diferentes idades etc.), a deformação total no concreto pode ser calculada por:

$$\varepsilon_c(t) = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_c(t_0)} + \frac{\sigma_c(t_0)}{E_{c28}} \varphi(t, t_0) + \varepsilon_{cs}(t, t_0) + \int_{t=t_0}^t \frac{\partial \sigma_c}{\partial t} \left(\frac{1}{E_{ct}} + \frac{\alpha \varphi(t, t_0)}{E_{c28}} \right) dt \quad \text{Eq. 5.51}$$

em que os três primeiros termos representam a deformação não impedida e a integral, e os efeitos da variação de tensões ocorridas no intervalo.

Permite-se substituir essa expressão por:

$$\varepsilon_c(t) = \sigma_c(t_0) \left[\frac{1}{E_c(t_0)} + \frac{\varphi(t, t_0)}{E_{c28}} \right] + \varepsilon_{cs}(t, t_0) + \Delta \sigma_c(t, t_0) \left(\frac{1}{E_c(t_0)} + \frac{\alpha \varphi(t, t_0)}{E_{c28}} \right) \quad \text{Eq. 5.52}$$

Nas expressões de (t) :

$\Delta \sigma(t, t_0)$ é a variação total de tensão no concreto, no intervalo (t, t_0) ; é o coeficiente característico que em valor variável conforme o caso.

No cálculo de perdas de protensão em casos usuais onde a peça pode ser considerada como concretada de uma só vez e a protensão como aplicada de uma só vez, pode-se adotar $\alpha = 0,5$ e admitir $E(t_0) = E_{c28}$, como foi feito em 9.6.3.4.2. Observar que aquela subseção considera que o coeficiente de fluência do concreto: $\varphi = \varphi_a + \varphi_f + \varphi_d$ é um coeficiente de deformação lenta

irreversível, com as propriedades definidas para φ_f . Nos outros casos usuais, pode-se considerar $\alpha = 0,8$, mantendo $E_c(t_0) \neq E_{c28}$ sempre que significativo.

Essa aproximação tem a vantagem de tratar φ como uma única função, sem separar φ_a , φ_f e φ_d .

É possível separar φ_a , φ_f e φ_d , mas para isso é necessário aplicar a expressão integral ao problema em estudo. A expressão simplificada não se aplica nesse caso.

Especial atenção deve ser dada aos casos em que as fundações são deformáveis ou parte da estrutura não apresenta deformação lenta, como é o caso de tirantes metálicos.”

Deformações na Armadura

“Quando a armadura é solicitada em situação análoga à descrita em A.2.1, sua deformação vale:

$$\varepsilon_s(t) = \frac{\sigma_s(t_0)}{E_s} + \frac{\sigma_s(t_0)}{E_s} \chi(t, t_0) \quad \text{Eq. 5.53}$$

onde

$\sigma_s(t_0) / E_s$ é a deformação imediata, por ocasião do carregamento;

$[\sigma_s(t_0) / E_s] \chi(t, t_0)$ é a deformação por fluência, ocorrida no intervalo de tempo (t, t_0) e considerada sempre que $\sigma_s(t_0) > 0,5 f_{ptk}$.

Quando a livre deformação por fluência é impedida, em situação análoga à descrita em A.2.5 para o concreto, a deformação total pode ser calculada por:

$$\varepsilon_s(t) = \frac{\sigma_s(t_0)}{E_s} + \frac{\sigma_s(t_0)}{E_s} \chi(t, t_0) + \frac{\Delta\sigma_s(t, t_0)}{E_s} [1 + \chi(t, t_0)] \quad \text{Eq. 5.54}$$

onde

$\Delta\sigma_s(t, t_0)$ é a variação total de tensão na armadura, no intervalo (t, t_0) .”

5.6 Perdas de Protensão Imediatas

A NBR 6118 (item 9.6.3.3.1) define **perdas imediatas** da força de protensão no caso de **pré-tração**: “A variação da força de protensão em elementos estruturais com **pré-tração**, por ocasião da aplicação da protensão ao concreto, e em razão do seu encurtamento, deve ser calculada em regime elástico, considerando-se a deformação da seção homogeneizada. O módulo de elasticidade do concreto a considerar é o correspondente à data de protensão, corrigido, se houver cura térmica.”

E as **perdas imediatas** de força de protensão na **pós-tração** (item 9.6.3.3.2): “Para os sistemas usuais de protensão, as perdas imediatas são as devidas ao encurtamento imediato do concreto, ao atrito entre as armaduras e as bainhas ou o concreto, ao deslizamento da armadura junto à ancoragem e à acomodação dos dispositivos de ancoragem, como detalhado em 9.6.3.3.2.1 a 9.6.3.3.2.3.”

5.6.1 Perda por Encurtamento Elástico Imediato do Concreto na Pré-Tensão

Quando a armadura é relaxada (solta) das ancoragens na pista de protensão, aplica a força de protensão na peça, e imediatamente tensões de compressão atuam no concreto. O concreto deforma-se (encurta) e a peça tem o comprimento diminuído de Δ_L , como mostrado na Figura 5.14 no caso de protensão axial. Devido à aderência a armadura também encurta, perde alongamento, e assim ocorre a **perda de força de protensão por encurtamento elástico imediato do concreto**.

Na pista de protensão, a força na armadura estirada e fixada nas ancoragens é a **força ancorada** (P_a), que é a força inicialmente aplicada na peça, que lhe causa o encurtamento. Após o

encurtamento, a força que passa a atuar na peça é P_o (**força de protensão imediatamente após a transferência da protensão para a peça**), dada por:

$$P_o = P_a - \Delta P_{enc} \quad \text{Eq. 5.55}$$

P_a = força ancorada;

ΔP_{enc} = perda de força de protensão devida ao encurtamento elástico imediato do concreto.

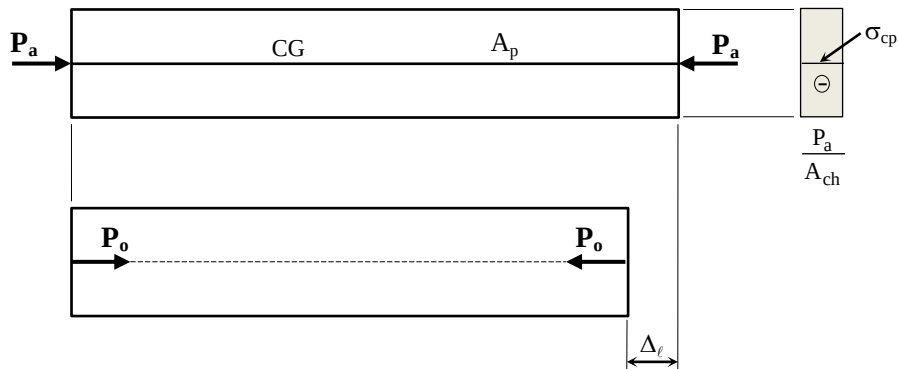


Figura 5.14 – Encurtamento elástico por deformação imediata do concreto na protensão axial.

A aplicação da força de protensão P_a causa uma deformação de encurtamento no concreto (ϵ_{cp}), e conforme a Lei de Hooke ($\sigma = \epsilon \cdot E$), tem-se $\epsilon_{cp} = \sigma_{cp} / E_c$, sendo σ_{cp} a tensão no concreto ao nível do CG da armadura de protensão. Devido à aderência entre o concreto e a armadura, a variação de deformação na armadura de protensão ($\Delta\epsilon_p$) é igual à deformação de encurtamento no concreto, isto é: $\Delta\epsilon_p = \epsilon_{cp}$. Aplicando a Lei de Hooke tem-se $\Delta\epsilon_p = \Delta\sigma_{p,enc} / E_p$, e:

$$\Delta\epsilon_p = \epsilon_{cp} \quad \rightarrow \quad \text{e substituindo:} \quad \frac{\Delta\sigma_{p,enc}}{E_p} = \frac{\sigma_{cp}}{E_c}$$

de onde sai a perda de tensão na armadura de protensão¹⁴⁹ devida ao encurtamento elástico imediato do concreto,¹⁵⁰ na protensão axial:

$$\Delta\sigma_{p,enc} = \frac{E_p}{E_c} \sigma_{cp} = \alpha_p \sigma_{cp} \quad \text{Eq. 5.56}$$

$$\alpha_p = \frac{E_p}{E_c} = \text{razão modular}$$

E_p = módulo de elasticidade do aço de protensão;

E_c = módulo de elasticidade do concreto na data do encurtamento;

σ_{cp} = tensão no concreto ao nível do centro de gravidade (CG) da armadura de protensão.¹⁵¹ Na protensão axial:

¹⁴⁹ A perda de protensão pode ser expressa como perda de tensão ($\Delta\sigma$) ou perda de força (ΔP).

¹⁵⁰ A NBR 6118 (item 9.6) define como “ $\Delta\sigma_p$ a perda média de protensão por cabo devida ao encurtamento imediato do concreto.”

¹⁵¹ No cálculo de σ_{cp} , Hanai^[4] considera a força P_a . Outros autores^[2,10,21] consideram a força P_o , que neste caso deve ser estimada, pois depende da perda. A questão é de considerar a força que causa a deformação do concreto, ou a força que passa a existir imediatamente após a deformação por encurtamento elástico imediato. A perda será um pouco superior com P_a , por esta força ser maior que P_o .

$$\sigma_{cp} = \frac{P_a}{A_{ch}}$$

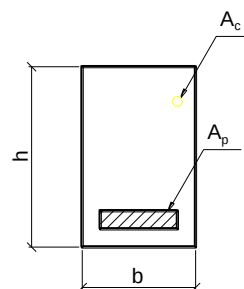
A_{ch} = área da seção homogeneizada.

No item 9.6.3.3.1 a NBR 6118 informa que a variação da força de protensão na pré-tração deve ser calculada em regime elástico, com a deformação da seção homogeneizada e módulo de elasticidade do concreto correspondente à data de protensão, corrigido no caso de cura térmica. A área da seção homogeneizada é calculada como:

$$A_c = b \cdot h \quad (\text{área da seção bruta})$$

$$A_{cp} = \alpha_p \cdot A_p \quad (\text{área de concreto equivalente à área } A_p)$$

$$A_{ch} = A_c + A_{cp} - A_p = b \cdot h + (\alpha_p - 1) A_p$$



Por simplicidade, em peças onde a quantidade de aço (armaduras passiva e ativa) não é alta relativamente à seção transversal, pode-se fazer $A_{ch} = A_c$.

A perda de força de protensão (ΔP_{enc}) na protensão axial, com o encurtamento elástico imediato deduzida da Eq. 5.56, é:

$$\Delta \sigma_{p,enc} = \alpha_p \sigma_{cp} = \alpha_p \frac{P_a}{A_{ch}}, \text{ e como } \Delta \sigma_{p,enc} = \frac{\Delta P_{enc}}{A_p}, \text{ fica: } \frac{\Delta P_{enc}}{A_p} = \alpha_p \frac{P_a}{A_{ch}}$$

$$\Delta P_{enc} = \alpha_p \frac{P_a}{A_{ch}} A_p \quad \text{Eq. 5.57}$$

A força de protensão que atua na peça, imediatamente após o encurtamento elástico imediato, é:

$$P_o = P_a - \Delta P_{enc} = P_a - \alpha_p \frac{P_a}{A_{ch}} A_p \quad \text{Eq. 5.58}$$

A protensão axial não é comum nas peças de Concreto Protendido, e sim a protensão excêntrica, o que modifica a tensão no concreto ao nível da armadura de protensão, pois a excentricidade causa o levantamento (contraflecha) da peça ao longo do seu comprimento, fazendo-a apoiar-se apenas nas extremidades, de modo que o peso próprio passa a atuar¹⁵² (Figura 5.15). A Figura 5.16 mostra as tensões normais no meio do vão com a atuação do peso próprio.

¹⁵² Nos estágios seguintes em peças pré-moldadas (içamento para a desmoldagem, transporte interno e montagem na obra) o peso próprio também atua.



a) vista da viga;



b) região com contraflecha ao longo do vão;



c) região do apoio;



d) região no vão.

Figura 5.15 – Levantamento (contraflecha) de uma viga protendida com pós-tração pelo efeito de aplicação com protensão excêntrica. (Fonte: Fotografias do Autor)

Para uma viga conforme a Figura 5.16, com armadura de protensão com excentricidade e_p e o momento fletor devido ao peso próprio na seção do meio do vão (M_{pp}), a tensão no concreto nessa seção, ao nível da armadura de protensão é:¹⁵³

$$\sigma_{cp} = -\frac{P_a}{A_{ch}} - \frac{P_a e_p^2}{I_h} + \frac{M_{pp} e_p}{I_h} \quad \text{Eq. 5.59}$$

I_h = momento de inércia da seção homogeneizada.

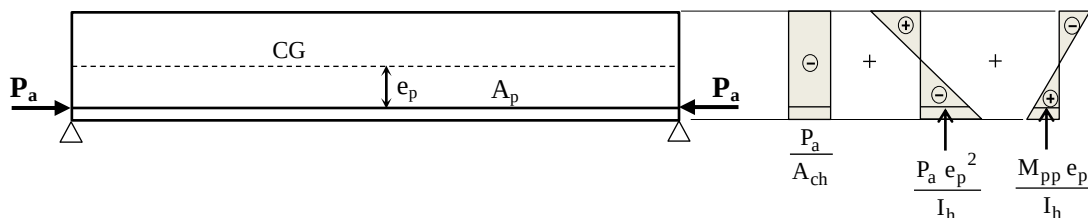


Figura 5.16 – Tensões normais na seção transversal no meio do vão, sob protensão excêntrica e com atuação do peso próprio devido ao levantamento da viga.

A Eq. 5.59 mostra que a tensão no concreto depende do momento fletor e da excentricidade, ou seja, a perda de protensão por encurtamento elástico imediato difere ao longo do comprimento da

¹⁵³ A tensão σ_{cp} deve ser determinada com os carregamentos externos que atuem sobre a peça no instante da transferência da protensão, geralmente apenas o peso próprio.

peça, conforme a variação da excentricidade (se variar) e do momento fletor. E nos apoios não ocorre influência do momento fletor. Geralmente é necessário calcular a perda somente na seção de momento fletor máximo.^[10]

Aplicando a tensão σ_{cp} da Eq. 5.59 na Eq. 5.56 ($\Delta\sigma_{p,enc} = \alpha_p \sigma_{cp}$), a força de protensão P_o pode ser calculada em função da tensão σ_{po} na armadura:

$$\sigma_{po} = \sigma_{pa} - \Delta\sigma_{p,enc} \quad \text{Eq. 5.60}$$

$$\text{com } \sigma_{pa} = \frac{P_a}{A_p}$$

$$P_o = \sigma_{po} A_p \quad \text{Eq. 5.61}$$

A expressão de σ_{cp} é válida quando se pode considerar a protensão aplicada em uma única fibra. Quando a protensão ocorrer em fibras distintas, como no caso de cordoalhas em vários níveis, a influência de uma sobre a outra deve ser avaliada, conforme processo apresentado em Hanai.^[4]

5.6.1.1 Exemplo 1 – Perda por Encurtamento Elástico Imediato do Concreto em Viga T Pré-tensionada

Calcular a perda de tensão na armadura de protensão por encurtamento elástico imediato do concreto, na seção do meio do vão de uma viga T pré-moldada¹⁵⁴ **pré-tensionada** (Figura 5.17), assumindo que antes da transferência da protensão a força ancorada (P_a) era correspondente à tensão de $0,77f_{ptk}$. Dados:

- comprimento da viga biapoiada $\ell = 14,0$ m ;
- concreto C50 ($f_{ck} = 50$ MPa) ; $\gamma_{concr} = 25$ kN/m³ ;
- resistência do concreto à compressão no instante da transferência da protensão ($f_{ck,j} = 35$ MPa);
- armadura de protensão (A_p) composta por 12 cordoalhas CP 190 RB ϕ 12,7 mm ($f_{ptk} = 1.900$ MPa e $E_p = 196.000$ MPa) ; $a_{p,cg} = 8,5$ cm ;
- considerar que durante a transferência da protensão só atua o peso próprio da viga;
- considerar simplificadamente a seção **não** homogeneizada (seção bruta): $A_c = 3.525$ cm² ; $y_b = 41,77$ cm ; $I_c = 1.788.188$ cm⁴.

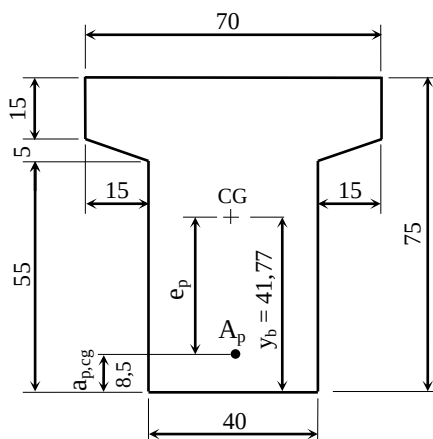


Figura 5.17 – Medidas (cm) da seção transversal da viga T pré-moldada pré-tensionada.

Resolução

Módulo de elasticidade inicial do concreto na data da transferência, com $f_{ck,j} = 35$ MPa (Eq. 2.7):

$$E_{ci} = \alpha_E 5600 \sqrt{f_{ck}} \quad , \text{ com } \alpha_E = 1,2 \text{ (brita de basalto ou diabásio)}$$

¹⁵⁴ A viga T pré-moldada, também conhecida como viga vaso, é projetada geralmente para o apoio de lajes alveolares, em grandes vãos e cargas altas, como supermercados, garagens, etc.

$$E_{ci} = 1,2 \cdot 5600 \sqrt{35} = 39.756 \text{ MPa}$$

$$\text{Razão modular: } \alpha_p = \frac{E_p}{E_{ci}} = \frac{196.000}{39.756} = 4,93$$

$$\text{Excentricidade da armadura de protensão:}^{155} e_p = y_b - a_{p,CG} = 41,77 - 8,5 = 33,27 \text{ cm}$$

$$\text{Tensão na armadura ancorada: } \sigma_{pa} = 0,77f_{ptk} = 0,77 \cdot 190 = 146,3 \text{ kN/cm}^2 = 1.463 \text{ MPa}$$

Área de armadura de protensão: na Tabela 2.5 está indicado que conforme o fabricante, a cordoalha $\phi = 12,7 \text{ mm}$ tem área aproximada de $1,01 \text{ cm}^2$ e área mínima de $0,99 \text{ cm}^2$. Para efeito de cálculo e por simplicidade será adotada a área de $1,00 \text{ cm}^2$. Para doze cordoalhas: $A_p = 12 \cdot 1,0 = 12,00 \text{ cm}^2$.

$$\text{Força de protensão ancorada: } P_a = \sigma_{pa} \cdot A_p = 146,3 \cdot 12,00 = 1.755,6 \text{ kN}$$

$$\text{Peso próprio da viga: } g_{pp} = g_1 = A_c \cdot \gamma_{concr} = 0,3525 \cdot 25 = 8,81 \text{ kN/m}$$

$$\text{Momento fletor máximo devido ao peso próprio: } M_{pp} = \frac{g_1 \ell^2}{8} = \frac{8,81 \cdot 14^2}{8} = 215,8 \text{ kN.m} = 21.580 \text{ kN.cm}$$

A tensão no concreto, na fibra relativa ao CG da armadura de protensão, no instante da transferência da força de protensão é (Eq. 5.59):

$$\sigma_{cp} = -\frac{P_a}{A_{ch}} - \frac{P_a e_p^2}{I_h} + \frac{M_{pp} e_p}{I_h} = -\frac{17556}{3525} - \frac{17556 \cdot 33,27^2}{1.788.188} + \frac{21580 \cdot 33,27}{1.788.188} = -1,183 \text{ kN/cm}^2$$

onde o sinal negativo indica que a tensão é de compressão. Considerando a tensão em módulo, a perda de tensão por encurtamento elástico é (Eq. 5.56):

$$\Delta\sigma_{p,enc} = \alpha_p \sigma_{cp} = 4,93 \cdot |-1,183| = 5,833 \text{ kN/cm}^2 = 5,833 \text{ MPa}$$

$$\text{Em porcentagem: } \frac{\Delta\sigma_{p,enc}}{\sigma_{pa}} 100 = \frac{5,833}{1.463} 100 = 4,0 \%$$

Tensão e força na armadura de protensão após a transferência (Eq. 5.60 e Eq. 5.61):

$$\sigma_{po} = \sigma_{pa} - \Delta\sigma_{p,enc} = 146,3 - 5,833 = 140,47 \text{ kN/cm}^2$$

$$P_o = \sigma_{po} A_p = 140,47 \cdot 12,00 = 1.685,6 \text{ kN} \rightarrow \text{portanto, uma redução de } 70,0 \text{ kN de } P_a \text{ para } P_o.$$

5.6.1.2 Exemplo 2 – Perda por Encurtamento Elástico Imediato do Concreto em Viga Retangular Pré-tensionada

Calcular a perda de tensão na armadura de protensão por encurtamento elástico imediato do concreto, na seção 1-1 (meio do vão) de uma viga pré-moldada **pré-tensionada** (Figura 5.18), assumindo que antes da transferência da protensão, a força ancorada era correspondente à tensão de $0,75f_{ptk}$. Dados:¹⁵⁶

- comprimento da viga $L = 15 \text{ m}$;
- concreto C40 ($f_{ck} = 40 \text{ MPa}$) ; $\gamma_{concr} = 25 \text{ kN/m}^3$;
- resistência do concreto à compressão no instante da transferência da protensão ($f_{ck,j} = 30 \text{ MPa}$)
- armadura de protensão (A_p) composta por 10 cordoalhas CP 190 RB $\phi = 12,7 \text{ mm}$ ($f_{ptk} = 1.900 \text{ MPa}$ e

¹⁵⁵ Excentricidade da armadura de protensão (e_p) é a distância entre o CG da seção transversal e o CG da armadura de protensão.

¹⁵⁶ Este exemplo toma como base aquele apresentado em Nawy, e mostra que uma peça fabricada em pista de protensão pode ter a armadura com mudança de direção, por meio de apoios intermediários para o seu desvio.

NAWY, E.G. *Prestressed concrete: a fundamental approach*. Pearson/Prentice Hall, 2006, 945p.

$E_p = 196.000 \text{ MPa}$, $A_p = 10 \cdot 1,00 = 10,00 \text{ cm}^2$ – ver Tabela 2.5);

- considerar que durante a transferência da protensão só atua o peso próprio da viga, e considerar a seção bruta (não homogeneizada).

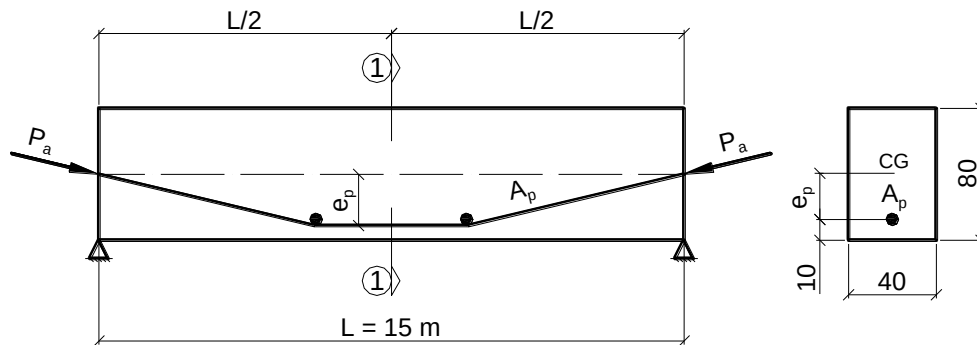


Figura 5.18 – Posicionamento do cabo de protensão da viga e seção transversal.

Resolução

Módulo de elasticidade inicial do concreto na data da transferência (Eq. 2.7):

$$E_{ci} = \alpha_E 5.600 \sqrt{f_{ck}} \quad , \text{ com } \alpha_E = 1,0 \text{ (brita de granito ou gnaiss)}$$

$$E_{ci} = 1,0 \cdot 5.600 \sqrt{30} = 30.672 \text{ MPa}$$

$$\text{Razão modular: } \alpha_p = \frac{E_p}{E_{ci}} = \frac{196.000}{30.672} = 6,39$$

Considerando simplifcadamente as propriedades da seção não homogeneizada ($A_{ch} = A_c$ e $I_h = I_c$):

$$A_c = 40 \cdot 80 = 3.200 \text{ cm}^2 \quad ; \quad I_c = \frac{40 \cdot 80^3}{12} = 1.706.667 \text{ cm}^4$$

$$\text{Excentricidade da armadura de protensão: } e_p = \frac{80}{2} - 10 = 30,0 \text{ cm}$$

$$\text{Tensão na armadura ancorada: } \sigma_{pa} = 0,75 f_{ptk} = 0,75 \cdot 190 = 142,5 \text{ kN/cm}^2 = 1.425 \text{ MPa}$$

$$\text{Força de protensão ancorada: } P_a = \sigma_{pa} \cdot A_p = 142,5 \cdot 10,00 = 1.425 \text{ kN}$$

$$\text{Peso próprio da viga: } g_{pp} = (0,4 \cdot 0,8) 25 = 8,0 \text{ kN/m}$$

$$\text{Momento fletor devido ao peso próprio na seção 1-1: } M_{pp} = \frac{8,0 \cdot 15^2}{8} = 225,0 \text{ kN.m} = 22.500 \text{ kN.cm}$$

A tensão no concreto, na fibra relativa ao CG da armadura de protensão, no instante da transferência da força de protensão é (Eq. 5.59):

$$\sigma_{cp} = -\frac{P_a}{A_{ch}} - \frac{P_a e_p^2}{I_h} + \frac{M_{pp} e_p}{I_h} = -\frac{1.425}{3.200} - \frac{1.425 \cdot 30^2}{1.706.667} + \frac{22.500 \cdot 30,0}{1.706.667} = -0,801 \text{ kN/cm}^2$$

Com a tensão de compressão em módulo a perda de tensão por encurtamento elástico é (Eq. 5.56):

$$\Delta \sigma_{p,enc} = \alpha_p \sigma_{cp} = 6,39 \cdot |-0,801| = 5,12 \text{ kN/cm}^2 = 51,2 \text{ MPa}$$

Em porcentagem: $\frac{\Delta\sigma_{p,enc}}{\sigma_{pa}} 100 = \frac{5,12}{142,5} 100 = 3,6\%$

Tensão e força na armadura de protensão após a transferência (Eq. 5.60):

$$\sigma_{po} = \sigma_{pa} - \Delta\sigma_{p,enc} = 142,5 - 5,12 = 137,38 \text{ kN/cm}^2 = 1.373,8 \text{ MPa}$$

$$P_o = \sigma_{po} A_p = 137,38 \cdot 10,00 = 1.373,8 \text{ kN} \rightarrow \text{portanto, uma redução de 51,2 kN de } P_a \text{ para } P_o.$$

5.6.1.3 Exercício Proposto – Perda por Encurtamento Elástico Imediato do Concreto em Viga Calha U Pré-tensionada

Calcular a perda de tensão na armadura de protensão por encurtamento elástico imediato do concreto, na seção do meio do vão, de uma viga calha U pré-moldada e **pré-tensionada** (Figura 5.19), assumindo que antes da transferência da protensão, a força ancorada era correspondente à tensão de $0,7f_{ptk}$. Dados:¹⁵⁷

- comprimento da viga $L = 7,3 \text{ m}$;
- concreto C40 ($f_{ck} = 40 \text{ MPa}$) ; $\gamma_{concr} = 25 \text{ kN/m}^3$;
- resistência do concreto à compressão no instante da transferência da protensão ($f_{ck,j} = 22 \text{ MPa}$);
- armadura de protensão (A_p) composta por 6 cordoalhas CP 190 RB $\phi 9,5 \text{ mm}$ ($f_{ptk} = 1.900 \text{ MPa}$ e $E_p = 200.000 \text{ MPa}$), $a_{p,cg} = 8,0 \text{ cm}$;
- considerar que durante a transferência da protensão só atua o peso próprio da viga, e considerar a seção bruta (não homogeneizada).

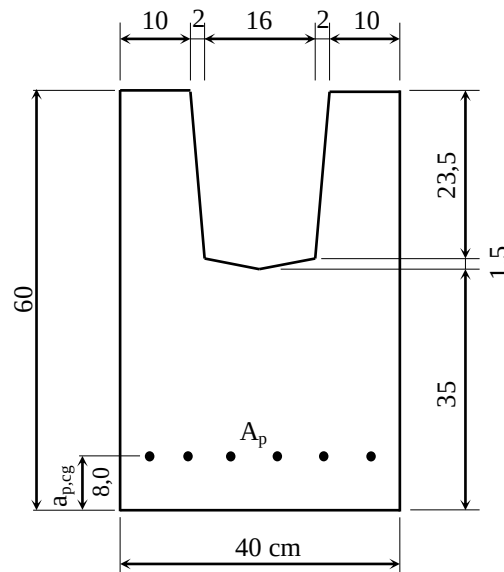


Figura 5.19 – Medidas (cm) da seção transversal da viga U.

5.6.2 Perda por Encurtamento Elástico Imediato do Concreto pelo Estiramento dos Cabos Restantes na Pós-Tensão

Na operação de estiramento na **pós-tensão**, os cilindros hidráulicos apóiam-se na própria peça, o que impõe deformações no concreto à medida que a armadura vai sendo estirada. No primeiro cabo estirado não ocorre perda de protensão por encurtamento elástico imediato do concreto, pois o estiramento vai compensando o encurtamento da peça, e assim também é quando existem múltiplos cabos, e todos são estendidos simultaneamente. No entanto, quando o estiramento é aplicado cabo por cabo, o estiramento de um cabo provoca deformações elásticas imediatas no concreto que resultam em perda de alongamento nos cabos já estirados e ancorados. Portanto, o primeiro cabo

¹⁵⁷ Este exemplo toma como base a viga pré-moldada apresentada em Melo: MELO, C.E.E. *Manual Munte de Projetos em Pré-fabricados de Concreto*. Munte – soluções concretas. São Paulo, Ed. Pini, 2004, 488p.

apresenta perda de protensão decorrente da protensão dos $n-1$ cabos restantes, e assim sucessivamente, sendo zero a perda no último cabo estirado.

Segundo a NBR 6118 (item 9.6.3.3.2.1), “Nos elementos estruturais com **pós-tração**, a protensão sucessiva de cada um dos n grupos de cabos protendidos simultaneamente provoca uma deformação imediata do concreto e, conseqüentemente, afrouxamento dos cabos anteriormente protendidos. A perda média de protensão, por cabo, pode ser calculada pela expressão:”

$$\Delta\sigma_p = \alpha_p(t) \left(\frac{n-1}{2n} \right) |\sigma_{c,pog}^*| \quad \text{Eq. 5.62}$$

$\sigma_{c,pog}^*$ é a tensão no concreto adjacente ao cabo resultante, provocada pelo efeito conjunto da protensão (compressão) após as perdas por atrito e por acomodação da ancoragem e pelo efeito da carga permanente (tração) mobilizada no instante t_o , sendo positiva se de compressão.”

razão modular: $\alpha_p = E_p / E_c$.

5.6.3 Perda por Atrito na Pós-tensão

Nas peças pós-tensionadas com cabos curvos ocorre o fenômeno de atrito entre as cordoalhas e a bainha. Nos trechos retos também ocorre atrito, em razão das pequenas ondulações da bainha. O valor da perda por atrito depende do traçado do cabo e das características de rugosidade dos materiais em contato.

Como base para a análise teórica da perda por atrito, o efeito do atrito angular pode ser ilustrado com uma correia ao redor de uma base circular (um tambor por exemplo - Figura 5.20). Aplicando a força T_2 , a força T_1 na outra extremidade, necessária para iniciar o escorregamento da correia, é:^[2]

$$T_1 = T_2 e^{\mu\alpha}$$

onde μ é o coeficiente de atrito angular estático, e α é o ângulo entre T_1 e T_2 , em radianos.

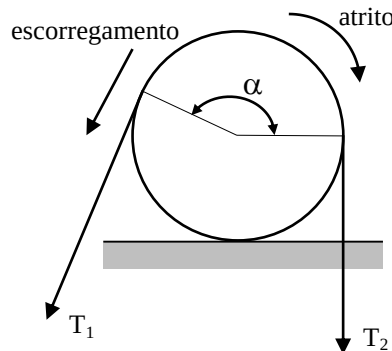


Figura 5.20 – Atrito entre uma correia e um tambor.^[2]

A Figura 5.21 mostra as forças de atrito que surgem durante a movimentação das cordoalhas de um cabo de protensão no interior da bainha, na operação de estiramento com o cilindro hidráulico na ancoragem ativa. O efeito do atrito entre a bainha e a armadura pode ser tratado de forma análoga ao mostrado na Figura 5.20, onde a tensão σ_p em uma seção s da armadura no interior da bainha é função da tensão aplicada na armadura na posição do cilindro hidráulico (σ_{pi} na ancoragem ativa), conforme a Figura 5.21:

$$\sigma_p(s) = \sigma_{pi} e^{-(\mu\alpha + ks)} \quad \text{Eq. 5.63}$$

com k sendo o coeficiente relativo à ondulação da bainha, por unidade de comprimento.

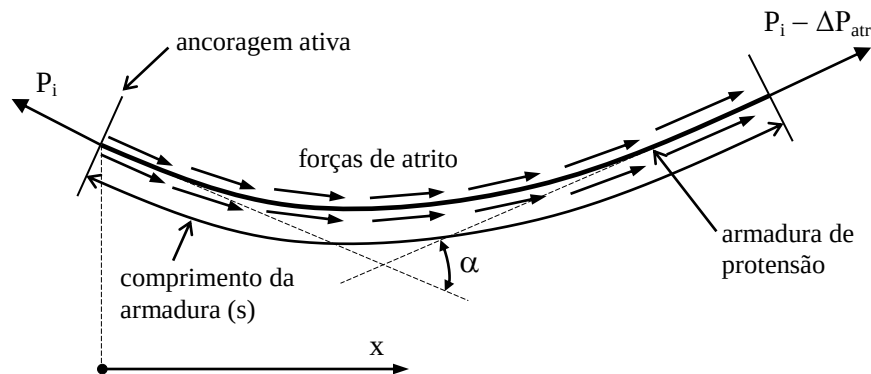


Figura 5.21 – Atrito entre armadura de protensão e bainha curva.^[2]

Em vigas a abscissa curvilínea s pode ser substituída de forma aproximada pela sua projeção horizontal x , e:

$$\sigma_p(x) = \sigma_{pi} e^{-(\mu\alpha + kx)} \quad \text{Eq. 5.64}$$

O atrito diminui o alongamento da armadura, e conseqüentemente diminui a tensão aplicada, gerando a chamada **perda de força de protensão por atrito** (ΔP_{atr} , ver Figura 5.21). A perda de força é acumulativa, de modo que aumenta com a distância do cilindro hidráulico (onde é zero). Se na outra extremidade da peça a ancoragem for passiva, nessa posição a perda será máxima. Portanto, uma forma muito eficiente de diminuir a perda por atrito, é fazer o estiramento nas duas extremidades da peça, simultaneamente, o que é geralmente feito em peças longas.

Segundo a NBR 6118 (item 9.6.3.3.2.2), “Nos elementos estruturais com **pós-tração**, a **perda por atrito** pode ser determinada pela expressão:

$$\Delta P_{atr}(x) = P_i \left[1 - e^{-(\mu \Sigma\alpha + kx)} \right] \quad \text{Eq. 5.65}$$

onde:

P_i é o valor definido em 9.6.1.2.1;

x é a abscissa do ponto onde se calcula ΔP , medida a partir da ancoragem, expressa em metros (m);

$\Sigma\alpha$ é a soma dos ângulos de desvio entre a ancoragem e o ponto de abscissa x , expressa em radianos (rad);

μ é o coeficiente de atrito aparente entre o cabo e a bainha. Na falta de dados experimentais, pode ser estimado como a seguir (valores em 1/radianos):

$\mu = 0,50$ entre cabo e concreto (sem bainha);

$\mu = 0,30$ entre barras ou fios com moedas ou saliências e bainha metálica;

$\mu = 0,20$ entre fios lisos ou cordoalhas e bainha metálica;

$\mu = 0,10$ entre fios lisos ou cordoalhas e bainha metálica lubrificada;

$\mu = 0,05$ entre cordoalha e bainha de polipropileno lubrificada;

k é o coeficiente de perda por metro provocada por curvaturas não intencionais do cabo. Na falta de dados experimentais, pode ser adotado o valor $0,01\mu$ (1/m).”

O ACI 318^[18] apresenta uma equação com valor aproximado ao da Eq. 5.64, por meio da expansão de Taylor, mantendo o primeiro termo da exponencial $e^{-(\mu\alpha + kx)}$, e desprezando termos superiores, considerando que $\mu\alpha + kx \leq 0,30$:

$$\sigma_p(x) = \frac{\sigma_{pi}}{1 + \mu\alpha + kx} \quad \text{Eq. 5.66}$$

O ACI 318^[18] propõe os seguintes valores para **k** (por metro):

a) armaduras em bainha flexível de metal:

- fios: de 0,0033 a 0,0049;
- cordoalha de 7 fios: de 0,0016 a 0,0066;
- barras de alta resistência: de 0,0003 a 0,0020.

b) cordoalha de 7 fios em dutos metálicos rígidos: 0,00066;

c) cordoalha engraxada - fios e cordoalhas de 7 fios: de 0,0010 a 0,0066.

Em termos de perda de tensão na armadura, a Eq. 5.65 pode ser escrita como:

$$\Delta\sigma_{p,atr}(x) = \sigma_{pi} \left[1 - e^{-(\mu\alpha + kx)} \right] \quad \text{Eq. 5.67}$$

A variação de tensão ao longo da armadura pode ser expressa graficamente, e como a Eq. 5.64 origina uma curva exponencial, a aplicação de um gráfico semi-log (σ_{pi} na ordenada em escala de log e x na abscissa em escala aritmética) possibilita substituir a curva por uma linha reta. Para os casos onde α é proporcional a x (cabos com curvaturas parabólicas por exemplo), a Eq. 5.64 pode ser reescrita como:

$$\sigma_p(x) = \sigma_{pi} e^{-(\mu\alpha + kx)} \quad \rightarrow \quad \sigma_p(x) = \sigma_{pi} e^{-\lambda x} \quad \text{Eq. 5.68}$$

com:

$$\lambda x = \mu\alpha + kx \quad \text{Eq. 5.69}$$

e $(-\lambda)$ é a inclinação da reta no gráfico semi-log, sendo λ obtido da Eq. 5.69:

$$\lambda = \mu \frac{\alpha}{x} + k \quad \text{Eq. 5.70}$$

sendo **λ constante apenas para uma curva** (parábola, arco de circunferência) de um cabo com múltiplas curvaturas. Para um cabo com perfil em diferentes parábolas, **λ deve ser determinado para cada parábola.**

No caso de cabo com curvatura em parábola do 2º grau (Figura 5.22), tem-se $m = 2y$, e o ângulo α no centro, correspondente ao comprimento total x , é:^[23]

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{m}{\frac{x}{2}} = \frac{2m}{x}$$

com $m = 2y$ fica: $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{4y}{x}$

e para ângulos pequenos tem-se em rad:

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{4y}{x} \quad \text{Eq. 5.71}$$

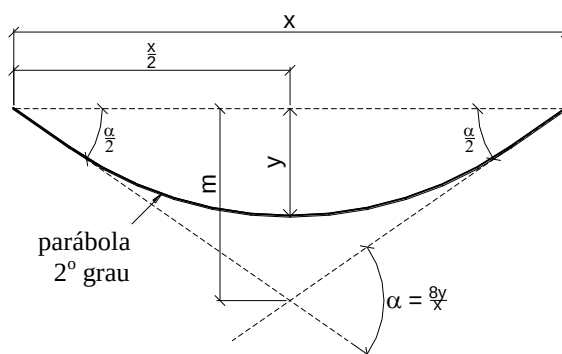


Figura 5.22 – Cabo com curvatura em parábola do 2º grau.

Portanto, o ângulo no centro é:

$$\alpha = \frac{8y}{x} \quad (\text{rad}) \quad \text{Eq. 5.72}$$

Em muitos casos práticos a curvatura real do cabo é suave, e pode ser aplicada a Eq. 5.72, bem como pode também ser utilizada para curvatura em **arco de circunferência**.^[5,10]

5.6.3.1 Exemplo 1 - Perda de Força de Protensão por Atrito

Para uma viga biapoiada **pós-tensionada** determinar a **perda por atrito** na posição da ancoragem passiva (perda máxima), considerando que o cabo de protensão têm a *curvatura em arco de circunferência* (Figura 5.23). São conhecidos:¹⁵⁸

- bainha metálica flexível, com coeficiente de atrito $\mu = 0,20$ (bainha metálica com cordoalha) e coeficiente de atrito por ondulação $k = 0,006/\text{m}$;
- cabo único de protensão composto por 10 cordoalhas CP 190 de 7 fios $\phi 12,7 \text{ mm}$ ($A_p = 10,00 \text{ cm}^2$);
- tensão aplicada na armadura na posição do cilindro hidráulico: $\sigma_{pi} = 0,74 f_{ptk} = 0,74 \cdot 1900 = 1.406,0 \text{ MPa}$;
- comprimento da viga: $\ell = 20,0 \text{ m}$.

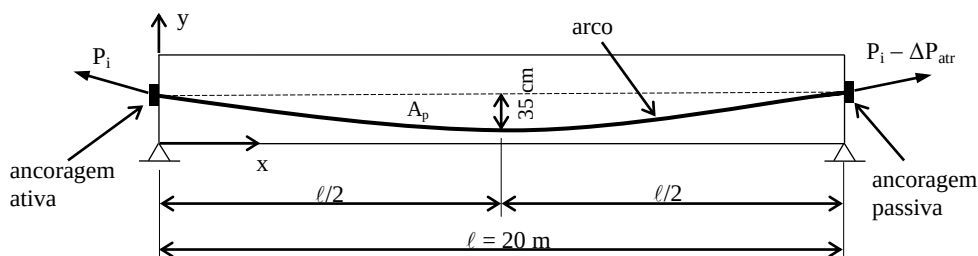


Figura 5.23 – Viga pós-tensionada com curvatura do cabo em arco de circunferência.

Resolução

Para cálculo da perda máxima por atrito, que ocorre na ancoragem passiva (maior valor de x), o ângulo de desvio α correspondente à curvatura completa, é (Eq. 5.72):

¹⁵⁸ Ver outros exemplos numéricos no livro (p. 127 a 136) de CARVALHO, R.C. *Estruturas em Concreto Protendido – Pré-tração, Pós-tensão, Cálculo e Detalhamento*. São Paulo, Ed. Pini, 2012, 431p.

$$\alpha = \frac{8y}{x} = \frac{8 \cdot 0,35}{20} = 0,14 \text{ rad}$$

Força de protensão no cilindro hidráulico: $P_i = \sigma_{pi} \cdot A_p = 140,6 \cdot 10,00 = 1.406,0 \text{ kN}$

Conforme a equação da NBR 6118, a perda de força de protensão por atrito é (Eq. 5.65):

$$\Delta P_{atr}(x) = P_i \left[1 - e^{-(\mu \Sigma \alpha + kx)} \right] \rightarrow \Delta P_{atr}(20,0) = 14060 \left[1 - e^{-(0,20 \cdot 0,14 + 0,006 \cdot 20,0)} \right] = 14060 \left[1 - e^{-(0,148)} \right]$$

$$\Delta P_{atr}(20,0) = 193,4 \text{ kN} \rightarrow \text{perda percentual: } \frac{\Delta P_{atr}}{P_i} = \frac{193,4}{14060} 100 = 13,8 \%$$

Portanto, na posição da ancoragem passiva a força de protensão que atua na armadura, consideradas as perdas devidas ao atrito ao longo da viga, é (Figura 5.24):

$$P_{anc,pass} = P_i - \Delta P_{atr} = 14060 - 193,4 = 1.212,6 \text{ kN}$$

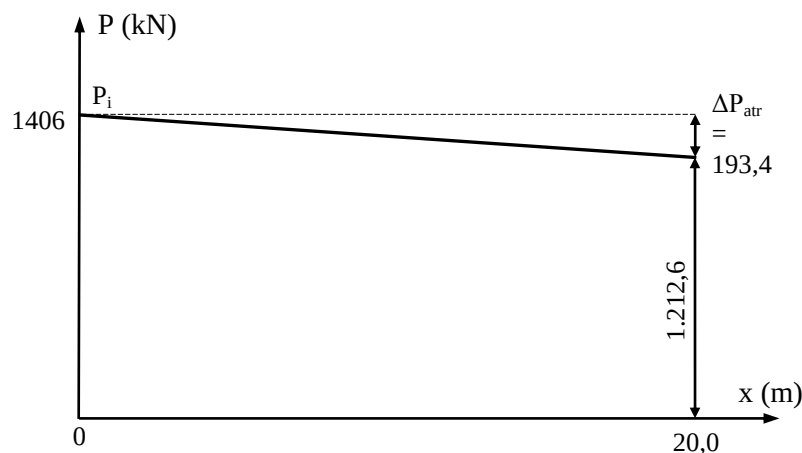


Figura 5.24 – Diminuição da força aplicada pelo cilindro hidráulico na ancoragem ativa até a ancoragem passiva em função das perdas por atrito.

5.6.3.2 Exemplo 2 - Perda de Força de Protensão por Atrito

Para uma viga **pós-tensionada** biapoiada, determinar a perda por atrito no meio do vão e na ancoragem passiva, considerando que o cabo tem a **curvatura em parábola do 2º grau** (Figura 5.25). Dados:

- bainha metálica flexível, coeficiente de atrito $\mu = 0,20$ (bainha metálica com cordoalha), coeficiente de atrito por ondulação $k = 0,01\mu = 0,002/\text{m}$ (conforme valor proposto pela NBR 6118);
- cabo de protensão composto por 12 cordoalhas CP 190 de 7 fios $\phi 12,7 \text{ mm}$ ($A_p = 12,00 \text{ cm}^2$);
- tensão aplicada na armadura na posição do cilindro: $\sigma_{pi} = 0,74f_{ptk} = 0,74 \cdot 1900 = 1.406,0 \text{ MPa}$;
- comprimento da viga: $L = 42,0 \text{ m}$.

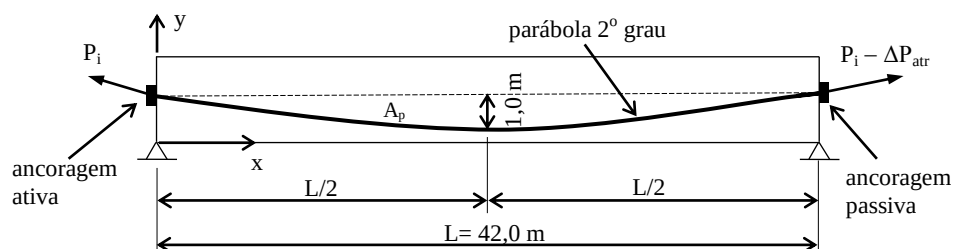


Figura 5.25 – Viga pós-tensionada com curvatura dos cabos em parábola do 2º grau.

Resolução

Força de protensão no cilindro hidráulico: $P_i = \sigma_{pi} \cdot A_p = 140,6 \cdot 12,00 = 1.687,2 \text{ kN}$

a) perda no meio do vão ($x = 21,0$ m)

Deve ser considerado o ângulo de desvio $\alpha/2$ (para metade do comprimento da curvatura), e com a Eq. 5.71:

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{4y}{x} = \frac{4 \cdot 1,0}{42,0} = 0,0952 \text{ rad}$$

A perda de força de protensão por atrito é (Eq. 5.65): $\Delta P_{\text{atr}}(x) = P_i \left[1 - e^{-(\mu \Sigma \alpha + kx)} \right]$

$$\Delta P_{\text{atr}}(21,0) = 1.687,2 \left[1 - e^{-(0,20 \cdot 0,0952 + 0,002 \cdot 21,0)} \right] = 1.687,2 \left[1 - e^{-(0,06104)} \right]$$

$$\Delta P_{\text{atr}}(21,0) = 99,9 \text{ kN} \quad \rightarrow \quad \text{perda percentual: } \frac{\Delta P_{\text{atr}}}{P_i} = \frac{99,9}{1.687,2} 100 = 5,9 \%$$

A força de protensão na armadura na posição $x = 21,0$ m é:

$$P(21,0) = P_i - \Delta P_{\text{atr}} = 1.687,2 - 99,9 = 1.587,3 \text{ kN}$$

b) perda na extremidade da viga na posição $x = 42,0$ m (ancoragem passiva)

Para cálculo da perda por atrito máxima, na ancoragem passiva, o ângulo de desvio α corresponde à curvatura completa, e com Eq. 5.72:

$$\alpha = \frac{8y}{x} = \frac{8 \cdot 1,0}{42,0} = 0,1905 \text{ rad}$$

A perda de força de protensão é: $\Delta P_{\text{atr}}(x) = P_i \left[1 - e^{-(\mu \Sigma \alpha + kx)} \right]$

$$\Delta P_{\text{atr}}(42,0) = 1.687,2 \left[1 - e^{-(0,20 \cdot 0,1905 + 0,002 \cdot 42,0)} \right] = 1.687,2 \left[1 - e^{-(0,1221)} \right]$$

$$\Delta P_{\text{atr}}(42,0) = 193,9 \text{ kN} \quad \rightarrow \quad \text{perda percentual: } \frac{\Delta P_{\text{atr}}}{P_i} = \frac{193,9}{1.687,2} 100 = 11,5 \%$$

Portanto, na ancoragem passiva a força de protensão na armadura é (Figura 5.26):

$$P_{\text{anc,pass}} = P_i - \Delta P_{\text{atr}} = 1.687,2 - 193,9 = 1.493,3 \text{ kN}$$

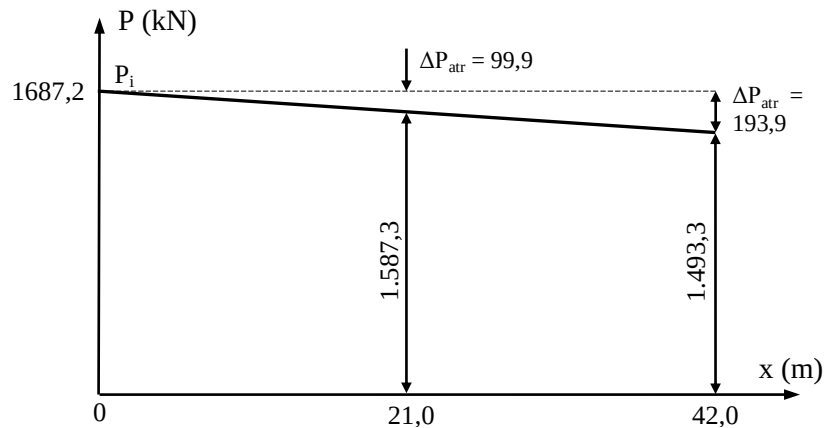


Figura 5.26 – Diminuição da força aplicada pelo cilindro hidráulico na ancoragem ativa até a ancoragem passiva em função das perdas por atrito.

5.6.3.3 Exemplo 3 - Perda de Força de Protensão por Atrito

Calcular as perdas por atrito no cabo com **curvatura em parábola**, de uma viga contínua **pós-tensionada**, nas posições B, C, D, E e F (Figura 5.27), considerando coeficiente de atrito $\mu = 0,20$ (bainha metálica com cordoalha) e coeficiente de atrito por ondulação $k = 0,002/\text{m}$. Dados: $\sigma_{pi} = 1.402,0 \text{ MPa}$.

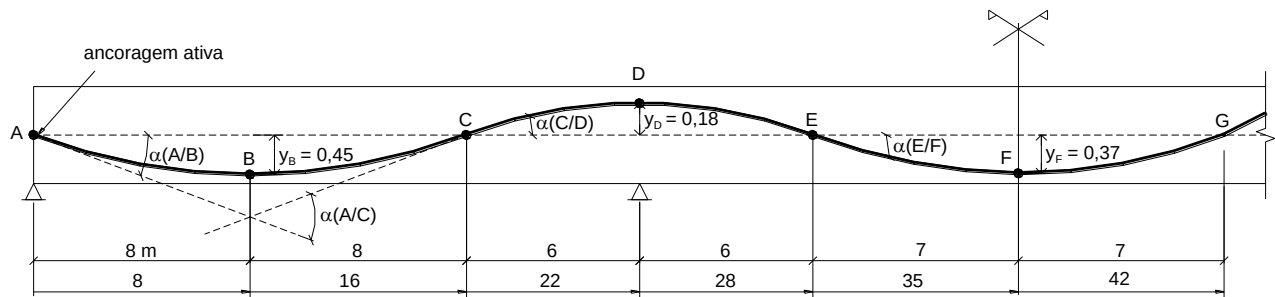


Figura 5.27 – Posicionamento da armadura de protensão ao longo da viga na viga pós-tensionada.

Resolução

O ponto A corresponde à ancoragem ativa, onde é posicionado o cilindro hidráulico, e a perda por atrito é zero. Para determinar as perdas por atrito nos vários pontos ao longo das curvas é necessário determinar os ângulos de desvio α de A até F. Conforme a

Eq. 5.71:

$$\alpha(A/B) = \frac{4y_B}{x_{(A/C)}} = \frac{4 \cdot 0,45}{16} = 0,1125 \text{ rad} \quad ; \quad \alpha(C/D) = \frac{4y_D}{x_{(C/E)}} = \frac{4 \cdot 0,18}{12} = 0,06 \text{ rad}$$

$$\alpha(E/F) = \frac{4y_F}{x_{(E/G)}} = \frac{4 \cdot 0,37}{14} = 0,1057$$

$$\alpha(A/C) = 2 \alpha(A/B) = 2 \cdot 0,1125 = 0,225$$

$$\alpha(A/D) = 2 \alpha(A/B) + \alpha(C/D) = 2 \cdot 0,1125 + 0,06 = 0,285$$

$$\alpha(A/E) = 2 \alpha(A/B) + 2 \alpha(C/D) = 2 \cdot 0,1125 + 2 \cdot 0,06 = 0,345$$

$$\alpha(A/F) = 2 \alpha(A/B) + 2 \alpha(C/D) + \alpha(E/F) = 2 \cdot 0,1125 + 2 \cdot 0,06 + 0,1057 = 0,4507$$

Aplicando as equações Eq. 5.64, Eq. 5.67 e Eq. 5.68, os valores podem ser organizados em uma tabela:

Seção	A	B	C	D	E	F
x (m)	0	8,0	16,0	22,0	28,0	35,0
$\Sigma\alpha$ (rad)	0	0,1125	0,225	0,285	0,345	0,4507
$\mu\Sigma\alpha + kx = \lambda x$	0	0,0385	0,0770	0,1010	0,1250	0,1601
$e^{-(\mu\Sigma\alpha + kx)}$	1	0,9622	0,9259	0,9039	0,8825	0,8520
$\sigma_p(x)$ (MPa)	1.402,0	1.349,0	1.298,0	1.267,0	1.237,0	1.195,0
$\Delta\sigma_{p,atr}(x)$ (MPa)	0	53,0	104,0	135,0	165,0	207,0

Por exemplo, para a seção F ($x = 35,0 \text{ m}$):

Com a Eq. 5.64: $\sigma_p(x) = \sigma_{pi} e^{-\lambda x} \rightarrow \sigma_p(35,0) = 14020 \cdot e^{-0,1601} = 1.195,0 \text{ MPa}$

Com a Eq. 5.67: $\sigma_p(x) = \sigma_{pi} e^{-(\mu\Sigma\alpha + kx)} \rightarrow \sigma_p(35,0) = 14020 e^{-(0,2 \cdot 0,4507 + 0,002 \cdot 35,0)} = 1.195,0 \text{ MPa}$

Com a Eq. 5.68: $\Delta\sigma_{p,atr}(35,0) = 14020 \left[1 - e^{-(0,2 \cdot 0,4507 + 0,002 \cdot 35,0)} \right] = 207,0 \text{ MPa}$

$$\sigma_p(35) = 1402,0 - 207,0 = 1.195,0 \text{ MPa} \quad \rightarrow \quad \text{perda percentual: } \frac{207,0}{1402,0} 100 = 14,8 \%$$

A Figura 5.28 e a Figura 5.29 mostram a variação de tensão na armadura ao longo do comprimento da viga, segundo duas situações de realização do estiramento da armadura de protensão. A Figura 5.28 mostra os resultados na situação do estiramento ser realizado apenas na extremidade esquerda da viga, ou seja, ancoragem ativa apenas nessa extremidade. Observa-se que na seção da metade do comprimento total da viga (F), a perda de tensão por atrito é de 207,0 MPa, o que resulta na tensão de 1.195,0 MPa na armadura. Já na seção da extremidade direita da viga (ancoragem passiva), a perda por atrito é de $2 \cdot 207,0 = 414,0$ MPa, o que leva à tensão na armadura de $(1.402,0 - 414,0 = 988,0 \text{ MPa})$, contra a tensão de 1.402,0 MPa aplicada pelo cilindro hidráulico na seção A, uma perda percentual de 29,5 %.

A Figura 5.29 mostra os resultados na situação do estiramento ser realizado nas duas extremidades da viga. Na seção da metade do comprimento total da viga (F), a perda de tensão por atrito de 207,0 MPa não se altera, mas passa a ser a perda máxima (14,8 %), agora o ponto mais distante das seções de estiramento. E observa-se que na extremidade direita da viga a tensão é a do cilindro, 1.402,0 MPa. Portanto, o estiramento nas duas extremidades de uma viga é uma forma muito eficiente de diminuir significativamente as perdas por atrito.

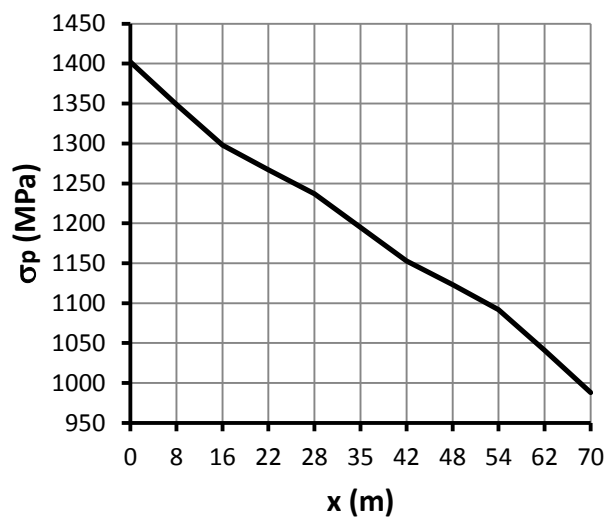


Figura 5.28 – Redução da tensão na armadura de protensão devida à perda por atrito, com realização do estiramento apenas na extremidade esquerda (uma ancoragem ativa e uma ancoragem passiva na viga).

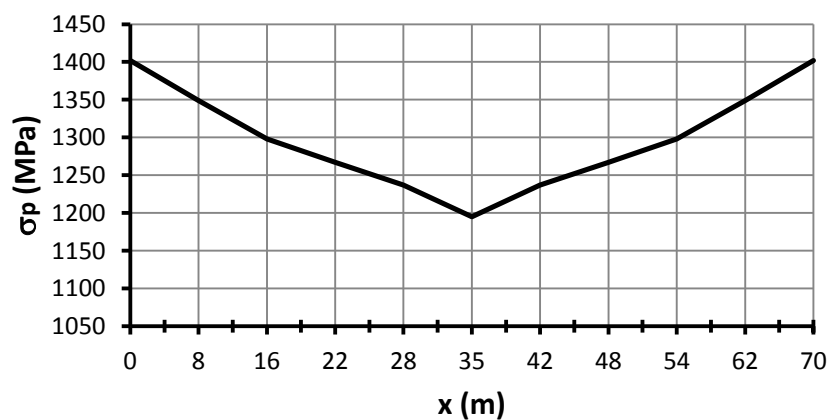


Figura 5.29 – Redução da tensão na armadura de protensão devida à perda por atrito, com realização do estiramento nas duas extremidades (duas ancoragens ativas na viga).

5.6.3.4 Exercício Proposto - Perda de Força de Protensão por Atrito

Uma viga contínua com três tramos tem a armadura em parábolas sucessivas. Assumindo $\mu = 0,20$, $k = 0,0025/\text{m}$, $\sigma_{pi} = 1.303,0 \text{ MPa}$, $f_{ptk} = 1.900 \text{ MPa}$, calcule a tensão na armadura nas seções A até F, considerando que o estiramento seja realizado em uma e nas duas extremidades da viga.

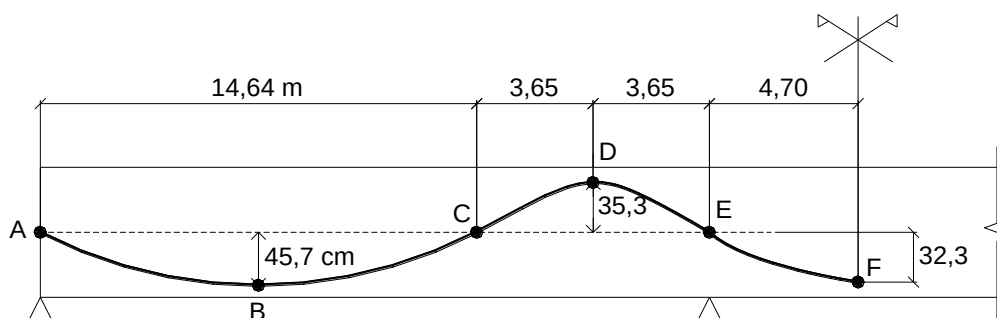


Figura 5.30 – Esquema da viga.

5.6.4 Perda por Escorregamento da Armadura na Ancoragem na Pós-tensão

Como definido nos itens 5.1 e 5.5.1 (“Introdução” e “Perda por Escorregamento da Armadura na Ancoragem na Pré-Tensão”), o escorregamento da armadura de protensão na ancoragem composta por cunha e porta-cunha ocorre quando o cilindro hidráulico, ao alcançar a força de estiramento, “solta” a armadura¹⁵⁹ e esta movimenta-se alguns poucos milímetros em direção contrária ao alongamento aplicado. Neste movimento, arrasta a cunha para o interior do furo cônico da peça porta-cunha, até a completa fixação da armadura. Como a armadura tem o alongamento diminuído com o escorregamento, há perda de tensão (perda por encunhamento).

A diferença entre a perda na pré-tensão e na pós-tensão é que na **pré-tensão** o escorregamento ocorre antes da transferência da protensão para a peça,¹⁶⁰ e na **pós-tensão** ocorre na transferência da protensão para a peça.

Dispositivos utilizados na ancoragem de barras de protensão (ver Figura 2.25) geralmente apresentam menores escorregamentos que dispositivos de ancoragem de fios e cordoalhas (cunha e porta-cunha).^[2] Os escorregamentos devem ser fornecidos pelo fabricante.

Segundo a NBR 6118 (9.6.3.3.2.3), perdas por deslizamento da armadura na ancoragem e acomodação da ancoragem “devem ser determinadas experimentalmente ou adotados os valores indicados pelos fabricantes dos dispositivos de ancoragem.” A norma não apresenta outras informações ou dados sobre essa perda.

A Figura 5.31 mostra as forças de atrito que atuam na operação de alongamento da armadura de protensão e as forças de atrito que atuam contrariamente ao escorregamento da armadura, na pós-tensão.

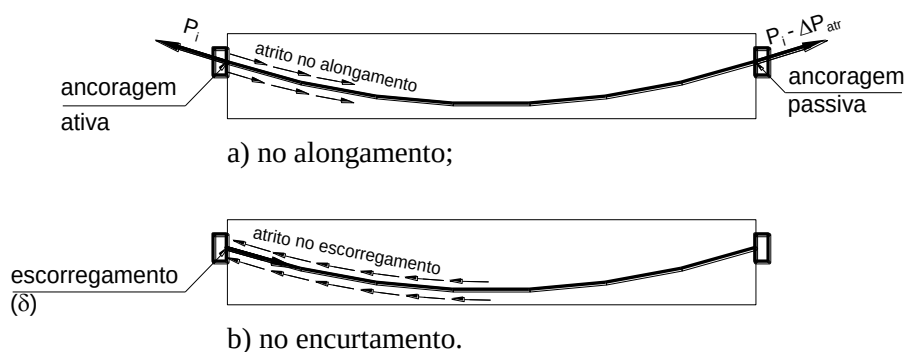


Figura 5.31 – Forças de atrito que atuam no alongamento e no escorregamento da armadura de protensão na pós-tensão.

¹⁵⁹ Armadura na forma de fio ou cordoalha.

¹⁶⁰ Isto é, na pista de protensão ocorre logo após a finalização da operação de estiramento da armadura, quando o cilindro “solta” a armadura e esta se fixa nas ancoragens. Ver item 5.5.1.

O diagrama da Figura 5.32 mostra a variação de tensão (σ_p) na armadura de protensão em uma peça **pós-tensionada**, em função da posição da seção ao longo do comprimento da peça, dada por x , que representa a distância da seção à ancoragem ativa. O diagrama considera a operação de estiramento sendo feita em apenas uma extremidade da peça ($x = 0$), e a reta **ac** representa a tensão na armadura antes do escorregamento. A tensão σ_{pi} é a tensão aplicada pelo cilindro hidráulico na armadura na ancoragem ativa, e é a maior tensão, que devido às perdas por atrito, diminui $\Delta\sigma_{p,atr}$ com o aumento da distância x .

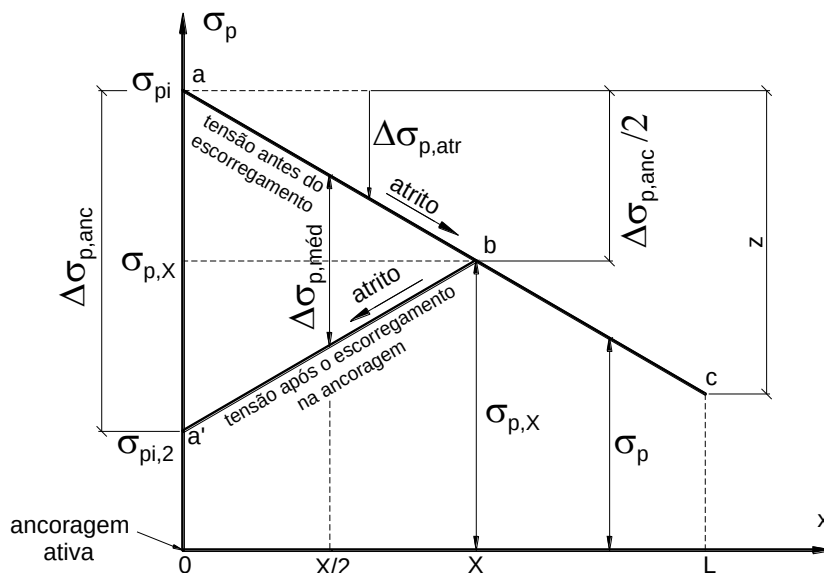


Figura 5.32 – Tensão na armadura de protensão na pós-tensão, após o escorregamento na ancoragem ativa.

Quando a armadura escorrega de uma pequeníssima medida (δ), ocorre uma queda brusca de tensão na armadura na posição do cilindro, de σ_{pi} para $\sigma_{pi,2}$, e então as forças de atrito no contato armadura/bainha atuam em sentido contrário ao escorregamento, diminuindo-o gradativamente, até que o escorregamento torna-se zero na seção distante X do cilindro hidráulico. As tensões na armadura passam então a ser representadas pelas retas **a'bc**. Nas seções com distâncias superiores a X a tensão na armadura é a mesma de antes do cilindro soltar a armadura e ocorrer o escorregamento, ou seja, devido ao atrito contrário ao escorregamento a perda de tensão na armadura ocorre somente até a distância X do cilindro, sendo indicada pela distância (paralela ao eixo de σ_p) entre as retas **ab** e **a'b**, como por exemplo o valor $\Delta\sigma_{p,méd}$ em $X/2$, mostrado na Figura 5.32.

Como as forças de atrito que atuam contrariamente ao estiramento e ao escorregamento são de mesma intensidade, os segmentos **ab** e **a'b** têm inclinações iguais e opostas, e formam um triângulo isósceles (**aa'b**). Para definir graficamente os segmentos é necessário determinar a queda de tensão na ancoragem ativa ($\Delta\sigma_{p,anc}$) e a distância X . A perda de tensão na posição do cilindro hidráulico é:¹⁶¹

$$\Delta\sigma_{p,anc} = \sigma_{pi} - \sigma_{pi,2} = 2(\sigma_{pi} - \sigma_{p,X}) = 2\Delta\sigma_{p,méd} \quad \text{Eq. 5.73}$$

onde σ_{pi} é a tensão na armadura antes do escorregamento, $\sigma_{pi,2}$ é a tensão depois do escorregamento, ambas na posição do cilindro hidráulico, $\sigma_{p,X}$ é a tensão na posição X e $\Delta\sigma_{p,méd}$ é a perda média de tensão ao longo da distância X , e:

$$\Delta\sigma_{p,méd} = \sigma_{pi} - \sigma_{p,X} = \sigma_{p,X} - \sigma_{pi,2} \quad \text{Eq. 5.74}$$

¹⁶¹ A dedução toma como base NAAMAN, A.E. *Prestressed Concrete Analysis and Design: Fundamentals*. 2nd Edition, Techno Press 3000, Ann Arbor, Michigan, 2004, 1072p.

Aplicando a Eq. 5.68 ($\sigma_p(x) = \sigma_{pi} e^{-\lambda x}$) na Eq. 5.74 e usando a expansão de Taylor, desprezando os termos de ordens superiores tem-se:

$$\begin{aligned}\Delta\sigma_{p,méd} &= \sigma_{pi} - \sigma_{p,X} = \sigma_{pi} - \sigma_{pi} e^{-\lambda X} \\ &\approx \sigma_{pi} - \sigma_{pi} (1 - \lambda X) = \sigma_{pi} \lambda X\end{aligned}\quad \text{Eq. 5.75}$$

Com o escorregamento δ na ancoragem, a armadura experimenta um encurtamento de igual valor ao longo da distância X , e corresponde a uma perda média de deformação de $\Delta\epsilon_{p,méd} = \delta/X$. Aplicando a Lei de Hooke ($\sigma_p = \epsilon_p E_p$), a perda média de tensão é:

$$\Delta\sigma_{p,méd} = \frac{\delta}{X} E_p \quad \text{Eq. 5.76}$$

Considerando a Eq. 5.73, a Eq. 5.75 e a Eq. 5.76 encontra-se a perda de tensão na armadura de protensão na posição da ancoragem ativa:

$$\Delta\sigma_{p,anc} = 2 \frac{\delta}{X} E_p = 2\sigma_{pi} \lambda X \quad \text{Eq. 5.77}$$

Da Eq. 5.77 pode ser obtido o valor de X , onde a perda de tensão por escorregamento é zero:

$$X = \sqrt{\frac{E_p \delta}{\sigma_{pi} \lambda}} \quad \text{Eq. 5.78}$$

onde X depende da tensão σ_{pi} e das características do atrito e da curvatura, representada por λ (ver Eq. 5.70), que deve ser constante sobre uma curvatura considerada, e X não deve superar o comprimento da curvatura relativa ao λ de que depende. Valores típicos de λ são apresentados na Tabela 5.6.

Em peças longas e com os cabos tendo diversas curvaturas, e consequentemente diferentes valores de λ , e quando a distância X supera o comprimento de uma curvatura, o PCI (*Precast/Prestressed Institute*),¹⁶² sugere a seguinte expressão para determinar X , com $X \leq \ell$:

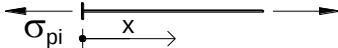
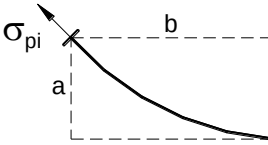
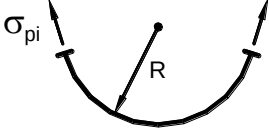
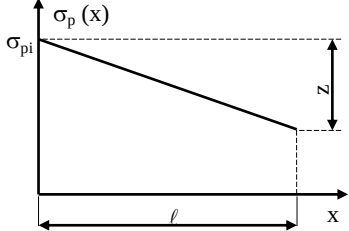
$$X = \sqrt{\frac{E_p \delta}{(z/\ell)}} \quad \text{Eq. 5.79}$$

ℓ = vão ou uma distância conhecida ao longo do cabo (considerando o estiramento feito em uma extremidade apenas);

z = perda de tensão ao longo da distância ℓ , igual a $(\sigma_{pi} - \sigma_{p,\ell})$, sendo $\sigma_{p,\ell}$ determinada com a Eq. 5.64 ou Eq. 5.68, para os vários seguimentos (retas ou curvaturas) da armadura ao longo de ℓ .

¹⁶² PCI Committee on Prestress Losses. *Recommendations for Estimating Prestress Losses*. PCI Journal, vol. 20 (4), pp.43-75, 1975, e também vol. 21 (2), 1976.

Tabela 5.6 - Valores de λ e X para perfis típicos da armadura.^[2]

Perfil	$\lambda = \frac{\mu\alpha + kx}{x}$	$X \leq \ell$
Linear 	k	$X = \sqrt{\frac{E_p \delta}{k \sigma_{pi}}}$
Parabólico 	$2 \frac{\mu a}{b^2} + k$	$X = \sqrt{\frac{E_p \delta}{\lambda \sigma_{pi}}}$
Circular 	$\frac{\mu}{R} + k$	$X = \sqrt{\frac{E_p \delta}{\lambda \sigma_{pi}}}$
Qualquer forma, ou combinação de formas (modelo aproximado sobre um comprimento ℓ) 	$(z/\ell) \frac{1}{\sigma_{pi}}$	$X = \sqrt{\frac{E_p \delta}{z/\ell}}$

onde x representa a distância da ancoragem ativa ao ponto considerado na armadura, e X a distância em que a perda de tensão por escorregamento torna-se nula.

A Eq. 5.78 e a Eq. 5.79 fornecem resultados idênticos quando existe uma mesma parábola ou arco ao longo de ℓ . O valor z/ℓ é a inclinação da linha abc quando o gráfico da Figura 5.32 é semi-log, e é uma primeira aproximação da inclinação média representante da perda de tensão do gráfico em escala aritmética.^[2]

5.6.4.1 Exemplo 1 - Perda por Escorregamento na Ancoragem na Pós-tensão

Considerando a viga **pós-tensionada** já mostrada na Figura 5.27 (repetida na Figura 5.33), e com os mesmos valores dados ($\mu = 0,20$, $k = 0,002/\text{m}$ e $\sigma_{pi} = 1.402,0 \text{ MPa}$, $\alpha(A/C) = 0,225 \text{ rad}$, e curvaturas em parábolas), calcular a perda por escorregamento na ancoragem e a distância X , com $\delta = 6 \text{ mm}$ e $E_p = 196.000 \text{ MPa}$.¹⁶³

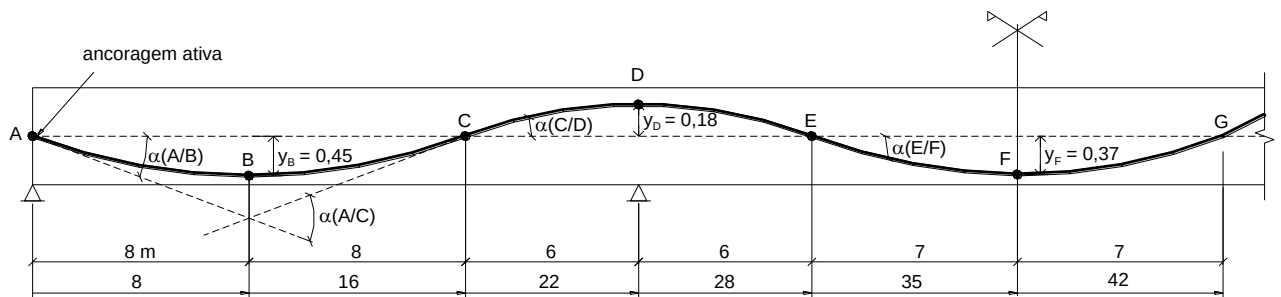


Figura 5.33 – Posicionamento da armadura de protensão ao longo da viga pós-tensionada.

¹⁶³ Ver outros exemplos numéricos no livro (p. 137 a 143) de CARVALHO, R.C. *Estruturas em Concreto Protendido – Pré-tração, Pós-tensão, Cálculo e Detalhamento*. São Paulo, Ed. Pini, 2012. 431p.

Resolução

O valor de λ para a primeira parábola (trecho AC), conforme valor da Tabela 5.6 é:

$$\lambda = 2 \frac{\mu a}{b^2} + k = 2 \frac{0,2 \cdot 0,45}{8^2} + 0,002 = 0,004813/\text{m}$$

A distância X é (Eq. 5.78):

$$X = \sqrt{\frac{E_p \delta}{\sigma_{pi} \lambda}} = \sqrt{\frac{196000 \cdot 0,006}{14020 \cdot 0,004813}} = 13,20 \text{ m}$$

e como X é menor que 16 m, ou seja, não superou o comprimento da primeira parábola (AC), o valor é válido. O valor de X também pode ser calculado com a Eq. 5.79.¹⁶⁴

A perda de protensão por escorregamento na ancoragem ativa é (Eq. 5.77):

$$\Delta\sigma_{p,anc} = 2 \frac{\delta}{X} E_p = 2 \frac{0,006}{13,20} 196.000 = 178,2 \text{ MPa} \quad \rightarrow \quad \text{perda percentual: } \frac{178,2}{14020} 100 = 12,7 \%$$

A tensão na armadura na posição da ancoragem ativa (ponto **a'** na Figura 5.34) é:

$$\sigma_{pi,2} = \sigma_{pi} - \Delta\sigma_{p,anc} = 1402,0 - 178,2 = 1.223,8 \text{ MPa}$$

A tensão na armadura de protensão na posição X é (ver Figura 5.34):

$$\sigma_p(13,20) = \sigma_{pi} - \Delta\sigma_{p,anc} / 2 = 1402,0 - 178,2 / 2 = 1.312,9 \text{ MPa}$$

A tensão na posição X também pode ser calculada por com a Eq. 5.64,¹⁶⁵ ou com a Eq. 5.68:

$$\sigma_p(x) = \sigma_{pi} e^{-\lambda x} \quad \rightarrow \quad \sigma_p(13,20) = 1402,0 e^{-0,004813 \cdot 13,20} = 1.315,7 \text{ MPa}$$

Ocorre uma pequena diferença, devida a simplificações na dedução das equações, desprezível percentualmente: $(1 - 1312,9/1315,7)100 = 0,21 \%$, sendo portanto ambos os valores válidos.

A variação de tensão na armadura está mostrada na Figura 5.34, com as tensões nos pontos *c* e *d* conforme calculados no exemplo do item 5.6.4.2. As linhas *abcd* representam as tensões na armadura antes do escorregamento na ancoragem, e as linhas *a'bcd* as tensões após o escorregamento. A maior tensão corresponde ao ponto X (1.312,9 MPa).¹⁶⁶

¹⁶⁴ A variável *z* é a diferença entre a tensão na posição do cilindro hidráulico (ancoragem ativa, ponto A – início da parábola) e a tensão no ponto C (término da primeira parábola). Portanto, é necessário obter a tensão em C (*x* = 16 m):

$$\sigma_p(x) = \sigma_{pi} e^{-\lambda x} \quad \rightarrow \quad \sigma_p(16) = 1402 e^{-0,004813 \cdot 16} = 1.298 \text{ MPa} \quad \rightarrow \quad z = \sigma_{pi} - \sigma_p(16) = 1402,0 - 1298,0 = 104,0 \text{ MPa}$$

$$X = \sqrt{\frac{E_p \delta}{(z/\ell)}} = \sqrt{\frac{196000 \cdot 0,006}{(104/16)}} = 13,45 \text{ m}, \text{ que é um valor próximo ao já calculado, de 13,20 m.}$$

¹⁶⁵ A tensão em X também pode ser calculada do seguinte modo: o valor do ângulo de desvio na parábola entre os pontos A e C é 0,225 rad, para 16 m. Em X é $[0,225 (13,20/16) = 0,1856]$, e a tensão na armadura resulta:

$$\sigma_p(13,20) = 1402 e^{-(0,2 \cdot 0,1856 + 0,002 \cdot 13,2)} = 1.315,7 \text{ MPa}$$

¹⁶⁶ O valor $\Delta\sigma_{p,anc}/2$ corresponde à perda por atrito na posição X (13,20 m), e pode ser calculado com a equação $\Delta\sigma_{p,atr}(x) = \sigma_{pi} [1 - e^{-(\mu \Sigma\alpha + kx)}]$, com $\Sigma\alpha = 0,1856$ resulta o valor 86,3 MPa, que leva a 1.315,7 MPa para a tensão em X.

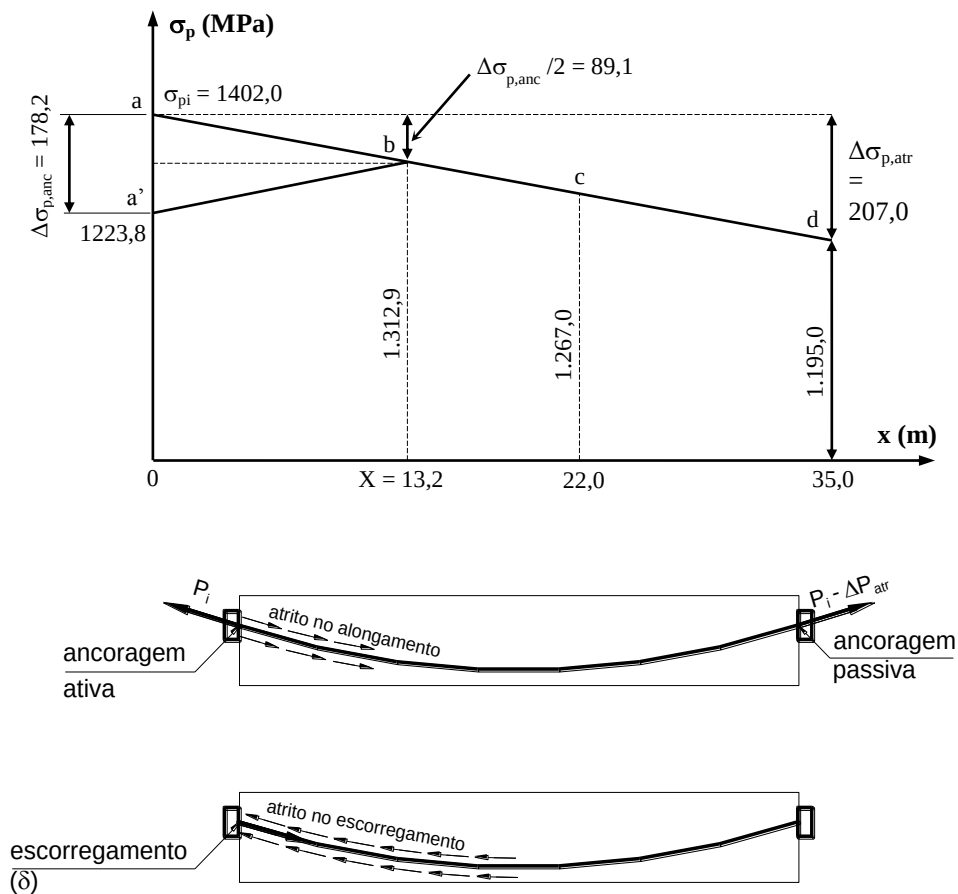


Figura 5.34 – Redução da tensão na armadura devida à perda por atrito e forças de atrito no alongamento e no escorregamento.

5.6.4.2 Exemplo 2 - Perda por Escorregamento na Ancoragem na Pós-tensão

Assumindo $\sigma_{pi} = 1.303,0$ MPa e $\delta = 5,1$ mm (0,0051 m), qual o valor de X e da perda de protensão devida ao escorregamento na ancoragem ativa? Determinar os valores das tensões na armadura de protensão nas posições X e X/2? Dados: $\mu = 0,15$, $k = 0,0025/\text{m}$, $E_p = 196.000$ MPa.

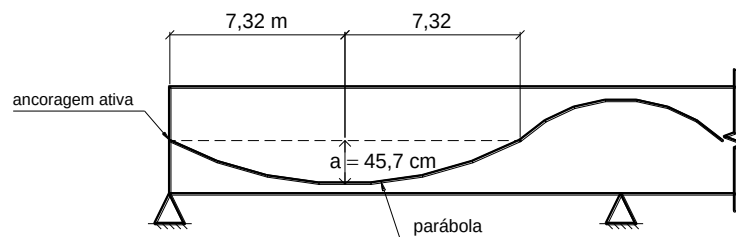


Figura 5.35 – Curvatura da armadura de protensão na viga.

Resolução

O valor de λ para a primeira parábola, conforme valor da Tabela 5.6 é:

$$\lambda = 2 \frac{\mu a}{b^2} + k = \frac{2 \cdot 0,15 \cdot 0,457}{7,32^2} + 0,0025 = 0,00506/\text{m}$$

A distância X é (Eq. 5.78):

$$X = \sqrt{\frac{E_p \delta}{\sigma_{pi} \lambda}} = \sqrt{\frac{19600 \cdot 0,0051}{130,3 \cdot 0,00506}} = 12,31 \text{ m}$$

A perda de protensão por escorregamento na ancoragem ativa é (Eq. 5.77):

$$\Delta\sigma_{p,anc} = 2E_p \frac{\delta}{X} = 2 \cdot 196000 \frac{0,0051}{12,31} = 162,4 \text{ MPa} \quad \rightarrow \quad \text{perda percentual: } \frac{162,4}{13030} 100 = 12,5 \%$$

Tensão na armadura na posição da ancoragem ativa: $\sigma_{pi,2} = \sigma_{pi} - \Delta\sigma_{p,anc} = 1303,0 - 162,4 = 1.140,6 \text{ MPa}$

Na posição X (ver Figura 5.36) a tensão na armadura é: $\sigma_p(12,31) = \sigma_{pi} - \Delta\sigma_{p,anc} / 2 = 1303,0 - 162,4/2 = 1.221,8 \text{ MPa}$, ou com a Eq. 5.68:

$$\sigma_p(x) = \sigma_{pi} e^{-\lambda x} \quad \rightarrow \quad \sigma_p(12,31) = 13030 e^{-0,00506 \cdot 12,31} = 1.224,3 \text{ MPa}$$

A variação de tensão na armadura está mostrada na Figura 5.36, e as linhas *abc* representam as tensões antes do escorregamento na ancoragem, e as linhas *dbc* as tensões após o escorregamento. A maior tensão corresponde ao ponto X (1.221,8 MPa).

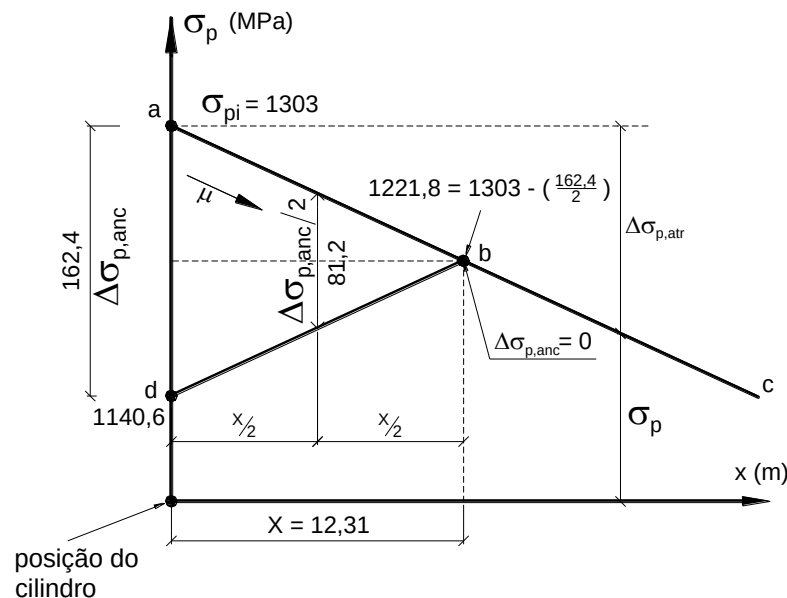


Figura 5.36 – Perda de tensão por atrito e por escorregamento na ancoragem.

5.7 Perdas Progressivas Posteriores

No item 9.6.3.4 a NBR 6118 apresenta processos simplificados que podem ser aplicados no cálculo das **perdas de protensão progressivas**, em um determinado período de tempo (de t_0 a t) ou durante toda a vida útil da peça, válidos somente para a **protensão com aderência**.¹⁶⁷ “Os valores parciais e totais das perdas progressivas de protensão, decorrentes da retração e da fluência do concreto e da relaxação do aço de protensão, devem ser determinados considerando-se a interação dessas causas, podendo ser utilizados os processos indicados em 9.6.3.4.2 a 9.6.3.4.5. **Nesses processos admite-se que exista aderência entre a armadura e o concreto e que o elemento estrutural permaneça no estágio I.**”¹⁶⁸

¹⁶⁷ Portanto, além da pré-tensão (onde é implícita a aderência) é admitida também a pós-tensão com aderência, ou seja, com preenchimento das bainhas com calda de cimento. E **não** é admitida a pós-tensão com cordoalhas engraxadas (protensão sem aderência).

¹⁶⁸ O Estádio I implica a não existência de fissuração na seção transversal da peça, de modo que o processo não é válido para a *protensão parcial*, onde é admitida a fissuração em serviço.

5.7.1 Processo Simplificado para o Caso de Fases Únicas de Operação (Item 9.6.3.4.2)

De acordo com a NBR 6118, “Esse caso é aplicável quando são satisfeitas as condições seguintes:

a) a concretagem do elemento estrutural, bem como a protensão, são executadas, cada uma delas, em fases suficientemente próximas para que se desprezem os efeitos recíprocos de uma fase sobre a outra;

b) os cabos possuem entre si afastamentos suficientemente pequenos em relação à altura da seção do elemento estrutural, de modo que seus efeitos possam ser supostos equivalentes ao de um único cabo, com seção transversal de área igual à soma das áreas das seções dos cabos componentes, situado na posição da resultante das forças neles atuantes (cabo resultante).

Nesse caso, admite-se que no tempo t as **perdas e deformações progressivas do concreto e do aço de protensão, na posição do cabo resultante**, com as tensões no concreto $\sigma_{c,pog}$ positivas para compressão e as tensões no aço σ_{po} positivas para tração, sejam dadas por:¹⁶⁹

$$\Delta\sigma_p(t; t_0) = \frac{\varepsilon_{cs}(t; t_0) E_p - \alpha_p \sigma_{c,pog} \varphi(t; t_0) - \sigma_{po} \chi(t; t_0)}{\chi_p + \chi_c \alpha_p \eta \rho_p} \quad \text{Eq. 5.80}$$

O **cabo resultante** tem área igual à soma das áreas da armadura de cada cabo existente, e situa-se na posição da resultante de força de todos os cabos. A perda de deformação no cabo resultante é:

$$\Delta\varepsilon_{pt}(t; t_0) = \frac{\sigma_{po}}{E_p} \chi(t; t_0) - \frac{\Delta\sigma_p(t; t_0)}{E_p} \chi_p \quad \text{Eq. 5.81}$$

A perda de deformação no concreto ao nível do cabo resultante é:

$$\Delta\varepsilon_{ct}(t; t_0) = \frac{\sigma_{c,pog}}{E_{ci,28}} \varphi(t; t_0) - \frac{\Delta\sigma_c(t; t_0)}{E_{ci,28}} \chi_c + |\varepsilon_{cs}(t; t_0)| \quad \text{Eq. 5.82}$$

$\sigma_{c,pog}$ = tensão no concreto adjacente ao cabo resultante, provocada pelo efeito conjunto da protensão (compressão) após todas as perdas imediatas (atrito, acomodação e encurtamento) e pelo efeito da carga permanente (tração) mobilizada no instante t_0 , sendo positiva se de compressão;

$\varepsilon_{cs}(t; t_0)$ = retração no instante t , descontada a retração ocorrida até o instante t_0 , conforme item 8.2.11 da NBR 6118;

$\Delta\sigma_c(t; t_0)$ = variação da tensão do concreto adjacente ao cabo resultante entre t_0 e t ;

$\Delta\sigma_p(t; t_0)$ = variação da tensão no aço de protensão entre t_0 e t ;

σ_{po} = tensão na armadura ativa após todas as perdas imediatas no instante t_0 e sempre positiva por ser de tração;

$\varphi(t; t_0)$ = coeficiente de fluência do concreto no instante t para protensão e carga permanente, aplicadas no instante t_0 ;

$$\chi_c = 1 + 0,5\varphi(t; t_0) \quad \text{Eq. 5.83}$$

$\psi(t; t_0)$ = coeficiente de relaxação do aço no instante t para protensão e carga permanente mobilizada no instante t_0 ;

$\chi(t; t_0)$ = coeficiente de fluência do aço:

$$\chi(t; t_0) = -\ln [1 - \psi(t; t_0)] \quad \text{Eq. 5.84}$$

¹⁶⁹ A dedução da Eq. 5.80 encontra-se em CARVALHO, R.C. *Estruturas em Concreto Protendido – Pré-tração, Pós-tensão, Cálculo e Detalhamento*. São Paulo, Editora Pini, 2012, 431p.

$$\chi_p = 1 + \chi(t; t_o) \quad \text{Eq. 5.85}$$

e_p = excentricidade do cabo resultante em relação ao baricentro da seção do concreto;

A_p = área da seção transversal do cabo resultante;

A_c = área da seção transversal do concreto;

I_c = momento central de inércia na seção do concreto;

$$\eta = 1 + e_p^2 \frac{A_c}{I_c} \quad \text{Eq. 5.86}$$

α_p = razão modular relativo à armadura ativa, com o módulo de elasticidade inicial do concreto tomado aos 28 dias:

$$\alpha_p = \frac{E_p}{E_{ci}} \quad \text{Eq. 5.87}$$

$$\alpha_p(t) = \frac{E_p}{E_{ci}(t)} \quad \text{Eq. 5.88}$$

ρ_p = taxa geométrica da armadura de protensão:

$$\rho_p = \frac{A_p}{A_c} \quad \text{Eq. 5.89}$$

“Para protensão aderente, considerar os valores locais das tensões, e, para protensão não aderente, considerar o valor médio das tensões. Os valores médios devem ser calculados entre seções definidas pelos pontos de inflexão dos cabos no caso de protensão externa ou ao longo de todo comprimento para o caso de protensão interna.”

5.7.2 Processo Aproximado (Item 9.6.3.4.3)

A NBR 6118 preconiza que: “Esse processo pode substituir o estabelecido em 9.6.3.4.2, desde que satisfeitas as mesmas condições de aplicação e que a retração não difira em mais de 25 % do valor:

$$[-8 \cdot 10^{-5} \varphi(t_\infty; t_o)] \quad \text{Eq. 5.90}$$

O valor absoluto da perda de tensão devida a fluência, retração e relaxação, com $\sigma_{c,pog}$ em megapascal e considerado positivo se for de compressão, é dado por:

a) para aços de relaxação normal (RN) (valor em porcentagem):

$$\frac{\Delta\sigma_p(t_\infty; t_o)}{\sigma_{po}} = 18,1 + \frac{\alpha_p}{47} [\varphi(t_\infty; t_o)]^{1,57} (3 + \sigma_{c,pog}) \quad \text{Eq. 5.91}$$

b) para aços de relaxação baixa (RB) (valor em porcentagem):

$$\frac{\Delta\sigma_p(t_\infty; t_o)}{\sigma_{po}} = 7,4 + \frac{\alpha_p}{18,7} [\varphi(t_\infty; t_o)]^{1,07} (3 + \sigma_{c,pog}) \quad \text{Eq. 5.92}$$

σ_{po} = tensão na armadura de protensão devida exclusivamente à força de protensão, no instante t_o .”

t_o = tempo da vida útil da peça.

5.7.3 Método Geral de Cálculo

No item 9.6.3.4.4 a NBR 6118 comenta sobre o Método Geral: “Quando as ações permanentes (carga permanente ou protensão) são aplicadas parceladamente em idades diferentes (portanto não são satisfeitas as condições estabelecidas em 9.6.3.4.2), deve ser considerada a fluência de cada uma das camadas de concreto e a relaxação de cada cabo, separadamente. Pode ser considerada a relaxação isolada de cada cabo, independentemente da aplicação posterior de outras ações permanentes.”

5.7.4 Método Simplificado do Eurocode 2

O Eurocode 2^[19] (item 5.10.6) apresenta um método simplificado semelhante ao da NBR 6118, e as perdas progressivas dependentes do tempo, devidas à **relaxação** do aço e **retração** e **fluência** do concreto, em qualquer posição x ao longo da peça submetida a carregamentos permanentes, podem ser aproximadas com a equação:¹⁷⁰

$$\Delta\sigma_{p,cc+cs+r} = \frac{\varepsilon_{cs} E_p + \alpha_p \sigma_{c,QP} \varphi(t; t_o) + 0,8\Delta\sigma_{pr}}{1 + \alpha_p \frac{A_p}{A_c} \left(1 + \frac{A_c}{I_c} e_p^2 \right) [1 + 0,8\varphi(t; t_o)]} \quad \text{Eq. 5.93}$$

$$\Delta P_{p,cc+cs+r} = A_p \Delta\sigma_{p,cc+cs+r} \quad \text{Eq. 5.94}$$

com as notações conforme a Eq. 5.80 e:

$\sigma_{p,cc+cs+r}$ = valor absoluto da variação de tensão na armadura devido à fluência, retração e relaxação, na posição x no tempo t ;

$\varepsilon_{cs}(t; t_o)$ = deformação por retração estimada, no tempo sob consideração;

α_p = razão modular (Eq. 5.87);

$\Delta\sigma_{pr}$ = valor absoluto da variação de tensão na armadura de protensão na seção x , no instante t , devida à **relaxação**, determinada para uma tensão $\sigma_p = \sigma_p (P_o + G + \psi_2 Q)$, isto é, devida à ação conjunta da força de protensão P_o e da *combinação quase permanente*;

$\varphi(t; t_o)$ = coeficiente de fluência do concreto no tempo t para cargas aplicadas em t_o ;

$\sigma_{c,QP}$ = tensão no concreto ao nível do CG da armadura de protensão, devida ao peso próprio e à força de protensão inicial (P_o) e, sempre que for relevante, a outras ações quase permanentes. O valor de $\sigma_{c,QP}$ pode resultar de parte do peso próprio e da força de protensão inicial ou da combinação de ações quase permanente considerada na sua totalidade ($\sigma_c (P_o + G + \psi_2 Q)$, consoante a fase de construção considerada, sendo positiva se de compressão;

e_p = excentricidade do cabo resultante em relação ao baricentro da seção do concreto.

Nota: “A relaxação do aço depende da deformação do concreto devida à fluência e à retração. Esta interação pode ser considerada, de forma geral e aproximada, através de um coeficiente de redução de 0,8.”

A Eq. 5.93 “aplica-se a armaduras aderentes considerando os valores locais das tensões e a armaduras não aderentes considerando os valores médios das tensões. Os valores médios devem ser calculados entre seções retas definidas pelos pontos teóricos de inflexão das armaduras no caso de protensão exterior ou calculados ao longo de todo o comprimento das armaduras no caso de protensão interior.”

¹⁷⁰ A notação está adaptada conforme a NBR 6118.

Assim como o método simplificado proposto pela NBR 6118 (Eq. 5.80), a equação do Eurocode 2 também não considera os efeitos da restrição imposta por armaduras passivas à deformação por retração e fluência do concreto.

5.7.5 Método Simplificado Alternativo

O método simplificado ora apresentado está contido na Ref. [1]. Em uma peça contendo armaduras aderentes ao concreto (passivas e ativas), a mudança de deformação devido à **retração** do concreto, na posição do centro de gravidade da armadura de protensão, pode ser determinada de modo aproximado por:

$$\Delta \varepsilon_{p,cs} = \frac{\varepsilon_{cs}}{1 + \bar{\alpha}_{ep,k} \rho_{ps} \left[1 + \frac{A_c e_p e_s}{I_c} \right]} \quad \text{Eq. 5.95}$$

$\varepsilon_{cs} = \varepsilon_{cs}(t; t_0)$ = deformação por retração do concreto;

e_s = excentricidade das armaduras aderentes (passivas e ativas) relativamente ao CG da seção transversal;

$\rho_{ps} = \frac{A_s + A_p}{A_c}$ = taxa relativa às armaduras aderentes ($A_s + A_p$);

$\bar{\alpha}_{ep,k} = E_p / \bar{E}_{c,ef} =$ **razão modular ajustada com a idade do concreto**, sendo $\bar{E}_{c,ef}(t; t_0)$ o **módulo de elasticidade efetivo do concreto ajustado com a idade**, apresentado na Eq. 2.29.

A mudança ou perda de tensão na armadura de protensão causada pela mudança de deformação devida à **retração** do concreto é:

$$\Delta \sigma_{p,cs} = \frac{\varepsilon_{cs} E_p}{1 + \bar{\alpha}_{ep,k} \rho_{ps} \left[1 + \frac{A_c e_p e_s}{I_c} \right]} \quad \text{Eq. 5.96}$$

A deformação por **fluência** do concreto depende da história da tensão aplicada no concreto ao nível do CG da armadura de protensão, de forma que o cálculo mais realista deve considerar a variação de tensão experimentada pelo concreto ao longo do tempo. Um procedimento aproximado e ainda conservador para a estimativa da perda de protensão por fluência pode ser feito assumindo que a tensão no concreto ao nível do CG da armadura permanece constante com o tempo e igual à tensão $\sigma_{c,pog}$, que é aquela devida à força de protensão P_0 (força de protensão antes da ocorrência das perdas de protensão progressivas) e aos carregamentos que atuam de modo constante ao longo do tempo considerado (a combinação quase permanente). Sob esta tensão mantida constante, a **deformação por fluência** (ε_{cc}) que se desenvolve no concreto é $[(\sigma_{c,pog} / E_c) \cdot \varphi(t; t_0)]$, (ver Eq. 2.25), onde o primeiro termo é a deformação elástica imediata. A mudança de tensão na armadura de protensão devida à **fluência** do concreto pode ser aproximada por:

$$\Delta \sigma_{p,cc} = \frac{E_p \varphi(t, t_0) \frac{\sigma_{c,pog}}{E_c}}{1 + \bar{\alpha}_{ep,k} \rho_{ps} \left[1 + \frac{A_c e_p e_s}{I_c} \right]} \quad \text{Eq. 5.97}$$

A perda de protensão na armadura devida à **relaxação** depende da tensão que atua na armadura ao longo do tempo. Como a **retração** e a **fluência** do concreto diminuem a tensão na armadura de protensão, a diminuição da tensão na armadura com o passar do tempo ocorre de uma maneira mais

rápida do que se considerasse apenas a relaxação do aço, como em um ensaio de relaxação por exemplo. A mudança de tensão na armadura de protensão devida à **relaxação** pode ser aproximada por:

$$\Delta\sigma_{pr} = - \left(1 - \frac{|\Delta\sigma_{p,cs} + \Delta\sigma_{p,cc}|}{\sigma_{po}} \right) \varphi_p(t; \sigma_{pi}) \sigma_{po} \quad \text{Eq. 5.98}$$

com $\Delta\sigma_{p,cs}$ e $\Delta\sigma_{p,cc}$ calculadas com a Eq. 5.96 e a Eq. 5.97 e aplicadas com valor absoluto, σ_{po} (P_o/A_p) é a tensão na armadura de protensão após a transferência da protensão e quando geralmente já atua o peso próprio da peça (e outros carregamentos que porventura possam também atuar). E $\varphi_p(t; \sigma_{pi})$ é o **coeficiente de fluência do aço** de protensão:

$$\varphi_p(t; \sigma_{pi}) = \frac{-\Delta\sigma_{pr}}{\sigma_{pi}} \quad \text{Eq. 5.99}$$

6. ANÁLISE DA RESISTÊNCIA ÚLTIMA À FLEXÃO

No projeto de uma estrutura ou elemento estrutural, o objetivo mais importante é o de que a estrutura apresente a necessária resistência diante das ações e carregamentos a que estará submetida durante toda a vida útil. A satisfação das tensões limites (tensões admissíveis) no concreto e no aço no Estado-Limite de Serviço não garante às peças fletidas a resistência necessária, e também não possibilita determinar a resistência real da peça, ou o fator de segurança contra a ruína. É com a determinação da capacidade última da peça, geralmente feita com o cálculo do momento fletor último (ou máximo) que a peça pode resistir, que se pode garantir a margem de segurança entre os carregamentos de serviço e o carregamento último (máximo).

No cálculo do momento fletor último (M_{Rd}), os procedimentos aplicados às peças fletidas de CP são semelhantes àqueles aplicados nas peças de Concreto Armado, com a diferença de que no CP a armadura de protensão possui um alongamento prévio, que é aquele provocado na operação de estiramento.

6.1 Tipos de Ruptura por Flexão

A Figura 6.1 mostra o diagrama *tensão x deformação* do aço de protensão, com os valores de tensão (ou resistência) que são significativos no trabalho do aço em uma peça protendida, onde:

- σ_{pu} = resistência última à tração, ou resistência mínima à tração que o aço deve apresentar; correspondente à deformação última ϵ_{pu} ;
- σ_{ps} = tensão na armadura de protensão no instante da ruptura à flexão; correspondente à deformação na ruptura ϵ_{ps} ;
- σ_{py} = resistência de início de escoamento; correspondente à deformação de início de escoamento ϵ_{py} ;
- $\sigma_{p\infty}$ = tensão devida à força de protensão efetiva ou final (P_{∞}) após todas as perdas de protensão; correspondente à deformação $\epsilon_{p\infty}$.

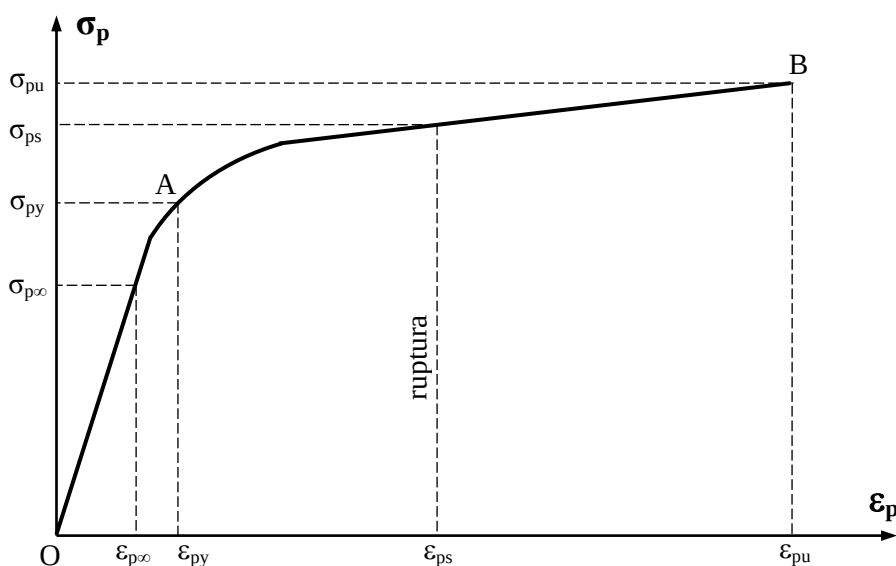


Figura 6.1 – Diagrama $\sigma \times \epsilon$ real do aço de protensão.^[10]

As peças fletidas de Concreto Protendido, como as vigas, semelhantemente às vigas de Concreto Armado, apresentam basicamente dois modos de ruptura por efeito de flexão. No caso de viga *subarmada*, a ruptura é iniciada pelo escoamento da armadura tracionada, e o alongamento pelo qual

passa a armadura provoca o aumento da abertura das fissuras, bem como seu prolongamento em direção à linha neutra. A área comprimida de concreto diminui, e consequentemente ocorre um aumento da tensão de compressão no concreto, que pode originar o esmagamento e ruptura do concreto, se antes não tiver ocorrido a ruptura da armadura em processo de escoamento. A tensão na armadura de protensão no instante da ruptura estará situada entre os pontos A e B do diagrama da Figura 6.1. Antes da ruptura a viga apresentará flecha elevada e fissuras muito abertas e visíveis, o que é importante para a questão da segurança (Figura 6.2).^[10]

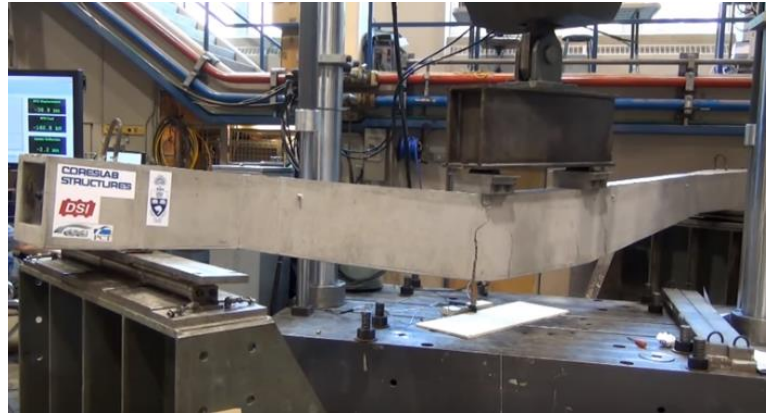


Figura 6.2 – Viga protendida em ensaio de flexão com grandes fissuras de flexão com carregamento próximo à carga última. (Fonte: www.youtube.com/watch?v=6ycbDCnoO8M)

No caso de viga protendida *superarmada*, a ruptura ocorre pelo esmagamento do concreto comprimido, com deformação de encurtamento entre 3 e 4 %, e a armadura apresenta ainda a deformação abaixo da tensão de escoamento, entre os pontos O e A do diagrama $\sigma \times \epsilon$ da Figura 6.1, com a linha neutra direcionando-se para baixo, devido ao comportamento não linear do concreto. Este modo de ruptura é perigoso e deve ser evitado na fase de projeto da viga.

A Figura 6.3 mostra o diagrama *carga x flecha* de vigas com quantidades crescentes de armadura de protensão: a) menor que a mínima; b) com armadura que alcança o escoamento na ruptura (peça subarmada); c) com armadura que na ruptura **não** alcança o escoamento (peça superarmada).^[2]

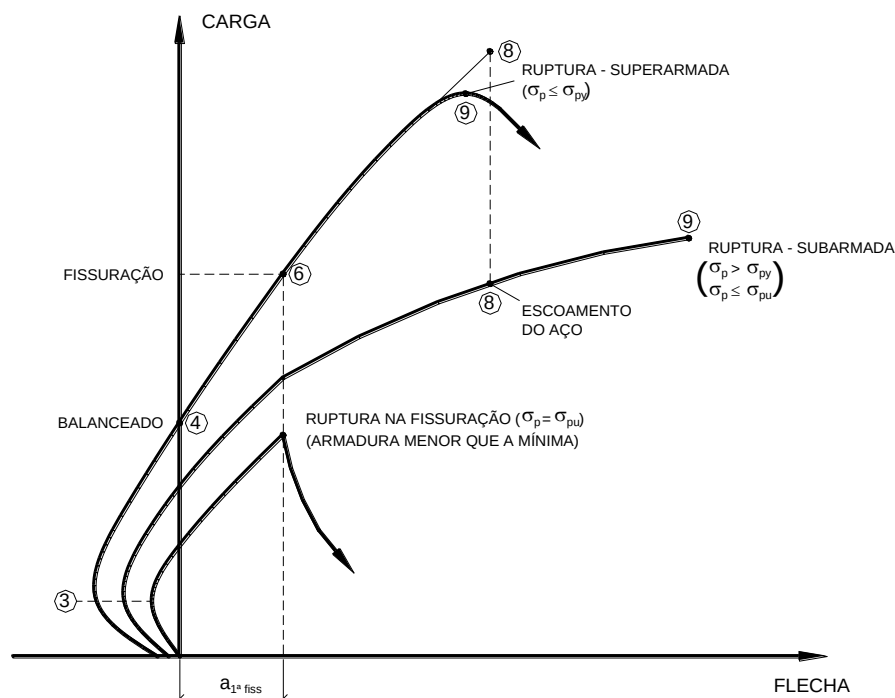


Figura 6.3 – Diagramas carga x flecha de vigas protendidas com armadura de protensão crescente.^[2]

6.2 Relação Carga x Flecha

A Figura 6.4 mostra o diagrama *carga x flecha* de duas vigas com quantidades iguais de armadura de protensão, com a diferença de que em uma existe aderência entre o concreto e a armadura,¹⁷¹ e na outra não. A viga com protensão sem aderência apresenta a ruptura com carga menor, representada pelo ponto 9, e muito comumente a armadura não alcança a tensão de escoamento (f_{pyd}), porque sem aderência e sob o efeito do carregamento, a armadura escorrega de maneira uniforme dentro da bainha, e o aumento na deformação da armadura é um valor médio, relativo ao comprimento da armadura entre as ancoragens, e assim é muito menor do que o aumento da deformação na armadura com aderência, tomada na seção de momento fletor máximo. Na ruptura a tensão na armadura de protensão sem aderência é significativamente menor que a tensão da armadura aderente ao concreto, e a deformação final na armadura é mais difícil de ser determinada precisamente. A resistência à flexão de uma seção com protensão sem aderência pode ser apenas 75 % da resistência da seção com protensão com aderência, de modo que a protensão com aderência é melhor sob o aspecto da resistência à flexão.^[1,2,5]

Em peças sem armaduras aderentes pode ser um problema o controle da fissuração, pois na protensão sem aderência as fissuras de flexão ocorrem em número menor, porém, as fissuras são mais abertas. Para controlar a fissuração, isto é, manter as fissuras com aberturas aceitáveis, a recomendação é de reforçar a peça com armadura passiva, o que também proporciona uma melhor ductilidade e o aumento da capacidade resistente à flexão.^[5] Nota: rever o item 4.4 (*Comportamento de Vigas na Flexão*).

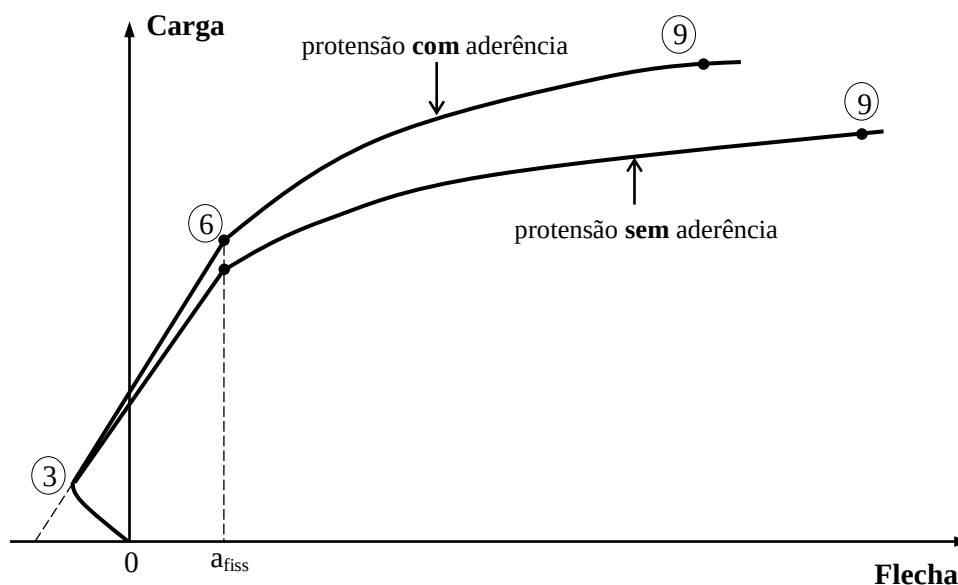


Figura 6.4 – Efeito da protensão **com** e **sem** aderência sobre a curva carga x flecha.^[2]

6.3 Tensões e Deformações em Diferentes Estágios do Carregamento

A Figura 6.5 mostra os diagramas de deformação e tensão em uma peça de Concreto Protendido sob flexão, composta por armaduras passivas tracionada (A_s) e comprimida (A'_s) e armadura ativa (A_p) **aderente ao concreto**, submetida a quatro diferentes valores de momento fletor positivo, desde um carregamento inicial zero até aquele que causa a ruptura da peça.^{[1]172}

¹⁷¹ A **aderência** entre o concreto e a armadura de protensão existe na **pré-tensão**, quando é chamada **inicial**, geralmente na fabricação de peças em pistas de protensão, onde o concreto é lançado e envolve a armadura previamente estirada. A aderência também ocorre na **pós-tensão** quando a bainha é preenchida com calda de cimento, sendo chamada **aderência posterior**. A aderência não vai existir, por exemplo, na **pós-tensão** com **cordoalha engraxada** e se a bainha não for preenchida com calda de cimento, o que configura uma situação pouco comum na prática.

¹⁷² O carregamento que causa a ruptura da peça é também chamado *carga última*.

O aumento do momento fletor faz com que a linha neutra se eleve em direção à fibra mais comprimida, e para momentos fletores elevados o comportamento dos materiais pode alterar-se do linear para o não linear, isto é, o aço da armadura passiva tracionada pode escoar, o que ocorre quando a deformação ε_s excede à deformação de início de escoamento ε_{yd} (f_{yd} / E_s – ver Figura 6.6a), a armadura de protensão pode escoar quando a deformação $\varepsilon_{p,últ}$ excede ε_{pyd} (ver Figura 6.6b). No caso do concreto comprimido o comportamento pode tornar-se não linear quando a tensão na fibra extrema excede $0,5f_{ck}$, e a armadura passiva comprimida pode escoar se ε'_s superar ε_{yd} .

O momento fletor M_o é aquele que elimina a tensão de compressão na base, ou seja, que descomprime a seção (estado de descompressão). O momento fletor de fissuração (M_{fiss}) é o que ocasiona uma primeira fissura na borda inferior da seção; o momento fletor $M_{pós-fiss}$ representa as situações após a ocorrência da primeira fissura, com diagrama linear de distribuição de tensões de compressão no concreto, e o momento fletor último (M_R) é aquele que leva a seção à ruptura, quando o diagrama de tensões de compressão no concreto deixa de apresentar linearidade.

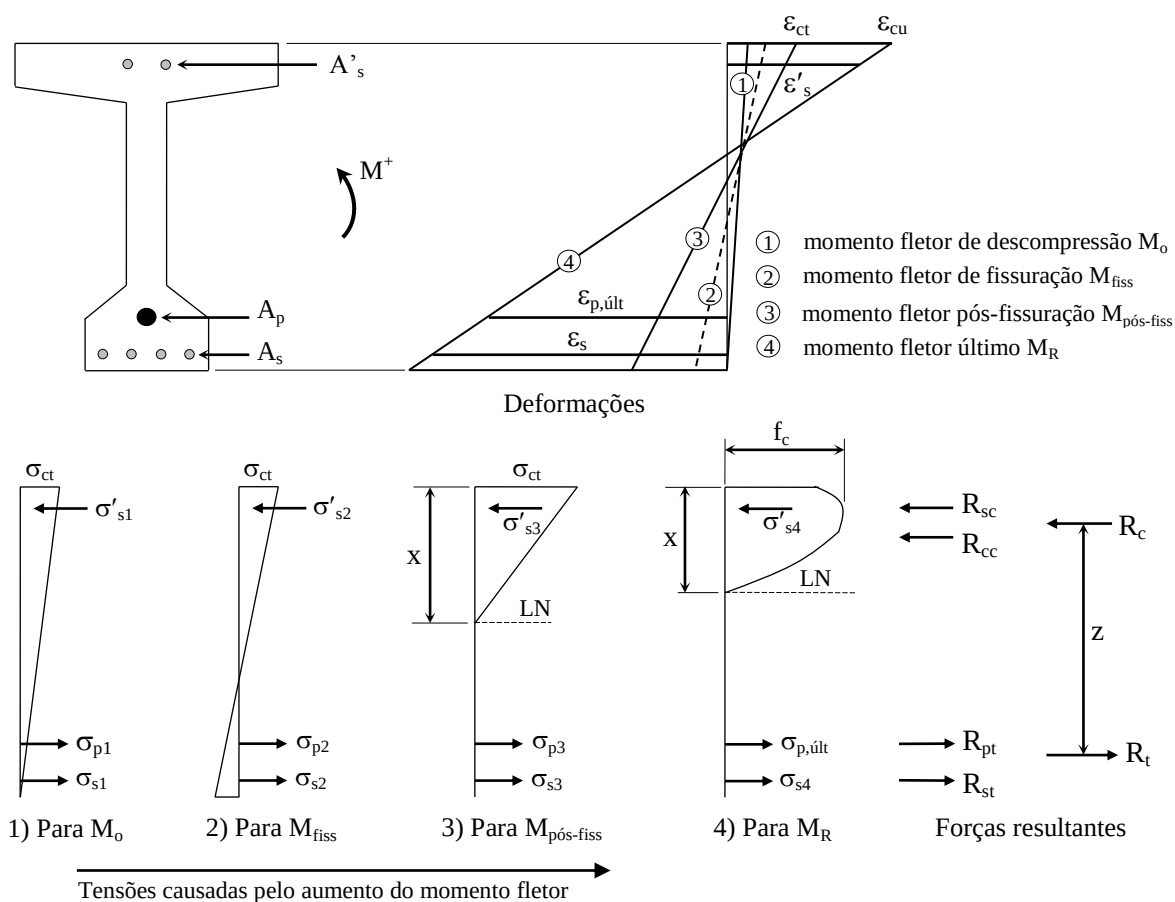


Figura 6.5 – Diagramas de deformação e de tensão em viga sob diferentes estágios do carregamento externo.^[1]

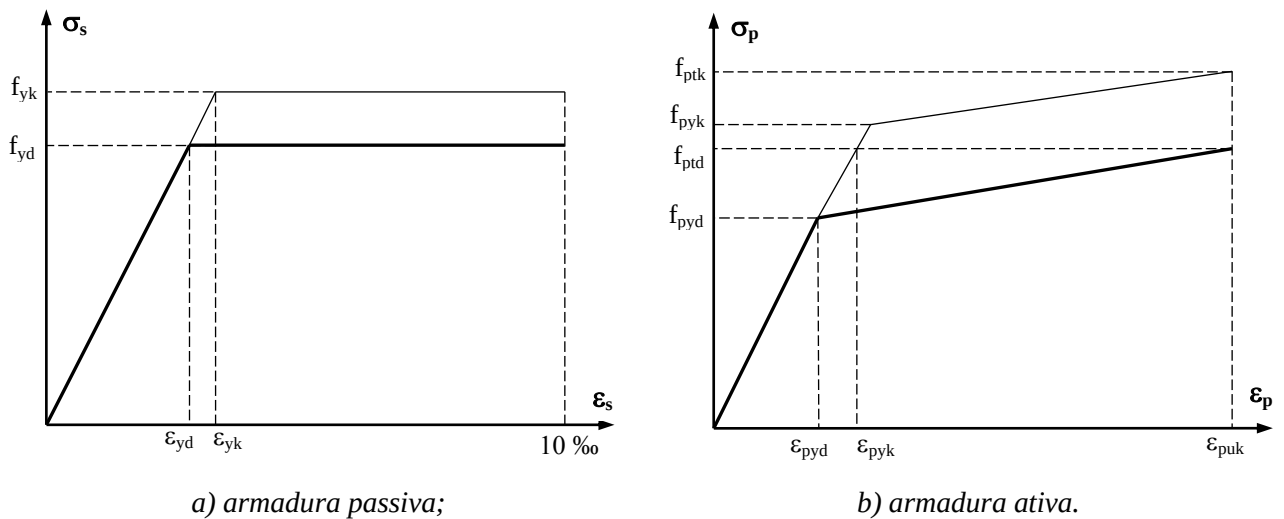


Figura 6.6 – Diagrama $\sigma \times \varepsilon$ dos aços para armadura passiva e ativa.

6.4 Deformações na Armadura de Protensão Aderente ao Concreto

Nas peças fletidas de Concreto Armado a **deformação** na armadura e no concreto ao nível da armadura é igual, para qualquer estágio do carregamento. Nas peças de Concreto Protendido, porém, isso não ocorre porque o aço de protensão tem um **pré-alongamento inicial**, proveniente da força de estiramento, como mostrado na Figura 6.7. De tal forma que a deformação na armadura de protensão, em qualquer estágio do carregamento, é igual ao pré-alongamento somado à mudança de deformação no concreto ao nível da armadura de protensão, provocada pelo carregamento externo aplicado na peça. Isso fica demonstrado nos diagramas de deformações da Figura 6.7, para três estágios do carregamento, representados pelas retas (a), (b) e (c), com o carregamento suposto iniciado em zero e terminado no instante de ruptura da peça.^[1] O carregamento aplica momentos fletores positivos na viga, que ocasionam deformações de alongamento no concreto e na armadura de protensão posicionados abaixo da linha neutra (LN), e deformações de encurtamento no concreto da região acima da linha neutra. Como é suposto existir **aderência** entre o concreto e a armadura de protensão, qualquer carregamento que atua na peça provoca deformação na armadura igual à do concreto ao nível dessa armadura, e qualquer mudança de deformação ocorre simultaneamente e igualmente nos dois materiais. À deformação de alongamento na armadura, causada pelo carregamento externo, deve ser somada a deformação de **pré-alongamento** (composta pelas parcelas $\varepsilon_{cd,enc}$ e $\varepsilon_{pd,inic}$).

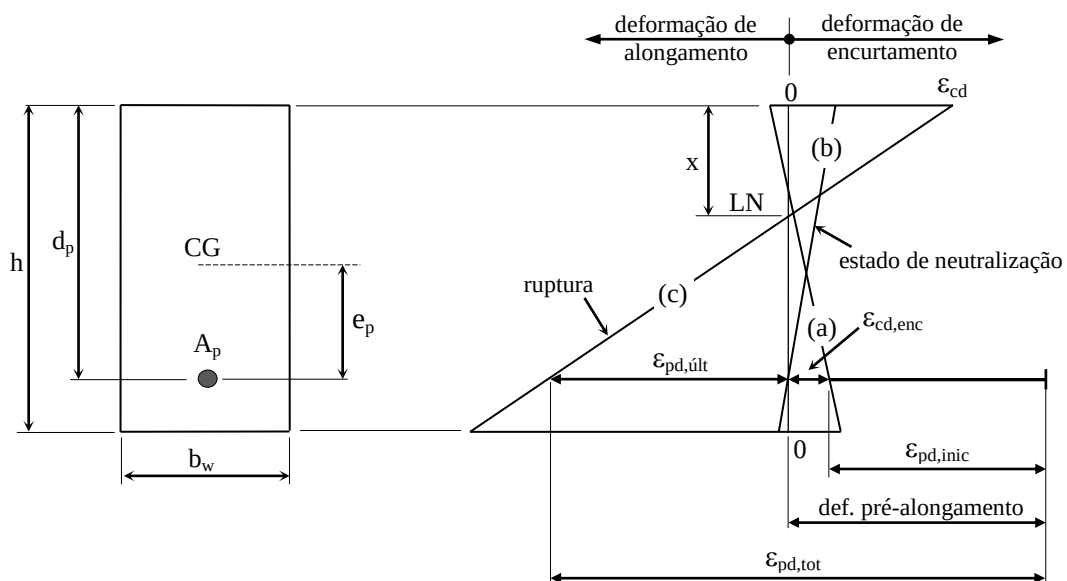


Figura 6.7 – Deformações na armadura de protensão com aderência ao concreto, em viga protendida para diferentes estágios do carregamento.^[1]

A reta (a) corresponde ao instante da transferência de uma força de protensão efetiva (P_d) para a peça, que provoca o encurtamento elástico imediato do concreto ($\varepsilon_{cd,enc}$), suposto ocorrer quando ainda não existe momento fletor atuando na peça, inclusive aquele devido ao peso próprio. A deformação $\varepsilon_{cd,enc}$ no concreto ao nível do CG da armadura de protensão é:

$$\varepsilon_{cd,enc} = \frac{\sigma_{cpd}}{E_c} = \frac{1}{E_c} \left(\frac{P_d}{A_c} + \frac{P_d e_p^2}{I_c} \right) \quad \text{Eq. 6.1}$$

σ_{cpd} = tensão no concreto ao nível do CG da armadura de protensão devida à força P_d .

No estágio da reta (a) o aço de protensão encontra-se ainda no regime elástico, com tensão e deformação:

$$\sigma_{pd} = \frac{P_d}{A_p} \quad \text{Eq. 6.2}$$

$$\varepsilon_{pd,inic} = \frac{\sigma_{pd}}{E_p} = \frac{P_d}{E_p A_p} \quad \text{Eq. 6.3}$$

A deformação da seção no estágio (b) ocorre quando é aplicado na peça um momento fletor capaz de descomprimir o concreto ao nível da armadura de protensão, desde que devido à aderência entre o concreto e o aço, qualquer mudança de deformação no aço de protensão é igual à mudança de deformação do concreto ao nível do aço. Portanto, a deformação da armadura de protensão no estágio (b) é a de **pré-alongamento**, e igual à soma da deformação $\varepsilon_{cd,enc}$ com a deformação no estágio (a), $\varepsilon_{pd,inic}$ (Eq. 6.3).

A reta do estágio (c) corresponde à situação da carga última (máxima) que a peça pode resistir, quando o momento fletor último (M_{Rd}) atua. Devido à aderência entre o concreto e o aço da armadura de protensão, a deformação na armadura e no concreto ao nível da armadura é:

$$\varepsilon_{pd,últ} = \varepsilon_{cd} \frac{d_p - x}{x} \quad \text{Eq. 6.4}$$

Assim, a deformação total na armadura de protensão, na situação do momento fletor último, é:

$$\varepsilon_{pd,tot} = \varepsilon_{pd,inic} + \varepsilon_{cd,enc} + \varepsilon_{pd,últ} \quad \text{Eq. 6.5}$$

No Estado-Limite Último a deformação de alongamento da armadura de protensão ($\varepsilon_{pd,últ}$), provocada pelo momento fletor último, é limitada ao valor convencional 10 ‰, e a deformação de encurtamento no concreto (ε_{cd}) é limitada a 3,5 ‰ para os concretos do Grupo I de resistência, e conforme o valor da Eq. 2.18 para os concretos do Grupo II.

A deformação total $\varepsilon_{pd,tot}$ pode ser determinada conhecendo-se a posição x da linha neutra na situação última e a deformação de encurtamento na fibra mais comprimida (ε_{cd}). Com $\varepsilon_{pd,tot}$ conhecida então a tensão na armadura de protensão (σ_{pd}) correspondente à situação última pode ser determinada conforme o diagrama $\sigma \times \varepsilon$ do aço de protensão. Com esses valores determinados, o momento fletor último (M_{Rd}) pode ser calculado.

A NBR 6118 (17.2.4.2.1) apresenta: “A consideração das armaduras ativas nos esforços resistentes deve ser feita a partir dos diagramas tensão-deformação especificados em 8.4.5 e da consideração dos pré-alongamentos delas. Esses pré-alongamentos devem ser calculados com base nas tensões iniciais de protensão com valores de cálculo (ver 11.7.1) e com a consideração de perdas na idade t em exame (ver 9.6.3).” Se a idade t em exame for aquela do final da vida útil da peça, deve considerar a perda progressiva total, e a força de protensão é a final (P_∞). Na verificação

no Estado-Limite Último o valor de cálculo da força de protensão P_d é considerado com o coeficiente de ponderação γ_p :

$$P_d = \gamma_p \cdot P_\infty \quad \text{Eq. 6.6}$$

com $\gamma_p = 0,9$ para *efeito favorável* e $\gamma_p = 1,2$ para *efeito desfavorável*.

6.5 Domínios de Deformação

Na Figura 3.4 foram mostrados todos os possíveis domínios de deformação de elementos em forma de barra, submetidos à força normal e momento fletor. No caso das peças fletidas protendidas os domínios possíveis são o 2, 3 e 4, e as possíveis formas de ruptura convencional podem ocorrer por deformação plástica da armadura sob tensões de tração (domínio 2), ou pelo encurtamento limite do concreto (domínios 3 e 4), Figura 6.8.¹⁷³

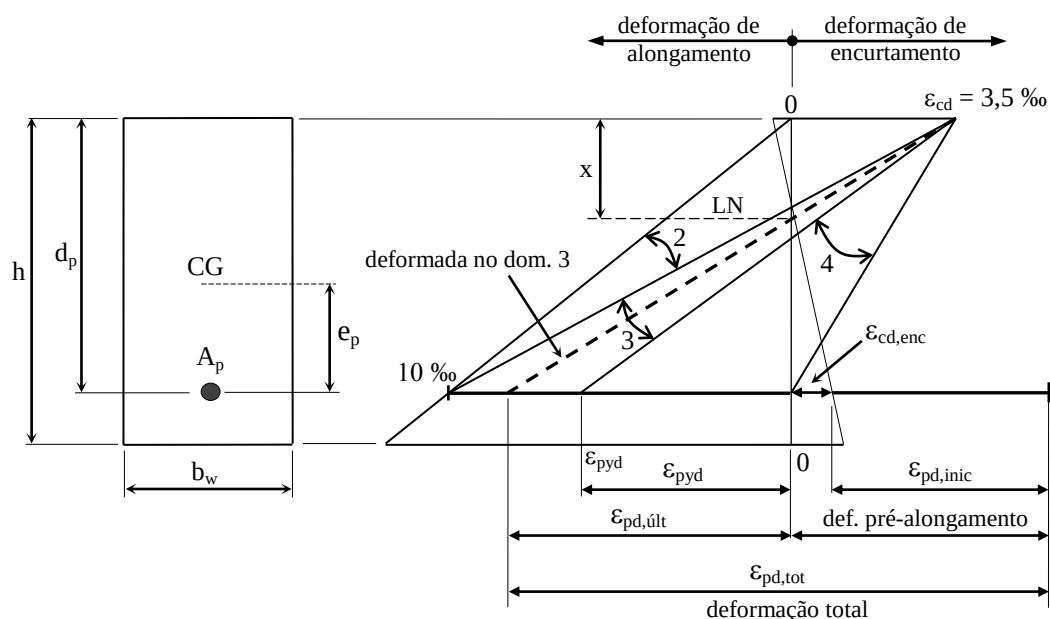


Figura 6.8 – Domínios de deformação possíveis para peças fletidas protendidas, para concretos do Grupo I ($f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$ e $\epsilon_{cd} \leq 3,5 \text{ ‰}$).

Após determinada a deformação $\epsilon_{pd,ult}$ pode-se definir o domínio da peça na ruptura, fazendo-se a comparação com os valores ϵ_{pyd} e 10 ‰, tal que:

Domínio		
2	3	4
$\epsilon_{pd,ult} > 10 \text{ ‰}$	$\epsilon_{pyd} < \epsilon_{pd,ult} < 10 \text{ ‰}$	$0 < \epsilon_{pd,ult} < \epsilon_{pyd}$

A deformação de pré-alongamento ($\epsilon_{cd,enc} + \epsilon_{pd,inic}$) atinge valor comumente entre 5 e 7 ‰, e a deformação de início de escoamento ϵ_{pyd} (f_{pyd} / E_p) entre 5 e 8 ‰. De modo que a deformação total na armadura de protensão ($\epsilon_{pd,tot}$) geralmente supera a deformação ϵ_{pyd} , o que resulta na armadura de protensão alcançar o escoamento na situação última.

¹⁷³ A notação ϵ_{yd} para armadura passiva é substituída por ϵ_{pyd} para armadura ativa. A deformação de 3,5 ‰ na fibra comprimida é válida para concretos do Grupo I de resistência ($f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$).

6.6 Determinação do Momento Fletor Último

Para o cálculo do momento fletor último (M_{Rd}) devem ser consideradas as hipóteses básicas admitidas também para o Concreto Armado, como os domínios de cálculo, equações de equilíbrio de forças e de momentos fletores e compatibilidade de deformações.

A determinação do momento fletor último tem também a finalidade de mostrar se há a necessidade de acrescentar armaduras passivas, para aumentar a segurança no ELU. O cálculo é geralmente feito por tentativas, arbitrando-se a tensão na armadura de protensão ($\sigma_{pd,arb}$) ou a posição x da linha neutra. A solução é encontrada quando há equilíbrio entre as forças de compressão e de tração.

Na sequência são apresentadas as formulações para o cálculo de momento fletor último de seções retangulares e T, para os concretos do Grupo I de resistência (C20 ao C50, $f_{ck} \leq 50$ MPa). Para concretos do Grupo II de resistência (C55 ao C90) são necessárias modificações em alguns parâmetros, não apresentadas neste texto.¹⁷⁴

6.6.1 Seção Retangular

Considere a viga de seção retangular mostrada na Figura 6.9, composta por armadura de protensão (A_p) e armaduras passivas, tracionada (A_s) e comprimida (A'_s).

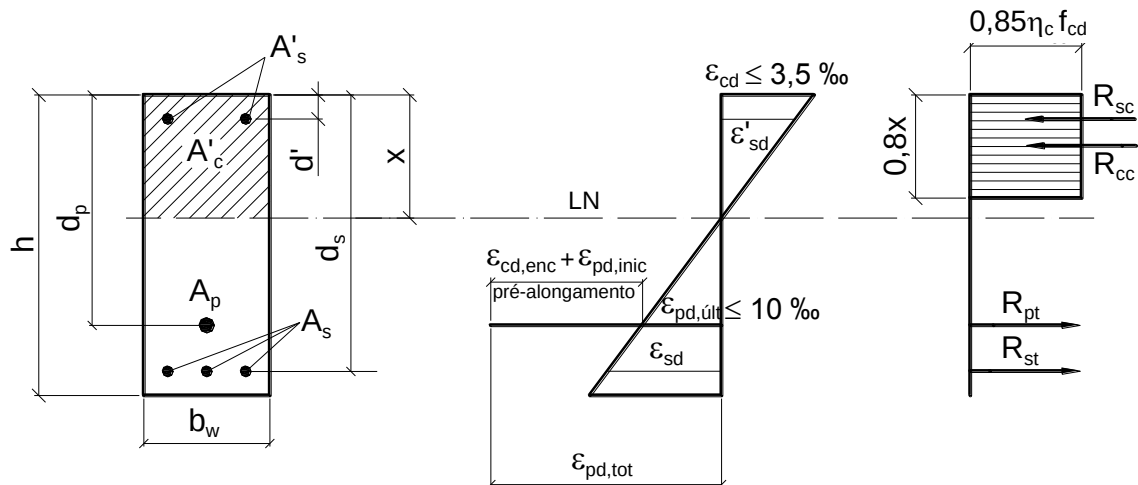


Figura 6.9 – Tensões e deformações no ELU em seção retangular protendida com aderência entre o concreto e as armaduras, para concretos do Grupo I de resistência ($f_{ck} \leq 50$ MPa).

Equilíbrio de forças resultantes:

$$R_{cc} + R_{sc} = R_{pt} + R_{st} \quad \text{Eq. 6.7}$$

As forças resultantes no concreto comprimido e nas armaduras são:

$$R_{cc} = \sigma_{cd} A'_c = 0,85\eta_c f_{cd} 0,8x b_w$$

$$R_{sc} = \sigma'_{sd} A'_s \quad ; \quad R_{pt} = \sigma_{pd} A_p \quad ; \quad R_{st} = \sigma_{sd} A_s$$

com σ_{pd} = tensão de cálculo na armadura de protensão. Substituindo as equações das forças resultantes na Eq. 6.7 tem-se:

¹⁷⁴ A altura do diagrama retangular simplificado ($y = 0,8x$) e a deformação de encurtamento no concreto ($\epsilon_{cd} = 3,5 \text{ ‰}$) são válidos para os concretos do Grupo I de resistência ($f_{ck} \leq 50$ MPa). A tensão de compressão no concreto ($\sigma_{cd} = 0,85\eta_c f_{cd}$) depende do valor de η_c , sendo $\eta_c = 1,0$ para concretos com $f_{ck} \leq 40$ MPa.

$$0,85\eta_c f_{cd} 0,8x b_w + \sigma'_{sd} A'_s = \sigma_{pd} A_p + \sigma_{sd} A_s$$

E isolando x a posição da linha neutra pode ser determinada:

$$x = \frac{\sigma_{pd} A_p + \sigma_{sd} A_s - \sigma'_{sd} A'_s}{0,85\eta_c f_{cd} 0,8 b_w} \quad \text{Eq. 6.8}$$

Fazendo a somatória de momentos fletores sobre a resultante R_{cc} do concreto tem-se o momento fletor último:

$$M_{Rd} = \sigma_{pd} A_p (d_p - 0,4x) + \sigma_{sd} A_s (d_s - 0,4x) + \sigma'_{sd} A'_s (0,4x - d') \quad \text{Eq. 6.9}$$

Supondo que as armaduras passivas A_s e A'_s tenham escoado quando o momento fletor último foi alcançado, as tensões genéricas σ_{sd} e σ'_{sd} nas armaduras passivas podem ser substituídas respectivamente por f_{yd} (f_{yk} / γ_s) e f'_{yd} (f'_{yk} / γ_s).¹⁷⁵ A posição x e o momento fletor último passam a ser:

$$x = \frac{\sigma_{pd} A_p + f_{yd} A_s - f'_{yd} A'_s}{0,85\eta_c f_{cd} 0,8 b_w} \quad \text{Eq. 6.10}$$

$$M_{Rd} = \sigma_{pd} A_p (d_p - 0,4x) + f_{yd} A_s (d_s - 0,4x) + f'_{yd} A'_s (0,4x - d') \quad \text{Eq. 6.11}$$

Da compatibilidade de deformações conforme o diagrama da Figura 6.9 tem-se:

$$\frac{\epsilon_{cd}}{\epsilon_{pd, \text{últ}}} = \frac{x}{d_p - x} \quad \text{Eq. 6.12}$$

$$\frac{\epsilon_{cd}}{\epsilon_{sd}} = \frac{x}{d_s - x} \quad \text{Eq. 6.13}$$

$$\frac{\epsilon_{cd}}{\epsilon'_{sd}} = \frac{x}{x - d'} \quad \text{Eq. 6.14}$$

A condição de segurança estará satisfeita quando $M_{Rd} \geq M_{Sd}$, com M_{Sd} sendo o momento fletor solicitante de cálculo.

6.6.2 Seção T

Considere a viga seção T mostrada na Figura 6.10, composta por armadura de protensão (A_p) e armadura passiva tracionada (A_s).¹⁷⁶ No cálculo do momento fletor último, inicialmente supõe-se a seção T como uma seção retangular de largura b_f . Se resultar $0,8x \leq h_f$, então a suposição inicial é verdadeira e o cálculo de M_{Rd} é imediato, com as fórmulas desenvolvidas para a seção retangular. Se resultar $0,8x > h_f$, a linha neutra passa na nervura e um novo equacionamento é necessário, como descrito a seguir.

Equilíbrio de forças resultantes:

$$R_{cc, \text{mes}} + R_{cc, \text{nerv}} = R_{pt} + R_{st} \quad \text{Eq. 6.15}$$

¹⁷⁵ As tensões f_{yk} e f'_{yk} podem ser consideradas iguais.

¹⁷⁶ A formulação para a seção T é válida também para a seção I.

As forças resultantes no concreto comprimido são:¹⁷⁷

$$R_{cc,mes} = 0,85\eta_c f_{cd} (b_f - b_w) h_f \quad ; \quad R_{cc,nerv} = 0,85\eta_c f_{cd} 0,8x b_w$$

$R_{cc,mes}$ = resultante das tensões de compressão na mesa (regiões II e III);

$R_{cc,nerv}$ = resultante das tensões de compressão na nervura (região I).

As forças resultantes nas armaduras são:

$$R_{pt} = \sigma_{pd} A_p \quad ; \quad R_{st} = \sigma_{sd} A_s$$

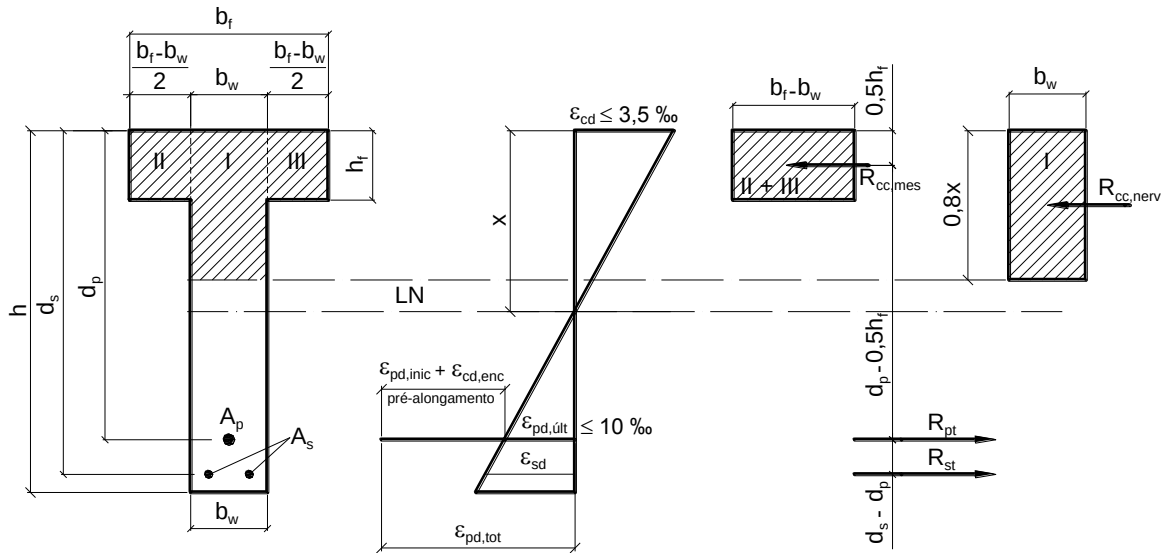


Figura 6.10 – Tensões e deformações no ELU em seção T protendida com aderência entre o concreto e as armaduras, para concretos do Grupo I de resistência ($f_{ck} \leq 50$ MPa).

Supondo que a armadura passiva tracionada A_s escoou sob o momento fletor último, pode-se considerar a tensão genérica σ_{sd} igual à f_{yd} . Aplicando as equações das forças resultantes na Eq. 6.15 a variável x pode ser isolada, e assim fica definida a posição da linha neutra:

$$0,85\eta_c f_{cd} (b_f - b_w) h_f + 0,85\eta_c f_{cd} 0,8x b_w = \sigma_{pd} A_p + f_{yd} A_s$$

$$x = \frac{\sigma_{pd} A_p + f_{yd} A_s - 0,85\eta_c f_{cd} (b_f - b_w) h_f}{0,85\eta_c f_{cd} 0,8 b_w} \quad \text{Eq. 6.16}$$

Equilíbrio de momentos fletores: fazendo somatória de momentos sobre a resultante $R_{cc,nerv}$ tem-se a equação para o momento fletor último da seção T:

$$M_{Rd} = 0,85\eta_c f_{cd} (b_f - b_w) h_f (0,4x - 0,5h_f) + \sigma_{pd} A_p (d_p - 0,4x) + f_{yd} A_s (d_s - 0,4x) \quad \text{Eq. 6.17}$$

A condição de segurança estará satisfeita se $M_{Rd} \geq M_{Sd}$.

¹⁷⁷ A formulação aqui apresentada para a seção T é válida somente para concretos com $f_{ck} \leq 50$ MPa.

6.7 Condições de Ductilidade

Além da necessária resistência que as peças devem apresentar à flexão, é importante também assegurar que a peça tenha comportamento dúctil. A NBR 6118 (item 14.6.4.3) apresenta limites para a posição da linha neutra x , afirmando que “A capacidade de rotação dos elementos estruturais é função da posição da linha neutra no ELU. Quanto menor for x/d , tanto maior será essa capacidade”. E “Para proporcionar o adequado comportamento dúctil em vigas e lajes, a posição da linha neutra no ELU deve obedecer aos seguintes limites:

$$\begin{aligned} x/d &\leq 0,45 && \text{- para concretos com } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa;} \\ x/d &\leq 0,35 && \text{- para concretos com } 50 < f_{ck} \leq 90 \text{ MPa.} \end{aligned} \quad \text{Eq. 6.18}$$

Outras normas ou autores apresentam equações ou valores limites diferentes para avaliar a ductilidade. Como por exemplo o limite $x \leq 0,3d$, ou por meio da equação da curvatura última, que é a inclinação do diagrama de deformações na situação da ruptura:^[1]

$$\kappa_{ud} = \frac{\varepsilon_{cd}}{x} \quad \text{Eq. 6.19}$$

Com $x = 0,3d$ resulta a curvatura mínima:

$$\kappa_{ud,min} = \frac{3,33\varepsilon_{cd}}{d} \quad \text{Eq. 6.20}$$

Nas equações Eq. 6.18, Eq. 6.19 e Eq. 6.20 e no valor limite $0,3d$ deve ser tomado para d a altura útil efetiva (d_{ef}), que é a distância da fibra mais comprimida à linha de ação das forças resultantes na armadura passiva (R_{st}) e na armadura de protensão (R_{pt}):

$$d_{ef} = \frac{\sigma_{pd} A_p d_p + \sigma_{sd} A_s d_s}{\sigma_{pd} A_p + \sigma_{sd} A_s} \quad \text{Eq. 6.21}$$

6.8 Roteiro para Cálculo de M_{Rd}

Este roteiro assume valores apenas para os concretos do Grupo I.¹⁷⁸

- cálculo da deformação de **pré-alongamento**, composta pelas deformações $\varepsilon_{cd,enc}$ e $\varepsilon_{pd,inic}$;
- determinação da tensão na armadura (σ_{pd}), supondo inicialmente que a ruptura ocorre nos domínios 3 ou 4, com:

$$\sigma_{cd} = 0,85\eta_c f_{cd} \quad \text{e} \quad \varepsilon_{cd} = 3,5 \text{ ‰}$$

- por tentativa:

$$c1) \sigma_{pd}^{(1)} = f_{pyd} = f_{pyk}/1,15, \text{ ou } \sigma_{pd}^{(1)} = \frac{f_{pyd} + f_{ptd}}{2}$$

- equação de equilíbrio resulta x ;

- equação de compatibilidade de deformações resulta $\varepsilon_{pd,últ}$;

¹⁷⁸ Para concretos do Grupo II alguns parâmetros devem ser modificados, conforme a NBR 6118.

c4) se $\varepsilon_{pd,ult} < 10 \text{ ‰}$: a hipótese inicial de ruptura nos domínios 3 ou 4 é correta;

c5) tensão na armadura com a deformação $\varepsilon_{pd,tot} = \varepsilon_{pd,inic} + \varepsilon_{cd,enc} + \varepsilon_{pd,ult}$ resulta σ_{pd}

- se $\sigma_{pd}^{(1)} \approx \sigma_{pd}$: atendendo ao erro máximo, ok!

- se $\sigma_{pd}^{(1)} \neq \sigma_{pd}$: adotar novo valor para a tensão: $\sigma_{pd}^{(2)}$ e refazer os cálculos;

c6) se $\varepsilon_{pd,ult} > 10 \text{ ‰}$: é o domínio 2;

- faz-se $\varepsilon_{pd,ult} = 10 \text{ ‰}$ e determina-se a tensão σ_{pd} na armadura com $\varepsilon_{pd,tot} = \varepsilon_{pd,inic} + \varepsilon_{cd,enc} + 10 \text{ ‰}$

$$\frac{\varepsilon_{cd}}{\varepsilon_{p1d}} = \frac{x}{d_p - x}, \text{ com } \varepsilon_{pd,ult} = 10 \text{ ‰ e } \varepsilon_{cd} \leq 3,5 \text{ ‰}$$

se $\varepsilon_{cd} \leq 3,5 \text{ ‰}$ a hipótese de domínio 2 está correta.

6.9 Exemplos de Cálculo de Momento Fletor Último (M_{Rd})

Este item apresenta alguns exemplos numéricos de cálculo de momento fletor último conforme a formulação apresentada para seção retangular e T.¹⁷⁹

6.9.1 Exemplo 1 – Seção Retangular com Armaduras Ativa e Passivas A_s e A'_s

Determinar o momento fletor último (M_{Rd}) de uma viga pré-moldada de seção retangular em Concreto Protendido (Figura 6.11), composta por armadura de protensão (A_p) e armaduras passivas, tracionada (A_s) e comprimida (A'_s), considerando que existe aderência entre a armadura de protensão e o concreto. São conhecidos:

- concreto C40, módulo de elasticidade secante $E_{cs} = 32 \text{ GPa}$, $\gamma_c = 1,3$ (elemento pré-fabricado);¹⁸⁰
- armadura ativa: $A_p = 10,00 \text{ cm}^2$ (10 cordoalhas CP190 RB $\phi 12,7 \text{ mm}$, $f_{ptk} = 1.900 \text{ MPa}$, $f_{pyk} = 1.710 \text{ MPa}$, $E_p = 196.000 \text{ MPa}$ ¹⁸¹);
- armadura passiva tracionada $A_s = 17,25 \text{ cm}^2$;
- armadura passiva comprimida $A'_s = 8,00 \text{ cm}^2$;
- (CA-50 – $f_{yk} = 500 \text{ MPa}$, $f_{yd} = 435 \text{ MPa}$, $\varepsilon_{yd} = 2,07 \text{ ‰}$, $E_s = 210.000 \text{ MPa}$, $\gamma_s = 1,15$);
- tensão na armadura de protensão provocada pela força de protensão final $\sigma_{p\infty} = 1.200 \text{ MPa}$;
- Erro máximo admitido no cálculo de $M_{Rd} = 1 \text{ ‰}$.

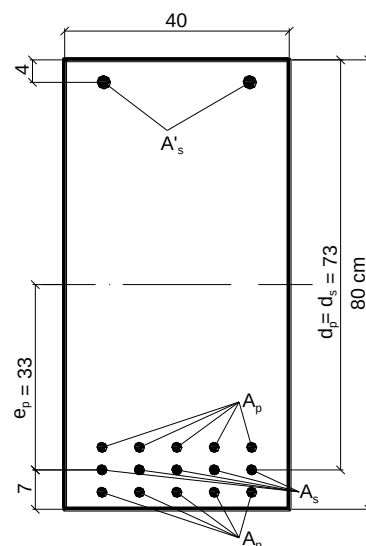


Figura 6.11 – Dimensões (cm) da seção transversal da viga retangular.

Resolução

¹⁷⁹ Para melhor aprendizado do assunto recomendamos para estudo dois livros brasileiros: CARVALHO, R.C. *Estruturas em Concreto Protendido – Pré-tração, Pós-tensão, Cálculo e Detalhamento*. São Paulo, Ed. Pini, 2012, 431p. e CHOLFE, L. ; BONILHA, L. *Concreto Protendido – Teoria e Prática*. São Paulo, Ed. Pini, 2ª ed., 2015, 345p.

¹⁸⁰ Conforme a NBR 9062, nas peças de concreto pré-fabricado o coeficiente de minoração da resistência do concreto (γ_c) pode ser adotado como 1,3 em função do melhor controle de qualidade na confecção das peças em ambiente de fábrica.

¹⁸¹ O módulo de elasticidade do aço de protensão (E_p) pode ser fornecido pelo fabricante, ou adotado o valor de 200.000 MPa conforme recomendado pela NBR 6118 para as cordoalhas.

Por simplicidade, a homogeneização da seção transversal não será considerada. A área bruta da seção transversal de concreto é:

$$A_c = b_w \cdot h = 40 \cdot 80 = 3.200 \text{ cm}^2$$

$$\text{Momento de inércia da seção: } I_c = \frac{b_w h^3}{12} = \frac{40 \cdot 80^3}{12} = 1.706.667 \text{ cm}^4$$

$$\text{Força de protensão final: } P_\infty = A_p \cdot \sigma_{p\infty} = 10,00 \cdot 120,0 = 1.200,0 \text{ kN}$$

Para o valor de cálculo da força de protensão P_d deve-se considerar $\gamma_p = 0,9$ (*efeito favorável*), porque quanto maior a força de protensão, maior é o momento fletor último. Existirá uma margem de segurança com a consideração de um momento fletor último (teórico) menor que aquele real apresentado pela viga, pois a verificação para a segurança é $M_{Rd} \geq M_{sd}$. Portanto, a força de protensão para cálculo da deformação de pré-alongamento é:

$$P_d = \gamma_p P_\infty = 0,9 \cdot 1.200,0 = 1.080,0 \text{ kN}$$

A deformação $\varepsilon_{cd,enc}$ no concreto ao nível do CG da armadura de protensão é (Eq. 6.1):

$$\varepsilon_{cd,enc} = \frac{1}{E_c} \left(\frac{P_d}{A_c} + \frac{P_d e_p^2}{I_c} \right) = \frac{1}{3.200} \left(\frac{1.080,0}{3.200} + \frac{1.080,0 \cdot 33^2}{1.706.667} \right) = 3,2082 \times 10^{-4} = 0,32 \text{ ‰}$$

No estágio da reta (a) (ver Figura 6.7), o aço de protensão encontra-se ainda no regime elástico, e a deformação é (Eq. 6.3):

$$\varepsilon_{pd,inc} = \frac{P_d}{E_p A_p} = \frac{1.080,0}{19600 \cdot 10,00} = 0,00551 = 5,51 \text{ ‰}$$

A deformação de **pré-alongamento** é: $\varepsilon_{pd,inc} + \varepsilon_{cd,enc} = 5,51 + 0,32 = 5,83 \text{ ‰}$

O cálculo pode ser feito por tentativa, adotando-se um valor para a tensão na armadura de protensão correspondente ao momento fletor último M_{Rd} :

$$\text{a) primeira tentativa: } \sigma_{pd}^{(1)} = f_{pyd} = \frac{f_{pyk}}{\gamma_s} = \frac{0,9 \cdot 1900}{1,15} = \frac{1.710}{1,15} = 1.487,0 \text{ MPa}^{182}$$

Cálculo da posição da linha neutra x para seção retangular (Eq. 6.10), com a hipótese de que as armaduras passivas escoam ($\sigma_{sd} = \sigma'_{sd} = f_{yd} = f'_{yd} = 43,5 \text{ kN/cm}^2$), e como o concreto é o C40 toma-se $\eta_c = 1,0$ (para $f_{ck} \leq 40 \text{ MPa}$, ver item 2.1.6):

$$x = \frac{\sigma_{pd} A_p + f_{yd} A_s - f'_{yd} A'_s}{0,85 \eta_c f_{cd} 0,8 b_w} = \frac{1487 \cdot 10,00 + 43,5 \cdot 17,25 - 43,5 \cdot 8,00}{0,85 \frac{4,0}{1,3} 0,8 \cdot 40} = 22,58 \text{ cm}$$

Deformação na armadura de protensão supondo domínio 3 ou 4 ($\varepsilon_{cd} = 3,5 \text{ ‰}$, Eq. 6.4):

$$\varepsilon_{pd,últ} = \varepsilon_{cd} \left(\frac{d_p - x}{x} \right) = 3,5 \left(\frac{73 - 22,58}{22,58} \right) = 7,82 \text{ ‰}$$

Como $\varepsilon_{pd,últ} = 7,82 \text{ ‰} < 10 \text{ ‰}$, confirma o domínio 3 ou o 4. Se ocorrer $\varepsilon_{pd,últ} > 10 \text{ ‰}$ o domínio é o 2. Para definir o domínio entre o 3 e o 4 é preciso comparar a deformação na armadura de protensão, provocada pelo momento fletor ($\varepsilon_{pd,últ}$), com a deformação de início de escoamento do aço (ε_{pyd}), dada por:

¹⁸² No caso de cordoalha pode ser adotado $f_{pyd} = 0,9 f_{ptd}$, e para fios $f_{pyd} = 0,85 f_{ptd}$.

$$\sigma = \varepsilon \cdot E \quad \rightarrow \quad \varepsilon_{pyd} = \frac{f_{pyd}}{E_p} = \frac{1.487}{196.000} = 0,00759 = 7,59 \%$$

E como $\varepsilon_{pd,últ} = 7,82 \%$ > $\varepsilon_{pyd} = 7,59 \%$, o domínio é o 3 e não o 4, pois o domínio 4 ocorre quando $\varepsilon_{pd,últ} < \varepsilon_{pyd}$. A deformação de alongamento total na armadura de protensão é (Eq. 6.5):

$$\varepsilon_{pd,tot} = \varepsilon_{pd,inic} + \varepsilon_{cd,enc} + \varepsilon_{pd,últ} = 5,51 + 0,32 + 7,82 = 13,65 \%$$

Considerando o diagrama $\sigma \times \varepsilon$ simplificado permitido pela NBR 6118 para os aços de protensão (ver item 2.2.7), e adotando $\varepsilon_{pud} = 35 \%$ como a deformação máxima de alongamento do aço (ver Figura 6.12), a tensão na armadura de protensão correspondente à deformação total $\varepsilon_{pd,tot} = 13,65 \%$ pode ser calculada. A deformação total mostra que o aço de protensão está escoando, pois $\varepsilon_{pd,tot} = 13,65 \%$ > ε_{pyd} .

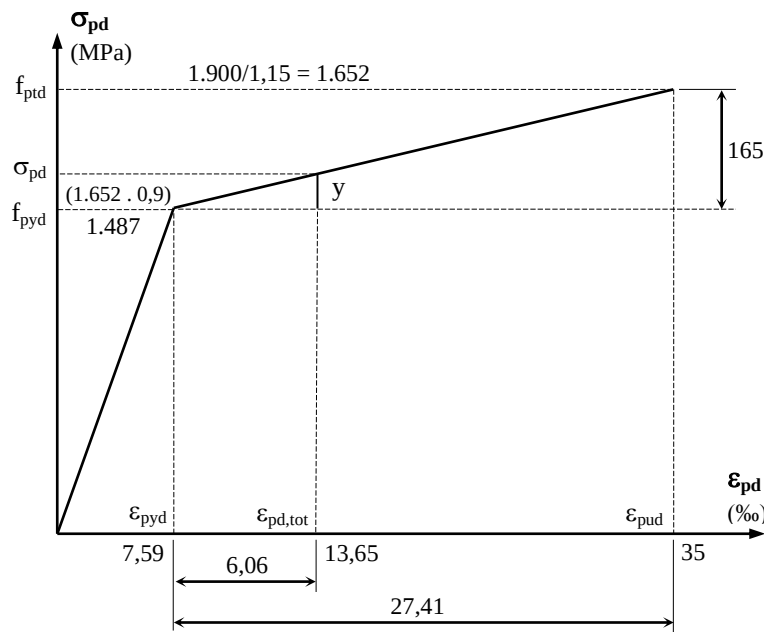


Figura 6.12 – Diagrama tensão x deformação do aço da armadura de protensão para determinação da tensão σ_{pd} .

$$\text{com: } f_{ptd} = \frac{f_{ptk}}{\gamma_s} = \frac{1900}{1,15} = 1.652 \text{ MPa}$$

$$\text{Do diagrama da Figura 6.12 tem-se: } \frac{y}{6,06} = \frac{165}{27,41} \quad \rightarrow \quad y = 36,5 \text{ MPa}$$

Para $\varepsilon_{pd,tot} = 13,65 \%$ resulta a tensão na armadura de protensão: $\sigma_{pd} = 1.487,0 + 36,5 = 1.523,5 \text{ MPa}$

$\sigma_{pd}^{(1)} = 1.487,0 \text{ MPa} \neq \sigma_{pd} = 1.523,5 \text{ MPa}$, sendo o erro de:

$$\left(\frac{1.523,5}{1.487,0} - 1 \right) 100 = 2,5 \% > 1 \% \quad \rightarrow \quad \text{portanto, como o erro da primeira tentativa superou o erro máximo}$$

admitido, deve ser feita nova tentativa para diminuir o erro e melhorar a precisão na determinação de σ_{pd} .

b) segunda tentativa, utilizando a tensão resultante da primeira tentativa: $\sigma_{pd}^{(2)} = 1.523,5 \text{ MPa}$

Posição da linha neutra para seção retangular supondo que as armaduras passivas escoam (Eq. 6.10) e $\eta_c = 1,0$ (para $f_{ck} \leq 40 \text{ MPa}$):

$$x = \frac{\sigma_{pd} A_p + f_{yd} A_s - f'_{yd} A'_s}{0,85 \eta_c f_{cd} 0,8 b_w} = \frac{152,35 \cdot 10,00 + 43,5 \cdot 17,25 - 43,5 \cdot 8,00}{0,85 \frac{4,0}{1,3} 0,8 \cdot 40} = 23,01 \text{ cm}$$

Deformação na armadura de protensão, supondo domínio 3 ou 4 ($\epsilon_{cd} = 3,5 \text{ ‰}$), com a equação de compatibilidade de deformações (Eq. 6.12), equivalente a Eq. 6.4:

$$\frac{\epsilon_{cd}}{\epsilon_{pd, \text{últ}}} = \frac{x}{d_p - x} \rightarrow \frac{3,5}{\epsilon_{pd, \text{últ}}} = \frac{23,01}{73 - 23,01} \rightarrow \epsilon_{pd, \text{últ}} = 7,60 \text{ ‰} < 10 \text{ ‰} \rightarrow \text{confirma o domínio 3 ou 4.}$$

Como $\epsilon_{pd, \text{últ}} = 7,60 \text{ ‰} > \epsilon_{pyd} = 7,59 \text{ ‰}$, o domínio é o 3. A deformação total na armadura de protensão é a soma daquela do pré-alongamento com a deformação causada pelo carregamento último sobre a viga (ou seja, causado pelo momento fletor último):

$$\epsilon_{pd, \text{tot}} = \epsilon_{pd, \text{inic}} + \epsilon_{cd, \text{enc}} + \epsilon_{pd, \text{últ}} = 5,51 + 0,32 + 7,60 = 13,43 \text{ ‰}$$

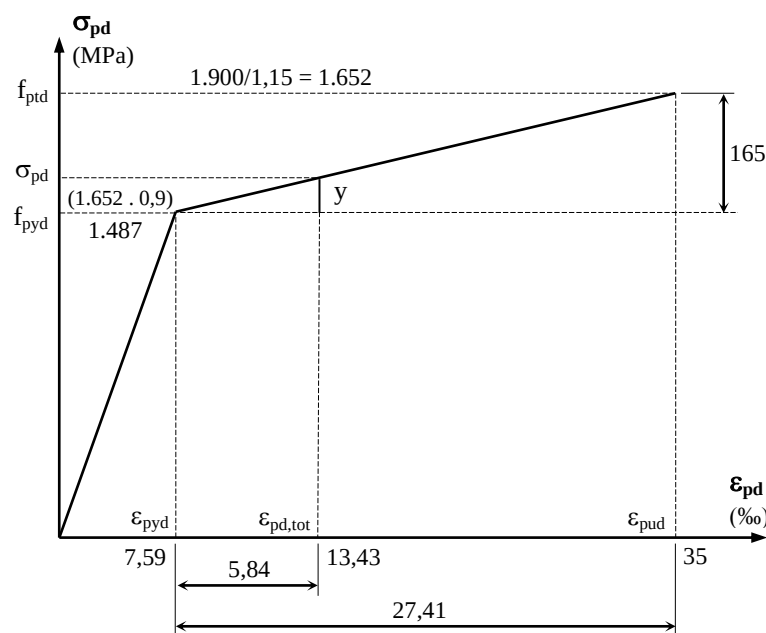


Figura 6.13 – Diagrama de tensões na armadura de protensão.

Do diagrama da Figura 6.13: $\frac{y}{5,84} = \frac{165}{27,41} \rightarrow y = 35,2 \text{ MPa}$

Para $\epsilon_{pd, \text{tot}} = 13,43 \text{ ‰}$ resulta a tensão: $\sigma_{pd} = 1.487,0 + 35,2 = 1.522,2 \text{ MPa}$

Erro de: $\left(1 - \frac{1.522,2}{1.523,5}\right) 100 = 0,1\% < 1\% \text{ (erro máximo admitido)} \rightarrow \text{ok!}$

E como a diferença entre as tensões é muito pequena, não há necessidade de recalculer um novo valor para x com a tensão de 1.522,2 MPa. Verificação da tensão na armadura passiva tracionada (Eq. 6.13), com $\epsilon_{cd} = 3,5 \text{ ‰}$ do domínio 3:

$$\frac{\epsilon_{cd}}{\epsilon_{sd}} = \frac{x}{d_s - x} \rightarrow \frac{3,5}{\epsilon_{sd}} = \frac{23,01}{73 - 23,01} \rightarrow \epsilon_{sd} = 7,60 \text{ ‰} > \epsilon_{yd} = 2,07 \text{ ‰}$$

portanto, a armadura passiva tracionada A_s está escoando e a tensão é $\sigma_{sd} = f_{yd} = 43,5 \text{ kN/cm}^2$, conforme se verifica no diagrama $\sigma \times \epsilon$ do aço CA-50, mostrado na Figura 6.14. Verificação da tensão na armadura passiva comprimida (Eq. 6.14):

$$\frac{\varepsilon_{cd}}{\varepsilon'_{sd}} = \frac{x}{x - d'} \quad \rightarrow \quad \frac{3,5}{\varepsilon'_{sd}} = \frac{23,01}{23,01 - 4} \quad \rightarrow \quad \varepsilon'_{sd} = 2,89\text{‰} > \varepsilon_{yd} = 2,07\text{‰}$$

portanto, a armadura passiva comprimida A'_s está escoando e a tensão é $\sigma'_{sd} = f'_{yd} = f_{yd} = 43,5 \text{ kN/cm}^2$, conforme diagrama $\sigma \times \varepsilon$ do aço CA-50 (Figura 6.14).

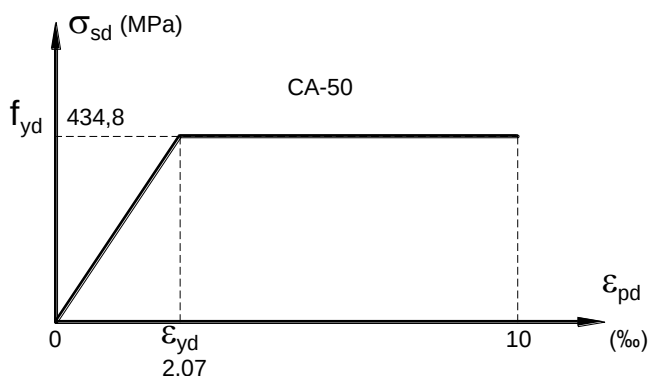


Figura 6.14 – Diagrama $\sigma \times \varepsilon$ do aço CA-50.

O momento fletor último é (Eq. 6.11):

$$M_{Rd} = \sigma_{pd} A_p (d_p - 0,4x) + f_{yd} A_s (d_s - 0,4x) + f'_{yd} A'_s (0,4x - d')$$

$$M_{Rd} = 152,22 \cdot 10,00 (73 - 0,4 \cdot 23,01) + 43,5 \cdot 17,25 (73 - 0,4 \cdot 23,01) + 43,5 \cdot 8,00 (0,4 \cdot 23,01 - 4)$$

$$M_{Rd} = 146.792 \text{ kN.cm} \quad \rightarrow \quad \text{deve-se ter } M_{Rd} \geq M_{Sd}$$

6.9.2 Exemplo 2 – Seção I com Armaduras Ativa e Passivas A_s e A'_s

Calcular o momento fletor último (M_{Rd}) da viga I pré-moldada mostrada na Figura 6.15, composta por armadura de protensão (A_p) e armaduras passivas, tracionada (A_s) e comprimida (A'_s), e que existe aderência entre o concreto e a armadura de protensão. São conhecidos:

- concreto C35, módulo de elasticidade secante $E_{cs} = 29 \text{ GPa}$, $\gamma_c = 1,3$;
- armadura ativa: $A_p = 4,00 \text{ cm}^2$ (4 cordoalhas CP190 RB $\phi 12,7 \text{ mm}$, $f_{ptk} = 1.900 \text{ MPa}$, $f_{pyk} = 1.710 \text{ MPa}$, $E_p = 200.000 \text{ MPa}$);
- armadura passiva tracionada: $A_s = 3,20 \text{ cm}^2$, $d_s = 56 \text{ cm}$;
- armadura passiva comprimida $A'_s = 2,00 \text{ cm}^2$, $d' = 4 \text{ cm}$;
- (CA-50, $f_{yk} = 500 \text{ MPa}$, $f_{yd} = 435 \text{ MPa}$, $\varepsilon_{yd} = 2,07\text{‰}$, $E_s = 210.000 \text{ MPa}$, $\gamma_s = 1,15$);
- $A_c = 1.120 \text{ cm}^2$ (seção bruta);
- $I_c = 495.000 \text{ cm}^4$;
- força de protensão final $P_\infty = 435,0 \text{ kN}$;
- excentricidade da armadura de protensão $e_p = 22 \text{ cm}$;
- altura útil da armadura de protensão $d_p = 52 \text{ cm}$;
- erro máximo admitido no cálculo de $M_{Rd} = 1,5\%$.

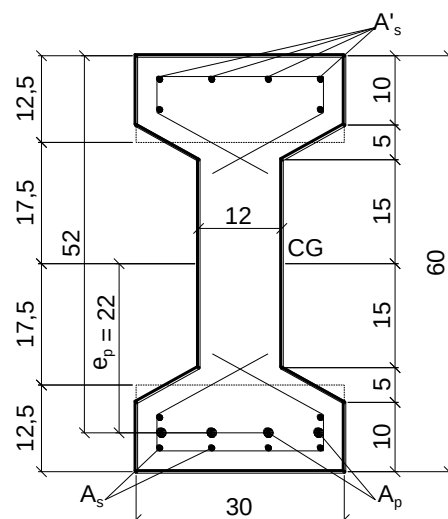


Figura 6.15 – Dimensões (cm) da seção transversal da viga I.

Resolução

Para o valor de cálculo da força de protensão P_d no ELU deve-se considerar $\gamma_p = 0,9$ (efeito favorável) (Eq. 6.6):

$$P_d = \gamma_p P_\infty = 0,9 \cdot 435,0 = 391,5 \text{ kN}$$

A deformação $\varepsilon_{cd,enc}$ no concreto ao nível do CG da armadura de protensão é (Eq. 6.1):

$$\varepsilon_{cd,enc} = \frac{1}{E_c} \left(\frac{P_d}{A_c} + \frac{P_d e_p^2}{I_c} \right) = \frac{1}{2.900} \left(\frac{391,5}{1.120} + \frac{391,5 \cdot 22^2}{495.000} \right) = 0,00025 = 0,25 \text{ ‰}$$

No estágio da reta (a) (Figura 6.7) a deformação no aço de protensão encontra-se ainda no regime elástico (Eq. 6.3):

$$\varepsilon_{pd,inic} = \frac{P_d}{E_p A_p} = \frac{391,5}{20000 \cdot 4,00} = 0,00489 = 4,89 \text{ ‰}$$

A deformação de **pré-alongamento** é: $\varepsilon_{pd,inic} + \varepsilon_{cd,enc} = 4,89 + 0,25 = 5,14 \text{ ‰}$

Cálculo por tentativa adotando a tensão na armadura de protensão correspondente ao M_{Rd} .

$$\text{a) primeira tentativa: } \sigma_{pd}^{(1)} = f_{pyd} = \frac{f_{pyk}}{\gamma_s} = \frac{1.710}{1,15} = 1.487,0 \text{ MPa}$$

Cálculo da posição da linha neutra considerando a hipótese de seção I calculada como seção retangular (Eq. 6.10), com $b_w = b_f = 30 \text{ cm}$, supondo que as armaduras passivas escoam e $\eta_c = 1,0$ para $f_{ck} \leq 40 \text{ MPa}$ (ver item 2.1.6):

$$x = \frac{\sigma_{pd} A_p + f_{yd} A_s - f'_{yd} A'_s}{0,85 \eta_c f_{cd} 0,8 b_w} = \frac{1487 \cdot 4,00 + 435 \cdot 3,20 - 435 \cdot 2,00}{0,85 \frac{3,5}{1,3} 0,8 \cdot 30} = 11,78 \text{ cm}$$

Verificação: $0,8x = 0,8 \cdot 11,78 = 9,42 \text{ cm} < h_f = 12,5 \text{ cm}$,¹⁸³ portanto, **a seção I pode ser calculada como retangular com largura b_f** . Se resultar $0,8x > h_f$ a altura da linha neutra x dever ser recalculada, com a equação da seção T (Eq. 6.16).

Deformação na armadura de protensão supondo domínio 3 ou 4 ($\varepsilon_{cd} = 3,5 \text{ ‰}$, Eq. 6.4):

$$\varepsilon_{pd,últ} = \varepsilon_{cd} \left(\frac{d_p - x}{x} \right) = 3,5 \left(\frac{52 - 11,78}{11,78} \right) = 11,95 \text{ ‰}$$

Como $\varepsilon_{pd,últ} = 11,95 \text{ ‰} > 10 \text{ ‰}$, **o domínio é o 2**, e não o 3 ou o 4.¹⁸⁴ Considerando agora o domínio 2 deve-se fazer $\varepsilon_{pd,últ} = 10 \text{ ‰}$, que é o valor máximo permitido (valor último), e a deformação total na armadura de protensão correspondente ao M_{Rd} é:

$$\varepsilon_{pd,tot} = \varepsilon_{pd,inic} + \varepsilon_{cd,enc} + \varepsilon_{pd,últ} = 4,89 + 0,25 + 10,0 = 15,14 \text{ ‰}$$

A deformação de início de escoamento da armadura de protensão é (Figura 6.16):

$$\varepsilon_{pyd} = \frac{f_{pyd}}{E_p} = \frac{1.487}{200.000} = 0,00744 = 7,44 \text{ ‰}$$

$$\text{Do diagrama da Figura 6.16 tem-se: } \frac{y}{7,70} = \frac{165}{27,56} \rightarrow y = 46,1 \text{ MPa}$$

Para $\varepsilon_{pd,tot} = 15,14 \text{ ‰}$ resulta a tensão na armadura de protensão: $\sigma_{pd} = 1.487,0 + 46,1 = 1.533,1 \text{ MPa}$.¹⁸⁵

¹⁸³ No valor da altura da mesa colaborante (h_f) foi somada metade da altura da mística, isto é: $10 + 5/2 = 12,5 \text{ cm}$.

¹⁸⁴ Em vigas com mesa colaborante o mais comum é ocorrer o domínio 2.

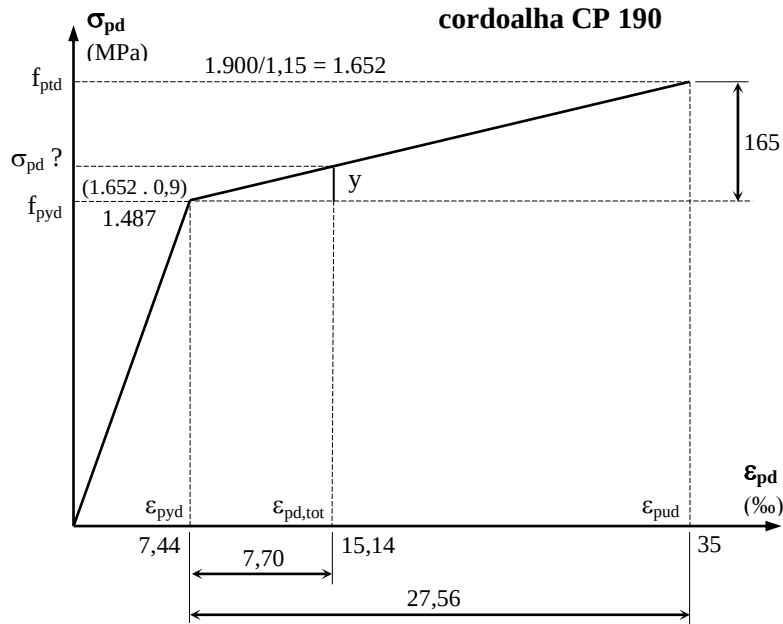


Figura 6.16 – Diagrama tensão x deformação do aço da armadura de protensão para determinação de σ_{pd} .

A viga encontra-se no domínio 2 e com tensão $\sigma_{pd} = 1.533,1$ MPa, e para essa tensão uma nova posição da linha neutra deve ser calculada. Considera-se inicialmente a hipótese de seção I calculada como retangular com $b_w = b_f = 30$ cm, e que as armaduras passivas escoam (Eq. 6.10):

$$x = \frac{\sigma_{pd} A_p + f_{yd} A_s - f'_{yd} A'_s}{0,85 \eta_c f_{cd} 0,8 b_w} = \frac{15331 \cdot 4,00 + 435 \cdot 3,20 - 435 \cdot 2,00}{0,85 \frac{3,5}{1,3} \cdot 0,8 \cdot 30} = 12,12 \text{ cm}$$

$$\text{Verificação: } 0,8x = 0,8 \cdot 12,12 = 9,69 \text{ cm} < h_f = 12,5 \text{ cm}$$

portanto, a seção I pode ser calculada como retangular.

Verificação da deformação no concreto (Eq. 6.12):

$$\frac{\epsilon_{cd}}{\epsilon_{pd,ult}} = \frac{x}{d_p - x} \rightarrow \frac{\epsilon_{cd}}{10} = \frac{12,12}{52 - 12,12} \rightarrow \epsilon_{cd} = 3,04 \text{ ‰} < 3,5 \text{ ‰} \rightarrow \text{confirmou o domínio 2}$$

Verificação da tensão na armadura passiva tracionada (Eq. 6.13):

$$\frac{\epsilon_{cd}}{\epsilon_{sd}} = \frac{x}{d_s - x} \rightarrow \frac{3,04}{\epsilon_{sd}} = \frac{12,12}{56 - 12,12} \rightarrow \epsilon_{sd} = 11,01 \text{ ‰} > 2,07 \text{ ‰}$$

portanto, $\sigma_{sd} = f_{yd}$, conforme se verifica no diagrama $\sigma \times \epsilon$ do aço CA-50, mostrado na Figura 6.14.

Verificação da tensão na armadura passiva comprimida (Eq. 6.14):

$$\frac{\epsilon_{cd}}{\epsilon'_{sd}} = \frac{x}{x - d'} \rightarrow \frac{3,04}{\epsilon'_{sd}} = \frac{12,12}{12,12 - 4} \rightarrow \epsilon'_{sd} = 2,04 \text{ ‰} < 2,07 \text{ ‰}$$

portanto, a tensão na armadura passiva comprimida é um pouco inferior a f'_{yd} , conforme se verifica no diagrama $\sigma \times \epsilon$ do aço CA-50, mostrado na Figura 6.14. Quando isso ocorre é necessário recalculer a posição

¹⁸⁵ O domínio 2 deve ser confirmado com o cálculo de ϵ_{cd} , que será confirmado caso ocorra $\epsilon_{cd} \leq 3,5 \text{ ‰}$ (isso geralmente ocorre). A tensão σ_{pd} calculada com a deformação total ($\epsilon_{pd,tot}$) no domínio 2 não mais se altera até o cálculo do momento fletor último (M_{Rd}), diferentemente do cálculo nos domínios 3 ou 4, quando a tensão é determinada por tentativas.

da linha neutra com uma nova tensão na armadura comprimida, cujo valor encontra-se no trecho elástico, e conforme a Lei de Hooke:

$$\sigma'_{sd} = E_s \varepsilon'_{sd} = 210.000 \cdot 0,00204 = 428,4 \text{ MPa, ao invés de } f'_{yd} = 435 \text{ MPa (erro de 1,5 \%)}$$

Novo valor de x , com $\sigma'_{sd} = 428,4 \text{ MPa}$ e mantidos os demais valores (Eq. 6.10):

$$x = \frac{\sigma_{pd} A_p + f_{yd} A_s - f'_{yd} A'_s}{0,85 \eta_c f_{cd} 0,8 b_w} = \frac{153,31 \cdot 4,00 + 43,5 \cdot 3,20 - 42,84 \cdot 2,00}{0,85 \frac{3,5}{1,3} \cdot 0,8 \cdot 30} = 12,14 \text{ cm}$$

Verificação: $0,8x = 0,8 \cdot 12,14 = 9,71 \text{ cm} < h_f = 12,5 \text{ cm}$, portanto cálculo como seção retangular.

Verificação da deformação no concreto (Eq. 6.12):

$$\frac{\varepsilon_{cd}}{\varepsilon_{pd, \text{últ}}} = \frac{x}{d_p - x} \rightarrow \frac{\varepsilon_{cd}}{10} = \frac{12,14}{52 - 12,14} \rightarrow \varepsilon_{cd} = 3,05 \text{ ‰} < 3,5 \text{ ‰} \rightarrow \text{confirmou o domínio 2}$$

A tensão na armadura passiva comprimida deve ser recalculada (Eq. 6.14), a fim de verificar se a diferença entre as tensões atende ao erro máximo permitido:

$$\frac{\varepsilon_{cd}}{\varepsilon'_{sd}} = \frac{x}{x - d'} \rightarrow \frac{3,05}{\varepsilon'_{sd}} = \frac{12,14}{12,14 - 4} \rightarrow \varepsilon'_{sd} = 2,045 \text{ ‰} < 2,07 \text{ ‰}$$

que resulta a tensão $\sigma'_{sd} = E_s \varepsilon'_{sd} = 210.000 \cdot 0,002045 = 429,5 \text{ MPa}$, com erro de apenas 0,3 % relativamente à tensão anterior (428,4 MPa), e inferior ao erro máximo permitido de 1,5 %. A tensão na armadura passiva tracionada não necessita ser novamente verificada.

Após feitas todas as verificações, o momento fletor último (Eq. 6.11 – seção retangular) é calculado com a tensão na armadura de protensão determinada no domínio 2 (1.533,1 MPa), e com os últimos valores calculados para x (12,14 cm) e para a tensão na armadura passiva comprimida (429,5 MPa):

$$M_{Rd} = \sigma_{pd} A_p (d_p - 0,4x) + \sigma_{sd} A_s (d_s - 0,4x) + \sigma'_{sd} A'_s (0,4x - d')$$

$$M_{Rd} = 153,31 \cdot 4,00 (52 - 0,4 \cdot 12,14) + 43,5 \cdot 3,20 (56 - 0,4 \cdot 12,14) + 42,95 \cdot 2,00 (0,4 \cdot 12,14 - 4)$$

$$M_{Rd} = 36.103 \text{ kN.cm} \rightarrow \text{deve-se ter } M_{Rd} \geq M_{Sd}$$

6.9.3 Exemplo 3 – Seção duplo T com Armadura Ativa

Calcular o momento fletor último (M_{Rd}) da viga duplo T pré-moldada mostrada na Figura 6.17, considerando que existe aderência entre o concreto e a armadura de protensão. São conhecidos:^[1]

- concreto C35, módulo de elasticidade secante $E_{cs} = 35.000 \text{ MPa}$, $\gamma_c = 1,3$;
- armadura ativa: $A_p = 26,00 \text{ cm}^2$, (26 cordoalhas CP190 RB $\phi 12,7 \text{ mm}$, $f_{ptk} = 1.900 \text{ MPa}$, $f_{pyk} = 1.710 \text{ MPa}$, $E_p = 195.000 \text{ MPa}$, $d_p = 68,5 \text{ cm}$);
- armaduras passivas A_s e A'_s não consideradas;¹⁸⁶
- $A_c = 371 \times 10^3 \text{ mm}^2$, $W_b = 43,7 \times 10^6 \text{ mm}^3$, $W_t = 82,5 \times 10^6 \text{ mm}^3$, $I_c = 22,8 \times 10^9 \text{ mm}^4$;
- força de protensão final $P_\infty = 3.611,1 \text{ kN}$;
- excentricidade da armadura de protensão $e_p = 40,8 \text{ cm}$;
- erro máximo no cálculo de $M_{Rd} = 1,0 \text{ ‰}$.

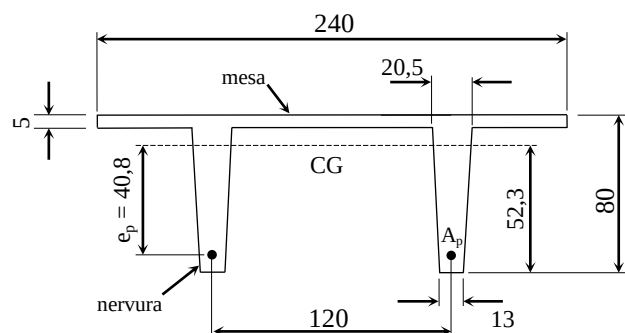


Figura 6.17 – Dimensões (cm) da viga duplo T.

¹⁸⁶ Em seções duplo T geralmente não são colocadas armaduras passivas longitudinais.

Resolução

Para o valor de cálculo da força de protensão P_d no ELU deve-se considerar $\gamma_p = 0,9$ (*efeito favorável*) (Eq. 6.6):

$$P_d = \gamma_p P_{\infty} = 0,9 \cdot 3611,1 = 3.250,0 \text{ kN}$$

A deformação $\varepsilon_{cd,enc}$ no concreto ao nível do CG da armadura de protensão é (Eq. 6.1):

$$\varepsilon_{cd,enc} = \frac{1}{E_c} \left(\frac{P_d}{A_c} + \frac{P_d e_p^2}{I_c} \right) = \frac{1}{3.500} \left(\frac{32500}{3.710} + \frac{32500 \cdot 40,8^2}{2.280.000} \right) = 0,00093 = 0,93 \text{ ‰}$$

A deformação no aço de protensão encontra-se no regime elástico, sendo (Eq. 6.3):

$$\varepsilon_{pd,inic} = \frac{P_d}{E_p A_p} = \frac{3.250,0}{19500 \cdot 26,00} = 0,00641 = 6,41 \text{ ‰}$$

A deformação de **pré-alongamento** é: $\varepsilon_{pd,inic} + \varepsilon_{cd,enc} = 6,41 + 0,93 = 7,34 \text{ ‰}$

Cálculo por tentativa adotando a tensão na armadura de protensão correspondente ao M_{Rd} .

$$\text{a) primeira tentativa: } \sigma_{pd}^{(1)} = f_{pyd} = \frac{f_{pyk}}{\gamma_s} = \frac{1.710}{1,15} = 1.487,0 \text{ MPa}$$

Cálculo da posição da linha neutra considerando a hipótese da seção duplo T calculada como seção retangular (Eq. 6.10), com $b_w = b_f = 240 \text{ cm}$ e $\eta_c = 1,0$ para $f_{ck} \leq 40 \text{ MPa}$:

$$x = \frac{\sigma_{pd} A_p + f_{yd} A_s - f'_{yd} A'_s}{0,85\eta_c f_{cd} 0,8b_w} = \frac{1487 \cdot 26,00}{0,85 \frac{3,5}{1,3} 0,8 \cdot 240} = 8,80 \text{ cm}$$

Verificação: $0,8x = 0,8 \cdot 8,80 = 7,04 \text{ cm} > h_f = 5 \text{ cm}$, portanto, a seção deve ser calculada como T.

Como as nervuras têm largura variável (20,5 cm no topo e 13 cm na base, ver Figura 6.18), será adotada uma largura média para b_w de: $(20,5 + 13)/2 = 16,75 \text{ cm}$. Como são duas nervuras na seção duplo T, na Eq. 6.16 a largura b_w deve ser multiplicada por dois, e com $\eta_c = 1,0$ a altura x resulta:

$$x = \frac{\sigma_{pd} A_p + f_{yd} A_s - 0,85\eta_c f_{cd} (b_f - 2b_w) h_f}{(0,85\eta_c f_{cd} 0,8b_w) 2} = \frac{1487 \cdot 26,00 - 0,85(3,5/1,3)(240 - 2 \cdot 16,75)5}{\left(0,85 \frac{3,5}{1,3} 0,8 \cdot 16,75\right) 2} = 24,51 \text{ cm}$$

A largura b_w para a posição da linha neutra em 24,51 cm resulta 18,55 cm, como mostrada na Figura 6.18. Fazendo a largura média: $(20,5 + 18,55)/2 = 19,53 \text{ cm}$, e recalculando x com essa nova largura b_w , ao invés de 16,75 cm, tem-se:

$$x = \frac{148,7 \cdot 26,00 - 0,85 \left(3,5 / 1,3 \right) (240 - 2 \cdot 19,53) 5}{\left(0,85 \frac{3,5}{1,3} 0,8 \cdot 19,53 \right) 2}$$

$$x = 21,91 \text{ cm}$$

$$\text{e } 0,8 x = 0,8 \cdot 21,91 = 17,53 \text{ cm} > h_f = 5 \text{ cm}$$

confirma a seção T

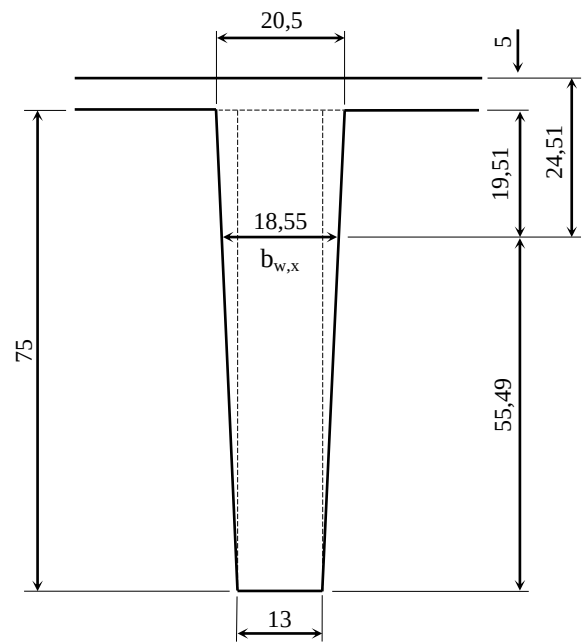


Figura 6.18 – Largura b_w para $x = 24,51 \text{ cm}$.

Deformação na armadura de protensão supondo domínio 3 ou 4 ($\varepsilon_{cd} = 3,5 \text{ ‰}$, Eq. 6.4):

$$\varepsilon_{pd, \text{últ}} = \varepsilon_{cd} \left(\frac{d_p - x}{x} \right) = 3,5 \left(\frac{68,5 - 21,91}{21,91} \right) = 7,44 \text{ ‰}$$

Como $\varepsilon_{pd, \text{últ}} = 7,44 \text{ ‰} < 10 \text{ ‰}$, confirma o domínio 3 ou o 4. A deformação de início de escoamento da armadura de protensão é (Figura 6.19):

$$\varepsilon_{pyd} = \frac{f_{pyd}}{E_p} = \frac{1.487}{195.000} = 0,00763 = 7,63 \text{ ‰}$$

e como $\varepsilon_{pd, \text{últ}} = 7,44 \text{ ‰} < \varepsilon_{pyd} = 7,63 \text{ ‰}$, o domínio é o 4. A deformação total na armadura de protensão é a soma do pré-alongamento com a deformação causada pelo carregamento sobre a viga (Eq. 6.5):

$$\varepsilon_{pd, \text{tot}} = \varepsilon_{pd, \text{inic}} + \varepsilon_{cd, \text{enc}} + \varepsilon_{pd, \text{últ}} = 6,41 + 0,93 + 7,44 = 14,78 \text{ ‰}$$

E o diagrama da Figura 6.19 mostra que, embora no domínio 4, a armadura de protensão está escoando, pois $\varepsilon_{pd, \text{tot}} = 14,78 \text{ ‰} > \varepsilon_{pyd} = 7,63 \text{ ‰}$, o que é devido à deformação inicial do pré-alongamento.

$$\text{Do diagrama da Figura 6.19: } \frac{y}{7,15} = \frac{165}{27,37} \rightarrow y = 43,1 \text{ MPa}$$

$$\text{Para } \varepsilon_{pd, \text{tot}} = 14,78 \text{ ‰ resulta a tensão na armadura: } \sigma_{pd} = 1.487,0 + 43,1 = 1.530,1 \text{ MPa}$$

$$\text{Erro de: } \left(\frac{1.530,1}{1.487,0} - 1 \right) 100 = 2,9 \% > 1 \% \rightarrow \text{não ok!}$$

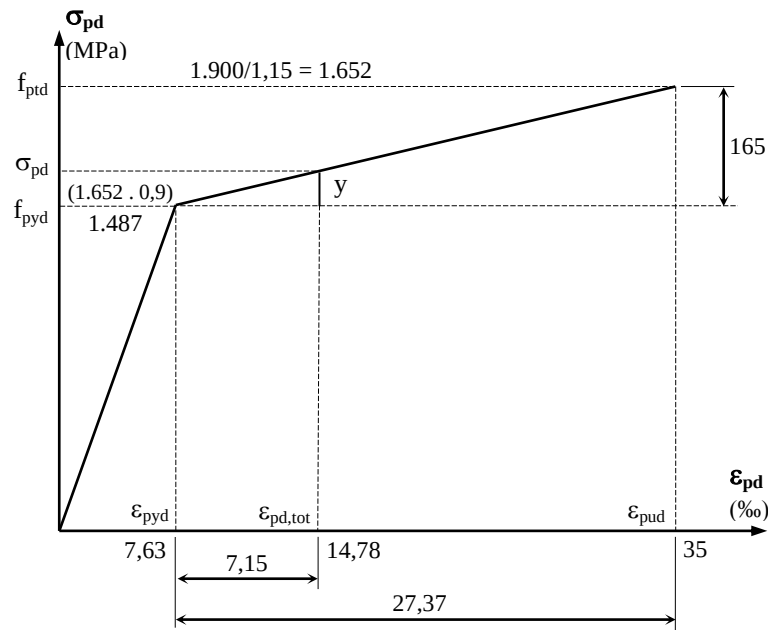


Figura 6.19 – Diagrama de tensões na armadura de protensão.

b) segunda tentativa: $\sigma_{pd}^{(2)} = 1.530,1 \text{ MPa}$

Fazendo de modo semelhante ao mostrado na Figura 6.18, a largura b_w para a posição da linha neutra em 21,91 cm resulta 18,81 cm. Tomando a largura média: $(20,5 + 18,81)/2 = 19,66 \text{ cm}$, e recalculando x com essa nova largura b_w , tem-se (Eq. 6.16):

$$x = \frac{\sigma_{pd} A_p + f_{yd} A_s - 0,85\eta_c f_{cd} (b_f - 2b_w) h_f}{(0,85\eta_c f_{cd} 0,8b_w) 2} = \frac{15301 \cdot 26,00 - 0,85(3,5/1,3)(240 - 2 \cdot 19,66) 5}{\left(0,85 \frac{3,5}{1,3} 0,8 \cdot 19,66\right) 2} = 23,37 \text{ cm}$$

Deformação na armadura de protensão supondo domínio 3 ou 4 ($\epsilon_{cd} = 3,5 \text{ ‰}$, Eq. 6.4):

$$\epsilon_{pd, \text{últ}} = \epsilon_{cd} \left(\frac{d_p - x}{x} \right) = 3,5 \left(\frac{68,5 - 23,37}{23,37} \right) = 6,76 \text{ ‰} \rightarrow \text{e sendo menor que } \epsilon_{pyd} = 7,63 \text{ ‰}, \text{ o domínio é o 4.}$$

A deformação total na armadura de protensão é a soma do **pré-alongamento** com a deformação causada pelo carregamento sobre a viga (Eq. 6.5):

$$\epsilon_{pd, \text{tot}} = \epsilon_{pd, \text{inic}} + \epsilon_{cd, \text{enc}} + \epsilon_{pd, \text{últ}} = 6,41 + 0,93 + 6,76 = 14,10 \text{ ‰}$$

$$\frac{y}{6,47} = \frac{165}{27,37} \rightarrow y = 39,00 \text{ MPa}$$

Para $\epsilon_{pd} = 10,37 \text{ ‰}$ resulta a tensão na armadura: $\sigma_{pd} = 1.487,0 + 39,00 = 1.526,0 \text{ MPa}$.

$$\text{Erro de: } \left(1 - \frac{1.526,0}{1.530,1} \right) 100 = 0,27 \% < 1 \% \rightarrow \text{ok!}$$

O momento fletor último é calculado com a Eq. 6.17 para seção T. Para um cálculo mais exato, com a tensão de $\sigma_{pd} = 1.526,0 \text{ MPa}$ a linha neutra x resulta 23,22 cm,¹⁸⁷ e:

¹⁸⁷ No cálculo do novo x foi mantida a largura média da nervura em 19,66 cm porque a diferença é muito pequena e desprezível.

$$M_{Rd} = 0,85f_{cd} \eta_c (b_f - b_w) h_f (0,4x - 0,5h_f) + \sigma_{pd} A_p (d_p - 0,4x) + f_{yd} A_s (d_s - 0,4x)$$

$$M_{Rd} = 0,85 \cdot 1,0 (3,5/1,3) \cdot (240 - 2 \cdot 19,66) 5 (0,4 \cdot 23,22 - 0,5 \cdot 5) + 152,6 \cdot 26,00 (68,5 - 0,4 \cdot 23,22)$$

$$M_{Rd} = 250.516 \text{ kN.cm} \rightarrow \text{deve-se ter } M_{Rd} \geq M_{Sd}$$

6.9.4 Exemplo 4 – Seção Retangular com Armadura Ativa e Análise da Ductilidade

Determinar o momento fletor último (M_{Rd}) de uma viga pré-moldada de seção retangular em Concreto Protendido (Figura 6.20), considerando que existe aderência entre a armadura de protensão e o concreto. São conhecidos:

- concreto C45, módulo de elasticidade secante $E_{cs} = 34 \text{ GPa}$, $\gamma_c = 1,4$;
- armadura ativa: $A_p = 8,00 \text{ cm}^2$ (8 cordoalhas CP190 RB $\phi 12,7 \text{ mm}$, $f_{ptk} = 1.900 \text{ MPa}$, $f_{pyk} = 1.710 \text{ MPa}$, $E_p = 196.000 \text{ MPa}$, $\varepsilon_{pud} = 35 \text{ ‰}$, $\gamma_s = 1,15$);
- armaduras passivas não consideradas no cálculo;
- força de protensão final (efetiva) $P_\infty = 960,0 \text{ kN}$;
- área da seção transversal bruta $A_c = 2.450 \text{ cm}^2$, momento de inércia $I_c = 1.000.417 \text{ cm}^4$;
- erro máximo admitido no cálculo de $M_{Rd} = 1 \text{ ‰}$.

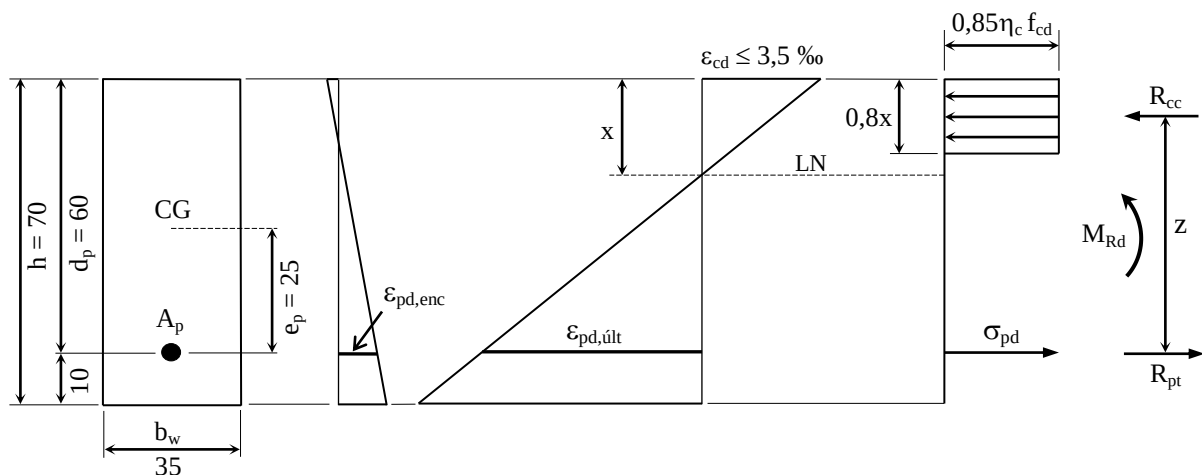


Figura 6.20 – Dimensões (cm) da seção transversal da viga retangular.¹⁸⁸

Resolução

Para o valor de cálculo da força de protensão P_d deve-se considerar $\gamma_p = 0,9$ (efeito favorável), porque quanto maior a força de protensão, maior será o momento fletor último. Existirá uma margem de segurança com a consideração de um momento fletor último (teórico) menor que aquele real apresentado pela viga, pois a verificação para a segurança é $M_{Rd} \geq M_{Sd}$. A força de protensão para cálculo da deformação de pré-alongamento, $P_d = \gamma_p P_\infty$ resulta:

$$P_d = 0,9 \cdot 960,0 = 864,0 \text{ kN}$$

A deformação $\varepsilon_{cd,enc}$ no concreto ao nível do CG da armadura de protensão é (Eq. 6.1):

$$\varepsilon_{cd,enc} = \frac{1}{E_c} \left(\frac{P_d}{A_c} + \frac{P_d e_p^2}{I_c} \right) = \frac{1}{3.400} \left(\frac{8640}{2.450} + \frac{8640 \cdot 25^2}{1.000.417} \right) = 0,00026 = 0,26 \text{ ‰}$$

No estágio da reta (a) o aço de protensão encontra-se ainda no regime elástico, e a deformação é (Eq. 6.3):

$$\varepsilon_{pd,inc} = \frac{P_d}{E_p A_p} = \frac{8640}{19.600 \cdot 8,00} = 0,00551 = 5,51 \text{ ‰}$$

¹⁸⁸ A deformação de encurtamento máxima no concreto ($\varepsilon_{cd} = 3,5 \text{ ‰}$) é válida somente para concretos do Grupo I de resistência.

A deformação de pré-alongamento é: $\varepsilon_{pd,inic} + \varepsilon_{cd,enc} = 5,51 + 0,26 = 5,77 \text{ ‰}$

O cálculo é feito por tentativa, adotando um valor para a tensão na armadura de protensão correspondente ao M_{Rd} :

$$\text{a) primeira tentativa: } \sigma_{pd}^{(1)} = f_{pyd} = \frac{f_{pyk}}{\gamma_s} = \frac{0,9 \cdot 1900}{1,15} = \frac{1.710}{1,15} = 1.487,0 \text{ MPa}$$

Posição da linha neutra para seção retangular (Eq. 6.10), com o valor η_c pois tem-se $f_{ck} > 40 \text{ MPa}$:

$$x = \frac{\sigma_{pd} A_p + f_{yd} A_s - f'_{yd} A'_s}{0,85 \eta_c f_{cd} 0,8 b_w} = \frac{1487 \cdot 8,00}{0,85 \cdot 0,961 \cdot \frac{4,5}{1,4} \cdot 0,8 \cdot 35} = 16,18 \text{ cm}$$

para concretos com $f_{ck} > 40 \text{ MPa}$ o valor de η_c é:

$$\eta_c = \left(\frac{40}{f_{ck}} \right)^{1/3} = \left(\frac{40}{45} \right)^{1/3} = 0,961$$

Deformação na armadura de protensão supondo domínio 3 ou 4 ($\varepsilon_{cd} = 3,5 \text{ ‰}$, Eq. 6.4):

$$\varepsilon_{pd,ult} = \varepsilon_{cd} \left(\frac{d_p - x}{x} \right) = 3,5 \left(\frac{60 - 16,18}{16,18} \right) = 9,48 \text{ ‰}$$

Como $\varepsilon_{pd,ult} = 9,48 \text{ ‰} < 10 \text{ ‰}$ o domínio é o 3 ou o 4. A deformação de alongamento total na armadura de protensão é (Eq. 6.5):

$$\varepsilon_{pd,tot} = \varepsilon_{pd,inic} + \varepsilon_{cd,enc} + \varepsilon_{pd,ult} = 5,51 + 0,26 + 9,48 = 15,25 \text{ ‰}$$

Considerando o diagrama $\sigma \times \varepsilon$ simplificado adotado pela NBR 6118 para os aços de protensão, e com a deformação máxima de alongamento $\varepsilon_{pud} = 35 \text{ ‰}$, mostrado na Figura 6.21, a tensão na armadura de protensão pode ser calculada. Antes é necessário determinar a deformação de início de escoamento do aço de protensão:

$$\sigma = \varepsilon \cdot E \quad \rightarrow \quad \varepsilon_{pyd} = \frac{f_{pyd}}{E_p} = \frac{1.487}{196.000} = 0,00759 = 7,59 \text{ ‰}$$

Como $\varepsilon_{pd,ult} = 9,48 \text{ ‰} > \varepsilon_{pyd} = 7,59 \text{ ‰}$ o domínio é o 3. Do diagrama da Figura 6.21 tem-se:

$$\frac{y}{7,66} = \frac{165}{27,41} \quad \rightarrow \quad y = 46,1 \text{ MPa}$$

Para $\varepsilon_{pd,tot} = 15,25 \text{ ‰}$ resulta a tensão na armadura de protensão: $\sigma_{pd} = 1.487,0 + 46,1 = 1.533,1 \text{ MPa}$

$\sigma_{pd}^{(1)} = 1.487,0 \text{ MPa} \neq \sigma_{pd} = 1.533,1 \text{ MPa}$, sendo o erro de:

$$\left(\frac{1.533,1}{1.487,0} - 1 \right) 100 = 3,1 \% > 1 \%$$

portanto, como o erro da primeira tentativa superou o erro máximo admitido, deve ser feita nova tentativa para diminuir o erro.

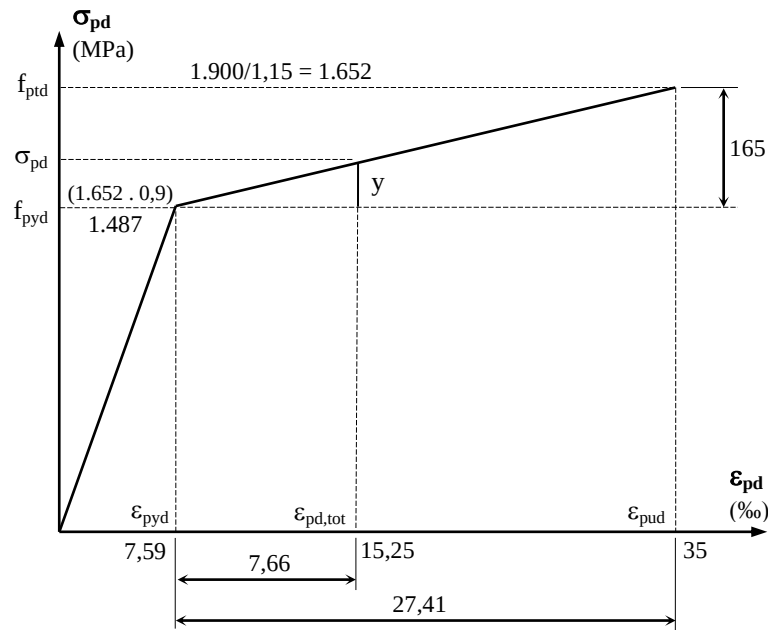


Figura 6.21 – Diagrama tensão x deformação do aço da armadura de protensão e determinação da tensão σ_{pd} .

b) segunda tentativa, utilizando a tensão resultante da primeira tentativa: $\sigma_{pd}^{(2)} = 1.533,1 \text{ MPa}$

Posição da linha neutra para seção retangular (Eq. 6.10), com $\eta_c = 0,961$ pois $f_{ck} > 40 \text{ MPa}$:

$$x = \frac{\sigma_{pd} A_p + f_{yd} A_s - f'_{yd} A'_s}{0,85 \eta_c f_{cd} 0,8 b_w} = \frac{1533,1 \cdot 8,00}{0,85 \cdot 0,961 \cdot \frac{4,5}{1,4} \cdot 0,8 \cdot 35} = 16,68 \text{ cm}$$

Deformação na armadura de protensão, supondo domínio 3 ou 4, com a equação de compatibilidade de deformações (Eq. 6.12), equivalente a Eq. 6.4:

$$\frac{\varepsilon_{cd}}{\varepsilon_{pd, \text{últ}}} = \frac{x}{d_p - x} \rightarrow \frac{3,5}{\varepsilon_{pd, \text{últ}}} = \frac{16,68}{60 - 16,68} \rightarrow \varepsilon_{pd, \text{últ}} = 9,09 \text{ ‰}$$

como $\varepsilon_{pyd} = 7,59 \text{ ‰} < \varepsilon_{pd, \text{últ}} = 9,09 \text{ ‰} < 10 \text{ ‰}$, o domínio é o 3.

A deformação total na armadura de protensão é:

$$\varepsilon_{pd, \text{tot}} = \varepsilon_{pd, \text{inic}} + \varepsilon_{cd, \text{enc}} + \varepsilon_{pd, \text{últ}} = 5,51 + 0,26 + 9,09 = 14,86 \text{ ‰}$$

$$\text{Do diagrama da Figura 6.22: } \frac{y}{7,27} = \frac{165}{27,41} \rightarrow y = 43,8 \text{ MPa}$$

Para $\varepsilon_{pd, \text{tot}} = 14,86 \text{ ‰}$ resulta a tensão: $\sigma_{pd} = 1.487,0 + 43,8 = 1.530,8 \text{ MPa}$

$$\text{Erro de: } \left(\frac{1.533,1}{1.530,8} - 1 \right) 100 = 0,15 \% < 1 \% \rightarrow \text{ok!}$$

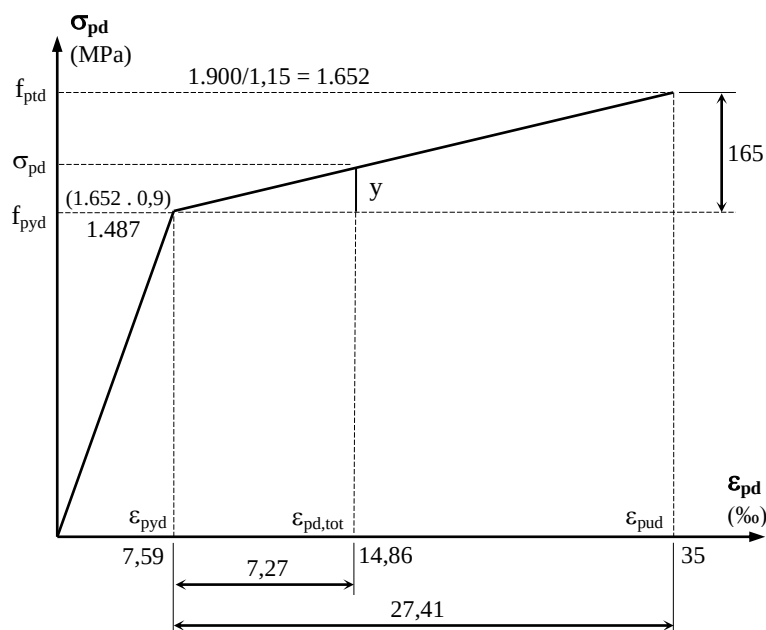


Figura 6.22 – Diagrama de tensões na armadura de protensão.

E como é pequena a diferença entre as duas últimas tensões calculadas, não há necessidade de recalculer um novo valor para x com a tensão de 1.530,8 MPa.¹⁸⁹ O momento fletor último para a seção retangular é (Eq. 6.11):

$$M_{Rd} = \sigma_{pd} A_p (d_p - 0,4x) + f_{yd} A_s (d_s - 0,4x) + f'_{yd} A'_s (0,4x - d')$$

$$M_{Rd} = 153,08 \cdot 8,00 (60 - 0,4 \cdot 16,68) = 65.308 \text{ kN.cm} \rightarrow \text{deve-se ter } M_{Rd} \geq M_{Sd}$$

Quanto à questão da ductilidade tem-se $x/d = 16,68/60 = 0,28$, que atende com folga ao limite da NBR 6118, de 0,45 para $f_{ck} \leq 50$ MPa (Eq. 6.18). O valor limite $x \leq 0,3d$ também é atendido, pois $x = 16,68 \text{ cm} < 0,3d = 0,3 \cdot 60 = 18,0 \text{ cm}$, o que é confirmado pelos valores das curvaturas (Eq. 6.20 e Eq. 6.19):^[1]

$$\kappa_{ud,min} = \frac{3,33\varepsilon_{cd}}{d} = \frac{3,33 \cdot 0,0035}{60} = 1,94 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1}$$

$$\kappa_{ud} = \frac{\varepsilon_{cd}}{x} = \frac{0,0035}{16,68} = 2,10 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1} \geq \kappa_{ud,min} = 1,94 \cdot 10^{-4} \rightarrow \text{ok!}$$

6.9.5 Exemplo 5 – Seção Retangular com Armaduras Ativa e Passiva A_s e Análise da Ductilidade

Para a viga do Exemplo 4 (item 6.9.4) determinar o momento fletor último (M_{Rd}) considerando o acréscimo de armadura passiva tracionada $A_s = 14,00 \text{ cm}^2$, composta por aço CA-50 ($f_{yk} = 500$ MPa, $f_{yd} = 435$ MPa, $\varepsilon_{yd} = 2,07$ ‰, $d_s = 65$ cm), conforme Figura 6.23.

Resolução

As deformações iniciais são as mesmas do Exemplo 4 (item 6.9.4): $\varepsilon_{cd,enc} = 0,26$ ‰ e $\varepsilon_{pd,inic} = 5,51$ ‰, portanto com pré-alongamento de 5,77 ‰. O cálculo é feito por tentativa do mesmo modo que no Exemplo 4, adotando um valor para a tensão na armadura de protensão (σ_{pd}) correspondente ao M_{Rd} .

¹⁸⁹ No caso de diferenças maiores pode-se recalculer x para uma maior precisão no cálculo de M_{Rd} .

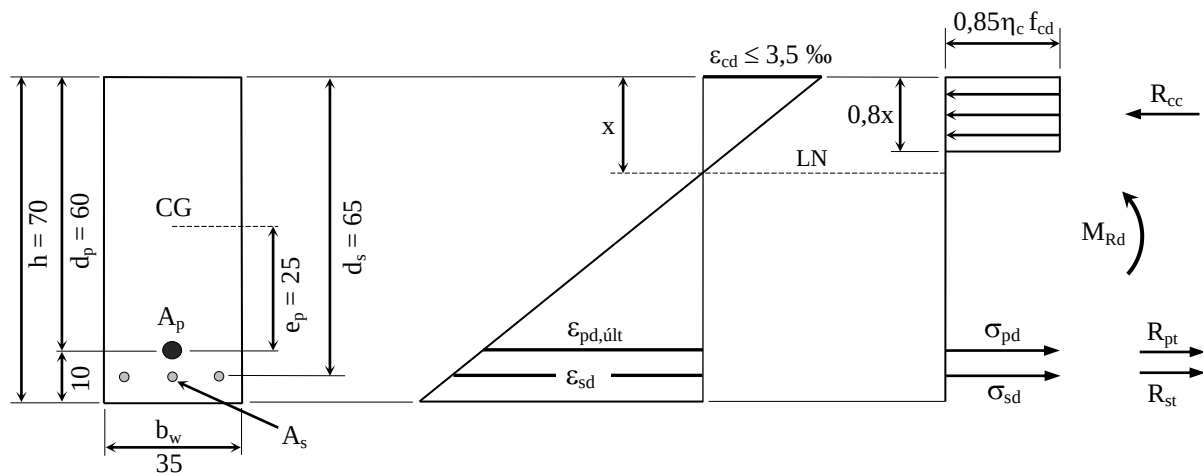


Figura 6.23 – Dimensões (cm) da seção transversal da viga e diagramas de deformação e tensão.¹⁹⁰

a) primeira tentativa: $\sigma_{pd}^{(1)} = f_{pyd} = 1.487,0 \text{ MPa}$

Cálculo da posição da linha neutra para seção retangular (Eq. 6.10), com a hipótese de que a armadura passiva A_s escoou ($\sigma_{sd} = f_{yd} = 43,5 \text{ kN/cm}^2$), e com o valor η_c pois tem-se $f_{ck} > 40 \text{ MPa}$:

$$x = \frac{\sigma_{pd} A_p + f_{yd} A_s - f'_{yd} A'_s}{0,85\eta_c f_{cd} 0,8 b_w} = \frac{1487 \cdot 8,00 + 43,5 \cdot 14,00}{0,85 \cdot 0,961 \cdot \frac{4,5}{1,4} \cdot 0,8 \cdot 35} = 24,47 \text{ cm}$$

para concretos com $f_{ck} > 40 \text{ MPa}$ o valor de η_c é:

$$\eta_c = \left(\frac{40}{f_{ck}} \right)^{1/3} = \left(\frac{40}{45} \right)^{1/3} = 0,961$$

Deformação na armadura de protensão supondo domínio 3 ou 4 ($\epsilon_{cd} = 3,5 \text{ ‰}$, Eq. 6.4):

$$\epsilon_{pd,últ} = \epsilon_{cd} \left(\frac{d_p - x}{x} \right) = 3,5 \left(\frac{60 - 24,47}{24,47} \right) = 5,08 \text{ ‰}$$

Como $\epsilon_{pd,últ} = 5,08 \text{ ‰} < \epsilon_{pyd} = 7,59 \text{ ‰}$, o domínio é o 4 (Figura 6.24). E como se pode observar na Figura 6.23, a deformação ϵ_{sd} na armadura A_s é maior que $\epsilon_{pd,últ}$, o que significa que é também maior que $\epsilon_{yd} = 2,07 \text{ ‰}$, portanto, a armadura A_s está escoando e implica que a tensão σ_{sd} é $f_{yd} = 435 \text{ MPa}$, como aplicada no cálculo de x . A deformação de alongamento total na armadura de protensão é (Eq. 6.5):

$$\epsilon_{pd,tot} = \epsilon_{pd,inic} + \epsilon_{cd,enc} + \epsilon_{pd,últ} = 5,51 + 0,26 + 5,08 = 10,85 \text{ ‰}$$

$$\text{Do diagrama da Figura 6.24 tem-se: } \frac{y}{3,26} = \frac{165}{27,41} \rightarrow y = 19,6 \text{ MPa}$$

Para $\epsilon_{pd,tot} = 10,85 \text{ ‰}$ resulta a tensão na armadura de protensão: $\sigma_{pd} = 1.487,0 + 19,6 = 1.506,6 \text{ MPa}$

$\sigma_{pd}^{(1)} = 1.487,0 \text{ MPa} \neq \sigma_{pd} = 1.506,6 \text{ MPa}$, sendo o erro de:

$$\left(\frac{1.506,6}{1.487,0} - 1 \right) 100 = 1,3 \% > 1 \%$$

¹⁹⁰ A deformação de encurtamento máxima no concreto ($\epsilon_{cd} = 3,5 \text{ ‰}$) é válida somente para concretos do Grupo I de resistência.

portanto, como o erro da primeira tentativa superou o erro máximo admitido, deve ser feita nova tentativa para diminuir o erro.

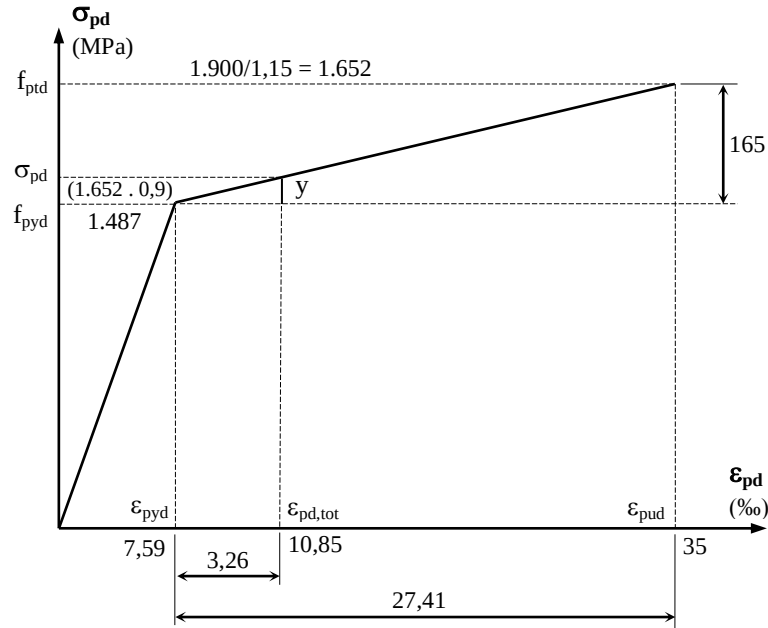


Figura 6.24 – Diagrama $\sigma \times \varepsilon$ do aço da armadura de protensão e determinação da tensão σ_{pd} .

b) segunda tentativa, utilizando a tensão resultante da primeira tentativa: $\sigma_{pd}^{(2)} = 1.506,6 \text{ MPa}$

Posição da linha neutra para seção retangular (Eq. 6.10), com o valor $\eta_c = 0,961$ pois tem-se $f_{ck} > 40 \text{ MPa}$:

$$x = \frac{\sigma_{pd} A_p + f_{yd} A_s - f'_{yd} A'_s}{0,85 \eta_c f_{cd} 0,8 b_w} = \frac{150,66 \cdot 8,00 + 43,5 \cdot 14,00}{0,85 \cdot 0,961 \cdot \frac{4,5}{1,4} \cdot 0,8 \cdot 35} = 24,68 \text{ cm}$$

Deformação na armadura de protensão supondo domínio 3 ou 4 ($\varepsilon_{cd} = 3,5 \text{ ‰}$, Eq. 6.4):

$$\varepsilon_{pd, \text{últ}} = \varepsilon_{cd} \left(\frac{d_p - x}{x} \right) = 3,5 \left(\frac{60 - 24,68}{24,68} \right) = 5,01 \text{ ‰}$$

Como $\varepsilon_{pd, \text{últ}} = 5,01 \text{ ‰} < \varepsilon_{pyd} = 7,59 \text{ ‰}$, o domínio é o 4. E como já comentado, a deformação ε_{sd} é maior que $\varepsilon_{yd} = 2,07 \text{ ‰}$, e assim $\sigma_{sd} = f_{yd} = 435 \text{ MPa}$. A deformação de alongamento total na armadura de protensão é (Eq. 6.5):

$$\varepsilon_{pd, \text{tot}} = \varepsilon_{pd, \text{inic}} + \varepsilon_{cd, \text{enc}} + \varepsilon_{pd, \text{últ}} = 5,51 + 0,26 + 5,01 = 10,78 \text{ ‰}$$

A tensão na armadura de protensão resulta:

$$\frac{y}{(10,78 - 7,59)} = \frac{165}{27,41} \rightarrow y = 19,2 \text{ MPa}$$

Tensão na armadura de protensão: $\sigma_{pd} = 1.487,0 + 19,2 = 1.506,2 \text{ MPa}$, que é muito próxima do valor anterior de $1.506,6 \text{ MPa}$, de modo que o erro máximo foi atendido.

Nota-se que o acréscimo de armadura passiva tracionada (A_s) deste exemplo diminuiu a tensão na armadura de protensão do Exemplo anterior, de $1.530,8 \text{ MPa}$. A posição da linha neutra foi aumentada de $16,68 \text{ cm}$ para $24,68 \text{ cm}$. O momento fletor último é aumentado com o acréscimo de armadura A_s (Eq. 6.11):

$$M_{Rd} = \sigma_{pd} A_p (d_p - 0,4x) + f_{yd} A_s (d_s - 0,4x) + f'_{yd} A'_s (0,4x - d')$$

$$M_{Rd} = 150,62 \cdot 8,00 (60 - 0,4 \cdot 24,68) + 43,5 \cdot 14,00 (65 - 0,4 \cdot 24,68) = 93.975 \text{ kN.cm} \rightarrow M_{Rd} \geq M_{Sd}$$

O acréscimo de armadura passiva tracionada A_s aumentou o momento fletor último de forma significativa, em 43,9 % (93.975/65.308), o que mostra que uma forma eficiente de aumentar o momento fletor último de vigas é acrescentar armadura passiva tracionada.

Para análise da ductilidade é necessário determinar a altura útil efetiva (Eq. 6.21):

$$d_{ef} = \frac{\sigma_{pd} A_p d_p + \sigma_{sd} A_s d_s}{\sigma_{pd} A_p + \sigma_{sd} A_s} = \frac{150,62 \cdot 8,00 \cdot 60 + 43,5 \cdot 14,00 \cdot 65}{150,62 \cdot 8,00 + 43,5 \cdot 14,00} = 61,68 \text{ cm}$$

Resulta $x/d_{ef} = 24,68/61,68 = 0,40$, que atende ao limite da NBR 6118, de 0,45 para $f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$ (Eq. 6.18). Porém, o valor limite $x \leq 0,3d_{ef}$ não é atendido, pois $x = 24,68 > 0,3d_{ef} = 0,3 \cdot 61,68 = 18,50 \text{ cm}$, e a seção por este critério não é dúctil. Isso é confirmado pelos valores das curvaturas (Eq. 6.20 e Eq. 6.19):^[1]

$$\kappa_{ud,min} = \frac{3,33\epsilon_{cd}}{d_{ef}} = \frac{3,33 \cdot 0,0035}{61,68} = 1,89 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1}$$

$$\kappa_{ud} = \frac{\epsilon_{cd}}{x} = \frac{0,0035}{24,68} = 1,42 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1} \geq \kappa_{ud,min} = 1,89 \cdot 10^{-4} \rightarrow \text{não ok!}$$

O acréscimo da armadura passiva tracionada A_s neste exemplo diminuiu a curvatura em 32,4 % $[(1,42/2,10) - 1]100$. Para aumentar a ductilidade pode-se aumentar a altura h da seção, ou acrescentar armadura passiva comprimida (A'_s), como será demonstrado no exemplo seguinte.

6.9.6 Exemplo 6 – Seção Retangular com Armaduras Ativa e Passivas A_s e A'_s e Análise da Ductilidade

Para a viga do Exemplo 5 (item 6.9.5) determinar o momento fletor último (M_{Rd}) considerando o acréscimo de armadura passiva comprimida $A'_s = 8,00 \text{ cm}^2$, composta por aço CA-50 ($f_{yk} = 500 \text{ MPa}$, $f_{yd} = 435 \text{ MPa}$, $\epsilon_{yd} = 2,07 \text{ ‰}$, $d' = 5 \text{ cm}$), Figura 6.25.

Resolução

As deformações iniciais são as mesmas dos Exemplos 4 e 5: $\epsilon_{cd,enc} = 0,26 \text{ ‰}$ e $\epsilon_{pd,inic} = 5,51 \text{ ‰}$. O acréscimo de armadura passiva comprimida leva ao aumento da tensão na armadura de protensão, de modo que como primeira tentativa na determinação da tensão será adotado um valor um pouco superior à tensão do Exemplo anterior, de 1.506,2 MPa.

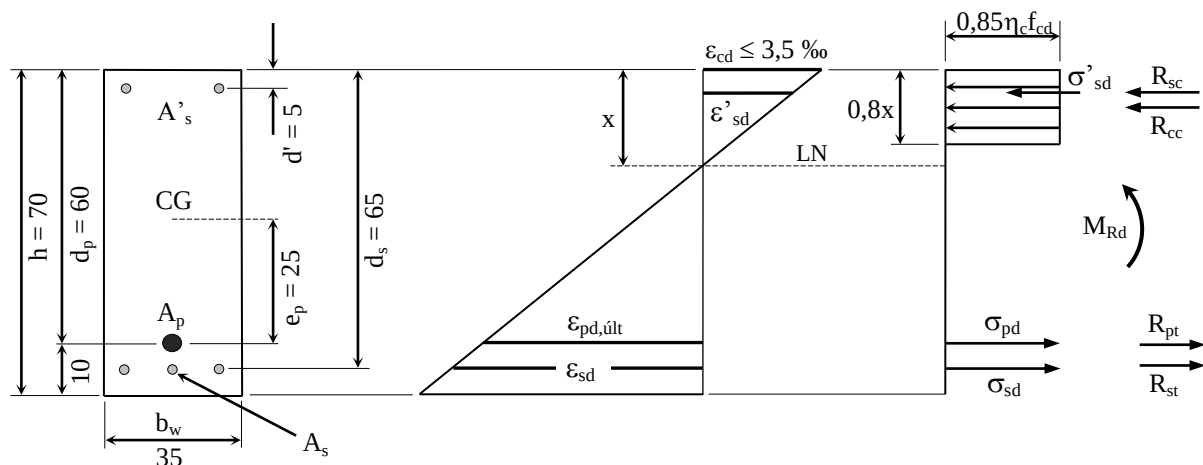


Figura 6.25 – Dimensões (cm) da seção transversal da viga e diagramas de deformação e tensão.

a) primeira tentativa: $\sigma_{pd}^{(1)} = 1.525,0 \text{ MPa}$

Cálculo da posição da linha neutra para seção retangular (Eq. 6.10), e com a hipótese de que as armaduras passivas A_s e A'_s escoam ($\sigma_{sd} = \sigma'_{sd} = f_{yd} = f'_{yd} = 43,5 \text{ kN/cm}^2$), com $\eta_c = 0,961$ pois tem-se $f_{ck} > 40 \text{ MPa}$:

$$x = \frac{\sigma_{pd} A_p + f_{yd} A_s - f'_{yd} A'_s}{0,85 \eta_c f_{cd} 0,8 b_w} = \frac{1525 \cdot 8,00 + 43,5 \cdot 14,00 - 43,5 \cdot 8,00}{0,85 \cdot 0,961 \cdot \frac{4,5}{1,4} \cdot 0,8 \cdot 35} = 20,15 \text{ cm}$$

Deformação na armadura de protensão supondo domínio 3 ou 4 ($\varepsilon_{cd} = 3,5 \text{ ‰}$, Eq. 6.4):

$$\varepsilon_{pd, \text{últ}} = \varepsilon_{cd} \left(\frac{d_p - x}{x} \right) = 3,5 \left(\frac{60 - 20,15}{20,15} \right) = 6,92 \text{ ‰}$$

Como $\varepsilon_{pd, \text{últ}} = 6,92 \text{ ‰} < \varepsilon_{pyd} = 7,59 \text{ ‰}$, o domínio é o 4 (Figura 6.26). E como se pode observar na Figura 6.26, a deformação ε_{sd} na armadura A_s é maior que $\varepsilon_{pd, \text{últ}}$, portanto maior que $\varepsilon_{yd} = 2,07 \text{ ‰}$, o que significa que a armadura A_s está realmente escoando. A deformação de alongamento total na armadura de protensão é (Eq. 6.5):

$$\varepsilon_{pd, \text{tot}} = \varepsilon_{pd, \text{inic}} + \varepsilon_{cd, \text{enc}} + \varepsilon_{pd, \text{últ}} = 5,51 + 0,26 + 6,92 = 12,69 \text{ ‰}$$

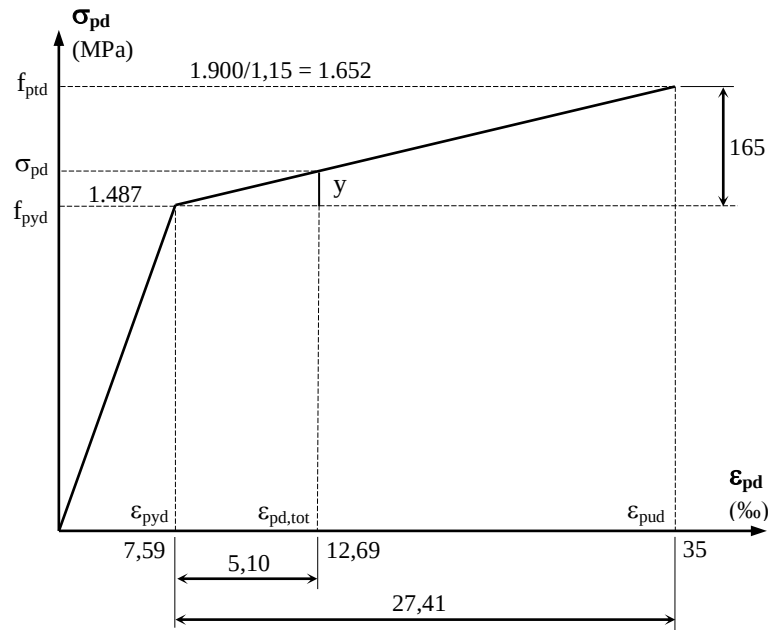


Figura 6.26 – Diagrama $\sigma \times \varepsilon$ do aço da armadura de protensão e determinação da tensão σ_{pd} .

Do diagrama da Figura 6.26 tem-se: $\frac{y}{5,10} = \frac{165}{27,41} \rightarrow y = 30,7 \text{ MPa}$

Para $\varepsilon_{pd, \text{tot}} = 13,12 \text{ ‰}$ resulta a tensão na armadura de protensão: $\sigma_{pd} = 1.487,0 + 30,7 = 1.517,7 \text{ MPa}$

Tem-se $\sigma_{pd} = 1.517,7 \text{ MPa} \approx \sigma_{pd}^{(1)} = 1.525,0 \text{ MPa}$ (erro de 0,5 %), tensão um pouco superior a 1.506,2 MPa do Exemplo anterior, devido ao acréscimo de A'_s , que causou também a diminuição da altura da linha neutra, de 24,68 cm para 20,15 cm.

Verificação da tensão na armadura passiva comprimida (Eq. 6.14):

$$\frac{\varepsilon_{cd}}{\varepsilon'_{sd}} = \frac{x}{x - d'} \rightarrow \frac{3,5}{\varepsilon'_{sd}} = \frac{20,15}{20,15 - 5} \rightarrow \varepsilon'_{sd} = 2,63 \text{ ‰} > \varepsilon_{yd} = 2,07 \text{ ‰}$$

portanto, a armadura passiva comprimida A'_s também está escoando e a tensão é $f_{yd} = f_{yd} = 43,5 \text{ kN/cm}^2$. O momento fletor último é (Eq. 6.11):

$$M_{Rd} = \sigma_{pd} A_p (d_p - 0,4x) + f_{yd} A_s (d_s - 0,4x) + f_{yd} A'_s (0,4x - d')$$

$$M_{Rd} = 151,77 \cdot 8,00 (60 - 0,4 \cdot 20,15) + 43,5 \cdot 14,00 (65 - 0,4 \cdot 20,15) + 43,5 \cdot 8,00 (0,4 \cdot 20,15 - 5)$$

$$M_{Rd} = 98.805 \text{ kN.cm} \rightarrow \text{deve-se ter } M_{Rd} \geq M_{Sd}$$

A altura útil efetiva d_{ef} (Eq. 6.21) altera-se pouco em relação ao valor do Exemplo anterior, sendo:

$$d_{ef} = \frac{\sigma_{pd} A_p d_p + \sigma_{sd} A_s d_s}{\sigma_{pd} A_p + \sigma_{sd} A_s} = \frac{151,77 \cdot 8,00 \cdot 60 + 43,5 \cdot 14,00 \cdot 65}{151,77 \cdot 8,00 + 43,5 \cdot 14,00} = 61,67 \text{ cm}$$

Tem-se $x/d_{ef} = 20,15/61,67 = 0,33$, que atende com folga ao limite da NBR 6118, de 0,45 para $f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$ (Eq. 6.18). Porém, o valor limite $x \leq 0,3d_{ef}$ não é atendido, pois tem-se $x = 20,15 \text{ cm} > 0,3d_{ef} = 0,3 \cdot 61,67 = 18,50 \text{ cm}$, e conclui-se que por este critério a seção não é dúctil. Isso é confirmado pelos valores das curvaturas (Eq. 6.20 e Eq. 6.19):^[1]

$$\kappa_{ud,min} = \frac{3,33\varepsilon_{cd}}{d_{ef}} = \frac{3,33 \cdot 0,0035}{61,67} = 1,89 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1}$$

$$\kappa_{ud} = \frac{\varepsilon_{cd}}{x} = \frac{0,0035}{20,15} = 1,74 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1} \geq \kappa_{ud,min} = 1,89 \cdot 10^{-4} \rightarrow \text{não ok!}$$

O acréscimo de armadura passiva comprimida A'_s na viga do Exemplo 5 aumentou a curvatura em 22,5 % (1,74/1,42) e melhorou a ductilidade, mas o momento fletor último aumentou apenas 5,1 % (98.805/93.975), o que mostra que uma forma eficiente de aumentar o momento fletor último de vigas é acrescentar armadura passiva tracionada (A_s), com a armadura passiva comprimida exercendo pequena influência neste aumento.

6.10 Dimensionamento de Armaduras Passivas

Em uma metodologia de projeto são determinadas a força de protensão final (P_∞), a excentricidade (e_p) e a quantidade de armadura de protensão (A_p), que atendam às exigências dos Estados-Limites de Serviço, como flecha e abertura de fissuras (ou a eliminação delas), para que fiquem abaixo de valores máximos especificados pelas normas. Com as condições da peça em serviço atendidas, a segurança deve ser verificada com a comparação entre o momento fletor último (M_{Rd}) e o máximo momento fletor solicitante (M_{Sd}) proveniente dos carregamentos externos. Dependendo do projeto, a armadura de protensão A_p determinada para atender às exigências em serviço, pode não ser suficiente para proporcionar a resistência necessária, e neste caso o momento fletor resistente pode ser aumentado com o acréscimo de armaduras passivas, tracionada e comprimida. A armadura passiva comprimida também aumenta a ductilidade da peça.^[1]

6.10.1 Seção Retangular com Armadura Passiva Tracionada

Uma viga protendida biapoiada de seção retangular está mostrada na Figura 6.27, com parâmetros relativos aos concretos do Grupo I de resistência, para a situação do ELU. O momento fletor último ou resistente da seção mostrada na Figura 6.27a pode ser calculado como:

$$M_{Rd,1} = \sigma_{pd,1} A_p \left(d_p - \frac{0,8x_1}{2} \right) \quad \text{Eq. 6.22}$$

$\sigma_{pd,1}$ = tensão na armadura de protensão na carga última (ruptura).

Se o momento fletor último $M_{Rd,1}$ é maior ou igual ao momento fletor solicitante M_{Sd} , nenhuma armadura passiva adicional é necessária, porém, se $M_{Rd,1}$ é menor que M_{Sd} a seção não apresenta a resistência requerida e neste caso uma possível solução é acrescentar a armadura passiva A_s . A quantidade de armadura A_s pode ser calculada fazendo o momento fletor último M_{Rd} (ver a seção da Figura 6.27b) igual M_{Sd} . Com x suficientemente pequeno para assegurar ductilidade à viga, a armadura A_s escoia ($\varepsilon_{sd} \geq \varepsilon_{yd}$), e $\sigma_{sd} = f_{yd}$. Assumindo que a tensão na armadura de protensão permaneça constante com o acréscimo de A_s , uma primeira estimativa para o valor de A_s é:

$$A_s = \frac{M_{Sd} - M_{Rd,1}}{f_{yd} z_2} \quad \text{Eq. 6.23}$$

com z_2 sendo o braço de alavanca entre a força resultante da armadura A_s e a resultante do concreto comprimido que resulta do aumento da altura do diagrama retangular simplificado, ou seja, a resultante relativa a $x - x_1$ (ver Figura 6.27b):

$$z_2 = 0,9 (d_s - 0,8x_1) \quad \text{Eq. 6.24}$$

Além da resistência à flexão é importante verificar também se a peça apresenta comportamento dúctil, como apresentado no item 6.7.

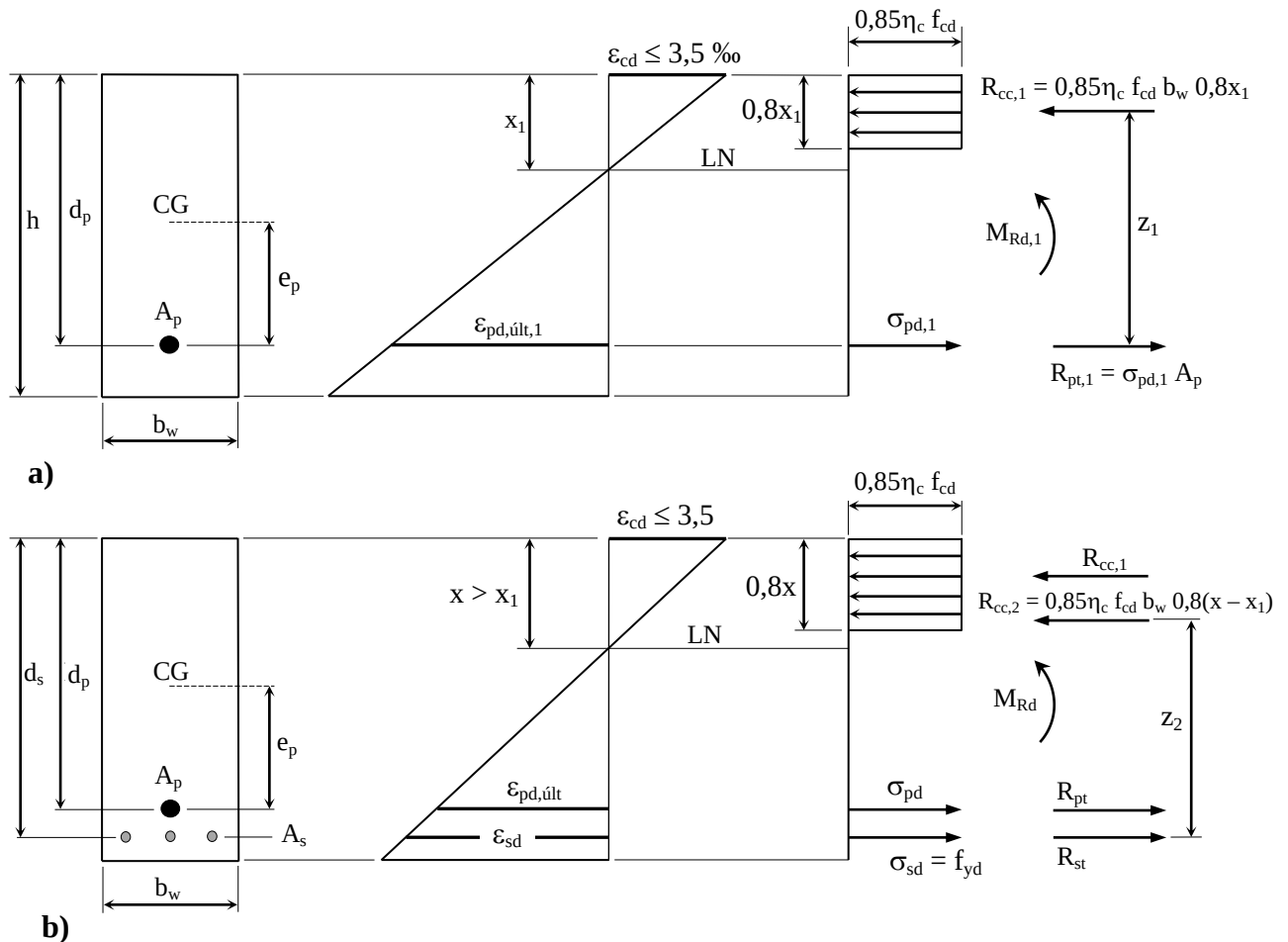


Figura 6.27 – Tensões e deformações em viga retangular protendida, para concretos com $f_{ck} \leq 40 \text{ MPa}$: a) seção apenas com armadura de protensão (A_p); b) seção com armadura de protensão e armadura passiva tracionada (A_s).^[1]

6.10.1.1 Exemplo 1 – Dimensionamento de Armadura A_s em Viga de Seção Retangular

Considerando os mesmos dados do Exemplo 4 (item 6.9.4) dimensionar a quantidade de armadura passiva tracionada A_s adicional se o momento fletor solicitante da viga for $M_{Sd} = 90.000 \text{ kN.cm}$, com $d_s = 65 \text{ cm}$ e aço CA-50 ($f_{yd} = 435 \text{ MPa}$).

Resolução

A viga do Exemplo 4 (item 6.9.4), apresentada novamente na Figura 6.28, apresentou momento fletor último $M_{Rd} = M_{Rd,1} = 65.308 \text{ kN.cm}$. A seção apresentou altura da linha neutra $x_1 = 16,68 \text{ cm}$, sendo classificada como dúctil, pois $x_1/d = 16,68/60 = 0,28 \leq 0,3$. No caso de se acrescentar armadura A_s o braço de alavanca z_2 (ver Figura 6.27b) é (Eq. 6.24):

$$z_2 = 0,9 (d_s - 0,8x_1) = 0,9 (65 - 0,8 \cdot 16,68) = 46,49 \text{ cm}$$

A armadura passiva A_s é (Eq. 6.23):

$$A_s = \frac{M_{Sd} - M_{Rd,1}}{f_{yd} z_2} = \frac{90.000 - 65.308}{435 \cdot 46,49} = 12,21 \text{ cm}^2 \rightarrow \text{pode-se acrescentar } 6 \phi 16 \text{ mm } (12,00 \text{ cm}^2)$$

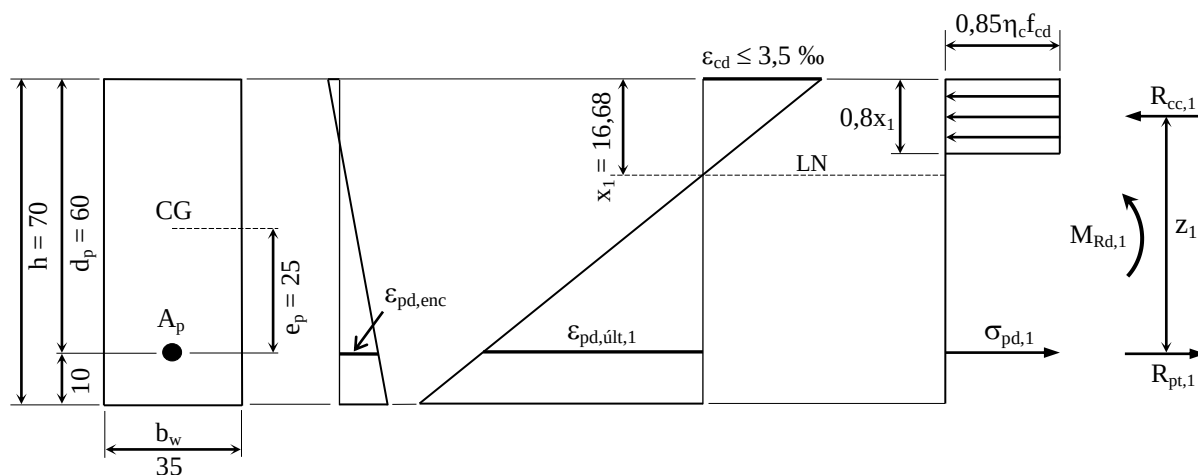


Figura 6.28 – Dimensões (cm) da seção transversal da viga retangular, para concreto $f_{ck} = 45 \text{ MPa}$.

A seção deve ter as condições de ductilidade verificada com as armaduras previstas conforme o cálculo acima, e caso necessário a seção deve ser modificada, como por exemplo acrescentando-se armadura passiva comprimida para aumentar a ductilidade, como mostrado no Exemplo do item 6.9.6.

6.10.1.2 Exemplo 2 – Dimensionamento de Armadura A_s em Seção Retangular

Para uma viga protendida de seção retangular, com aderência entre a armadura de protensão e o concreto, determinar a quantidade de armadura passiva A_s necessária para a viga resistir ao momento fletor solicitante (Figura 6.29). Dados:

- concreto C35, módulo elasticidade secante $E_{cs} = 29 \text{ GPa}$, $\gamma_c = 1,4$;
- armadura ativa: $A_p = 11,20 \text{ cm}^2$ (8 cordoalhas CP190 RB $\phi 15,2 \text{ mm}$, $f_{ptk} = 1.900 \text{ MPa}$, $f_{pyk} = 1.710 \text{ MPa}$, $E_p = 195.000 \text{ MPa}$);
- armadura passiva tracionada $A_s = ?$ (CA-50, $f_{yk} = 500 \text{ MPa}$, $f_{yd} = 435 \text{ MPa}$, $\epsilon_{yd} = 2,07 \%$, $\gamma_s = 1,15$);
- $P_\infty = 1.250,0 \text{ kN}$;
- $M_{Sd} = 210.000 \text{ kN.cm}$;
- $A_c = 4.800 \text{ cm}^2$, $I_c = 5.760.000 \text{ cm}^4$;
- erro máximo no cálculo de $M_{Rd} = 1 \%$.

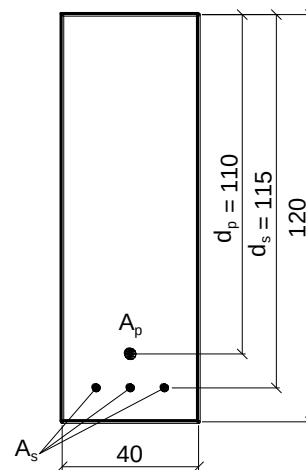


Figura 6.29 – Dimensões (cm) da seção transversal da viga retangular.

Resolução

A resolução será feita empregando as equações do item 6.6.1. Cálculo da posição da linha neutra (Eq. 6.10) tendo A_s como incógnita, assumindo os seguintes valores: $\sigma_{pd} = 1.520,0 \text{ MPa}$, $\sigma_{sd} = f_{yd} = 435 \text{ MPa}$ e $\eta_c = 1,0$:

$$x = \frac{\sigma_{pd} A_p + f_{yd} A_s - f'_{yd} A'_s}{0,85\eta_c f_{cd} 0,8 b_w} = \frac{1520 \cdot 11,20 + 435 A_s}{0,85 \frac{3,5}{1,4} 0,8 \cdot 40} \rightarrow x = 25,04 + 0,6397 A_s$$

Substituindo x na equação do momento fletor (Eq. 6.11) e fazendo $M_{Rd} = M_{Sd} = 210.000 \text{ kN.cm}$, determina-se a armadura A_s :

$$M_{Rd} = \sigma_{pd} A_p (d_p - 0,4x) + f_{yd} A_s (d_s - 0,4x) + f'_{yd} A'_s (0,4x - d')$$

$$210.000 = 152,0 \cdot 11,20 [110 - 0,4 (25,04 + 0,6397 A_s)] + 43,5 A_s [115 - 0,4 (25,04 + 0,6397 A_s)]$$

$$210.000 = 187.264,0 - 17.051,2 - 435,6 A_s + 5.002,5 A_s - 435,7 A_s - 11,13 A_s^2$$

$$A_s^2 - 371,2 A_s + 3.574,8 = 0 \rightarrow A_s = 9,89 \text{ cm}^2$$

$$\text{A altura da linha resulta é: } x = 25,04 + 0,6397 \cdot 9,89 = 31,37 \text{ cm}$$

Deformação na armadura de protensão, supondo domínio 3 ou 4:

$$\frac{\epsilon_{cd}}{\epsilon_{pd,ult}} = \frac{x}{d_p - x} \rightarrow \frac{3,5}{\epsilon_{pd,ult}} = \frac{31,37}{110 - 31,37} \rightarrow \epsilon_{pd,ult} = 8,66 \% < 10 \% \rightarrow \text{confirma o domínio 3 ou 4.}$$

Com o diagrama $\sigma \times \epsilon$ simplificado da NBR 6118, a deformação de início de escoamento do aço de protensão é:

$$\sigma = \epsilon \cdot E \rightarrow \epsilon_{pyd} = \frac{f_{pyd}}{E_p} = \frac{1.487}{195.000} = 0,00763 = 7,63 \%$$

portanto, como $\epsilon_{pyd} = 7,63 \% < \epsilon_{pd,ult} = 8,66 \% < 10 \%$, o domínio é o 3 (Figura 6.30).

Força de protensão de cálculo, com $\gamma_p = 0,9$ (efeito favorável) (Eq. 6.6):

$$P_d = \gamma_p P_\infty = 0,9 \cdot 1.250,0 = 1.125,0 \text{ kN}$$

A deformação $\epsilon_{cd,enc}$ no concreto ao nível do CG da armadura de protensão é (Eq. 6.1):

6.10.2 Seção Retangular com Armaduras Passivas Tracionada e Comprimida

Em uma viga protendida biapoiada de seção retangular, como mostrada na Figura 6.31 com parâmetros relativos aos concretos do Grupo I, o acréscimo de armadura passiva tracionada A_s leva a um aumento no valor de x_1 , o que pode provocar problema com a ductilidade, caso supere um valor limite (como $0,3d_p$ por exemplo). Quando isso ocorre, uma possível solução para o problema é acrescentar as duas armaduras passivas, a tracionada A_s e a comprimida A'_s , o que aumenta a capacidade resistente da viga à flexão e não aumenta o valor de x , de modo que não prejudica a ductilidade. Se a altura x_1 é mantida constante, as resultantes $R_{cc,1}$ e $R_{pt,1}$ (resultante no concreto comprimido e na armadura de protensão, respectivamente) são as mesmas nas seções da Figura 6.31a e Figura 6.31b, sendo iguais e opostas. Com o diagrama de deformações da Figura 6.31b conhecido, as deformações nas armaduras passivas podem ser determinadas, e assim podem ser definidas as tensões nessas armaduras (σ_{sd} e σ'_{sd}):^[1]

$$\varepsilon'_{sd} = \frac{\varepsilon_{cd} (x - d')}{x} \quad \text{Eq. 6.25}$$

$$\varepsilon_{sd} = \frac{\varepsilon_{cd} (d_s - x)}{x} \quad \text{Eq. 6.26}$$

As forças resultantes nas armaduras passivas são:

$$R_{sc} = \sigma'_{sd} A'_s \quad \text{Eq. 6.27}$$

$$R_{st} = \sigma_{sd} A_s \quad \text{Eq. 6.28}$$

Com o momento fletor último M_{Rd1} (Eq. 6.22) proporcionado pela seção contendo apenas armadura de protensão (Figura 6.31a), a armadura passiva tracionada é:

$$A_s = \frac{M_{Sd} - M_{Rd,1}}{\sigma_{sd} (d_s - d')} \quad \text{Eq. 6.29}$$

A tensão na armadura tracionada usualmente excede a tensão de início de escoamento do aço passivo ($\varepsilon_{sd} \geq \varepsilon_{yd}$), de modo que $\sigma_{sd} = f_{yd}$ e a altura $x = x_1$ atende às condições de ductilidade.^[1] Com a igualdade entre as forças resultantes $R_{cc,1}$ e $R_{pt,1}$, por equilíbrio também são iguais as resultantes nas armaduras passivas (R_{st} e R_{sc} , Eq. 6.25 e Eq. 6.26), e:

$$A'_s = \frac{A_s \sigma_{sd}}{\sigma'_{sd}} \quad \text{Eq. 6.30}$$

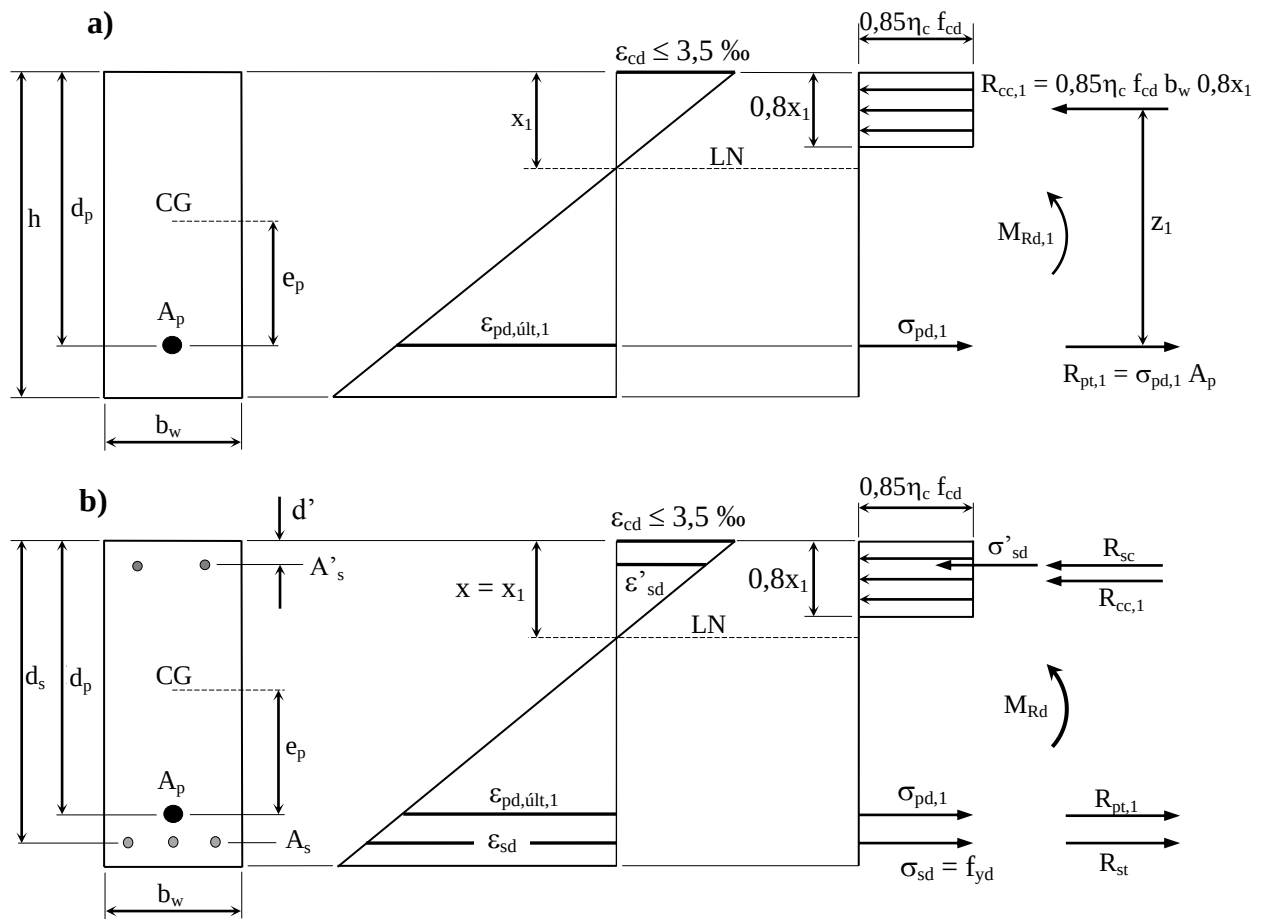


Figura 6.31 – Tensões e deformações em viga retangular protendida: a) seção apenas com armadura de protensão (A_p); b) seção com armadura de protensão e armaduras passivas tracionada (A_s) e comprimida (A'_s).^[1]

No caso da posição da linha neutra x da seção da Figura 6.31b superar um valor limite (algo como $0,3d_p$)^[1] e assim não atender à exigência de ductilidade, uma solução pode ser adotada com um valor menor para x , igual ao valor limite por exemplo. Com este novo valor de x as deformações nos materiais podem ser calculadas (ϵ_{sd} , ϵ'_{sd} e $\epsilon_{pd,últ,1}$), e nos diagramas $\sigma \times \epsilon$ dos aços as tensões nas armaduras passivas podem ser determinadas (σ_{sd} , σ'_{sd}), e com o cálculo da deformação total na armadura de protensão ($\epsilon_{pd,tot}$, Eq. 6.5) a tensão correspondente pode ser determinada (σ_{pd}). As forças resultantes na armadura de protensão e no concreto comprimido surgem de:

$$R_{pt} = \sigma_{pd} A_p \quad \text{Eq. 6.31}$$

$$R_{cc} = 0,85\eta_c f_{cd} b_w 0,8x \quad \text{Eq. 6.32}$$

A armadura passiva comprimida pode ser determinada fazendo o equilíbrio de momentos fletores no nível da armadura passiva tracionada:

$$A'_s = \frac{M_{sd} + R_{pt} (d_s - d_p) - R_{cc} (d_s - 0,4x)}{\sigma'_{sd} (d_s - d')} \quad \text{Eq. 6.33}$$

O equilíbrio das forças resultantes ($R_{st} = R_{cc} + R_{sc} - R_{pt}$) possibilita calcular a armadura passiva tracionada:

$$A_s = \frac{0,85\eta_c f_{cd} b_w 0,8x + \sigma'_{sd} A'_s - \sigma_{pd} A_p}{\sigma_{sd}} \quad \text{Eq. 6.34}$$

6.10.2.1 Exemplo 1 – Dimensionamento de Armaduras Passivas A_s e A'_s em Viga de Seção Retangular

Para a viga do Exemplo 4 (item 6.9.4), composta somente com armadura de protensão e apresentada novamente na Figura 6.32, dimensionar as quantidades de armaduras passivas A_s e A'_s adicionais necessárias para um momento fletor solicitante de $M_{Sd} = 90.000 \text{ kN.cm}$, sendo $d_s = 65 \text{ cm}$, $d' = 5 \text{ cm}$ e aço CA-50 ($f_{yd} = 435 \text{ MPa}$). Comparar com os resultados obtidos no Exemplo 1 (item 6.10.1.1), quando a viga teve a armadura passiva A_s calculada como $12,21 \text{ cm}^2$ para o mesmo momento fletor $M_{Sd} = 90.000 \text{ kN.cm}$.

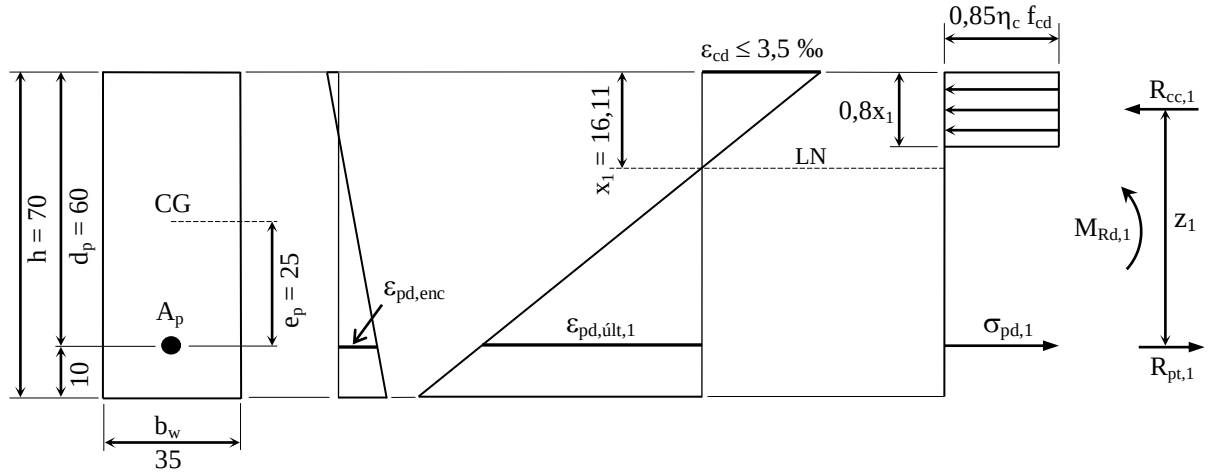


Figura 6.32 – Dimensões (cm) da seção transversal da viga retangular.

Resolução

A viga do Exemplo 4 (item 6.9.4) apresentou os seguintes resultados: momento fletor resistente $M_{Rd,1} = 65.308 \text{ kN.cm}$, linha neutra $x_1 = 16,68 \text{ cm}$, tensão e a deformação na armadura de protensão respectivamente de $\sigma_{pd} = 1.530,8 \text{ MPa}$ e $\epsilon_{pd,tot} = 14,86 \text{ ‰}$. Se a linha neutra é mantida constante com $x = x_1$, então a tensão e a deformação na armadura de protensão não se alteram, conforme a metodologia mostrada na Figura 6.31. As deformações nas armaduras passivas comprimida (A'_s) e tracionada (A_s) são (Eq. 6.25 e Eq. 6.26):

$$\epsilon'_{sd} = \frac{\epsilon_{cd} (x - d')}{x} = \frac{3,5 (16,68 - 5)}{16,68} = 2,45 \text{ ‰} > \epsilon_{yd} = 2,07 \text{ ‰}, \text{ portanto } \sigma'_{sd} = f'_{yd} = f_{yd} = 435 \text{ MPa}$$

$$\epsilon_{sd} = \frac{\epsilon_{cd} (d_s - x)}{x} = \frac{3,5 (65 - 16,68)}{16,68} = 10,14 \text{ ‰} > \epsilon_{yd} = 2,07 \text{ ‰}, \text{ portanto } \sigma_{sd} = f_{yd} = 435 \text{ MPa}$$

Com a Eq. 6.29 e Eq. 6.30 são obtidas as áreas de armaduras passivas adicionais:

$$A_s = \frac{M_{Sd} - M_{Rd,1}}{\sigma_{sd} (d_s - d')} = \frac{90.000 - 65.308}{435 (65 - 5)} = 9,46 \text{ cm}^2 \rightarrow 5 \phi 16 \text{ mm } (10,00 \text{ cm}^2)$$

$$A'_s = \frac{A_s \sigma_{sd}}{\sigma'_{sd}} = \frac{9,46 \cdot 435}{435} = 9,46 \text{ cm}^2 \rightarrow 5 \phi 16 \text{ mm } (10,00 \text{ cm}^2)$$

A armadura tracionada A_s diminuiu de $12,21 \text{ cm}^2$ no Exemplo 4 (item 6.10.1.1) para $9,46 \text{ cm}^2$, para o mesmo momento fletor, que configura uma diminuição de $22,5 \text{ ‰}$, no entanto deve ser acrescentada a armadura comprimida de mesma área, que totaliza $2 \cdot 9,46 = 18,92 \text{ cm}^2$ (+ 55 ‰). A diferença de armadura tracionada de $2,75 \text{ cm}^2$ ($12,21 - 9,46$) requer $9,46 \text{ cm}^2$ de armadura comprimida para proporcionar o mesmo

efeito sobre o momento fletor resistente. Porém, ocorre um ganho significativo de ductilidade quando se acrescenta armadura passiva comprimida na viga.

6.11 Exercícios Propostos

1) Determinar o momento fletor último (M_{Rd}) de uma viga de seção retangular em Concreto Protendido com aderência entre a armadura de protensão e o concreto, sendo conhecidos:

- concreto C45, $\gamma_c = 1,4$;
- armadura ativa: $A_p = 5,00 \text{ cm}^2$ (10 fios CP150 RB ϕ 8 mm);
- armadura passiva tracionada: $A_s = 7,50 \text{ cm}^2$;
- armadura passiva comprimida: $A'_s = 3,20 \text{ cm}^2$, $d' = 4,5 \text{ cm}$;
- (CA-50, $f_{yk} = 500 \text{ MPa}$, $f_{yd} = 435 \text{ MPa}$, $\epsilon_{yd} = 2,07 \text{ ‰}$, $\gamma_s = 1,15$);
- tensão final na armadura de protensão $\sigma_{p\infty} = 900 \text{ MPa}$;
- erro máximo no cálculo de $M_{Rd} = 1 \text{ ‰}$.

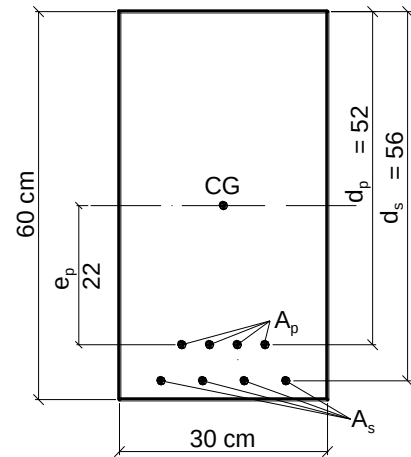


Figura 6.33 – Dimensões (cm) da seção transversal da viga.

2) Calcular o momento fletor último da viga seção I mostrada na Figura 6.34, com aderência entre a armadura de protensão e o concreto. Dados:

- concreto C50, $\gamma_c = 1,3$ (peça pré-moldada);
- armadura ativa: $A_p = 7,00 \text{ cm}^2$ (7 cordoalhas CP210 RB ϕ 12,7 mm);
- $A_c = 1.136 \text{ cm}^2$, $I_c = 499.440 \text{ cm}^4$;
- força de protensão final $P_\infty = 920 \text{ kN}$;
- erro máximo no cálculo de $M_{Rd} = 1,5 \text{ ‰}$;
- desprezar as armaduras passivas.

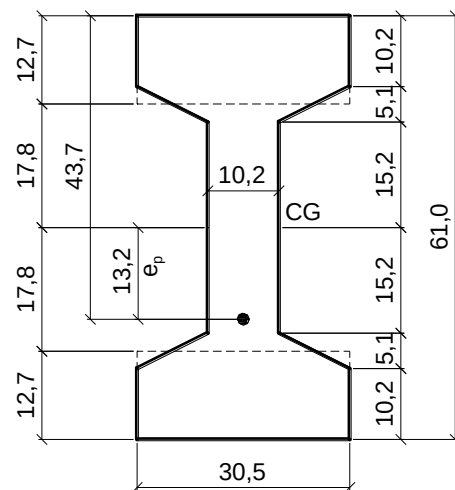


Figura 6.34 – Dimensões (cm) da seção transversal da viga.

7. ANÁLISE À FORÇA CORTANTE

7.1 Efeitos da Força Cortante

Como mostrado na Figura 7.1, a força de protensão inclinada (P_d) introduz nas vigas tensões normais de compressão que reduzem as tensões principais de tração (σ_t), e por isso as fissuras por efeito de força cortante (também chamadas de *fissuras de cisalhamento*) apresentam-se com menor inclinação que nas vigas de Concreto Armado. As bielas comprimidas apresentam-se com ângulos θ de inclinação entre 15° e 35° , menores que o ângulo da *Treliça Clássica* ($\theta = 45^\circ$), e quanto maior o grau de protensão, menores são os esforços de tração na alma, sendo menor a quantidade de armadura transversal necessária. O encurvamento dos cabos nas proximidades dos apoios produz uma componente de força contrária à força cortante solicitante, tal que:

$$V_{Sd} = V_d - P_d \sin \alpha$$

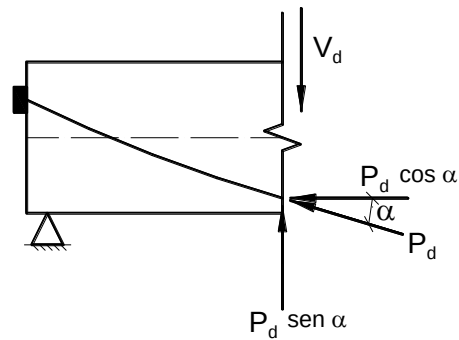


Figura 7.1 – Componente de força devido à curvatura do cabo.

7.2 Efeito da Componente Tangencial da Força de Protensão

Conforme a NBR 6118 (item 17.4.1.2.2), “No valor de V_{Sd} , deve ser considerado o efeito da projeção da força de protensão na sua direção, com o valor de cálculo correspondente ao tempo t considerado. Entretanto, quando esse efeito for favorável, a armadura longitudinal de tração junto à face tracionada por flexão deve satisfazer à condição:

$$A_p f_{pyd} + A_s f_{yd} \geq V_{Sd} \quad \text{Eq. 7.1}$$

Essa condição visa fornecer uma melhor contribuição do concreto na zona (banzo) comprimida pela flexão, garantindo a rigidez do banzo tracionado (Figura 7.2).

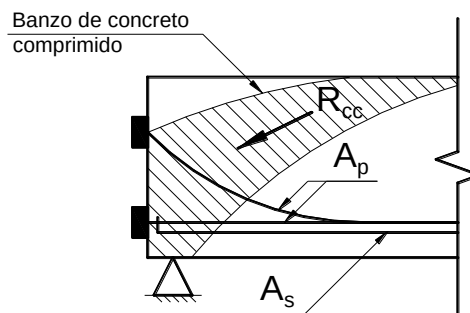


Figura 7.2 – Banzo de concreto comprimido próximo ao apoio.

7.3 Verificação à Força Cortante no Estado-Limite Último (ELU)

Conforme a NBR 6118 (17.4.2), “A resistência do elemento estrutural, em uma determinada seção transversal, deve ser considerada satisfatória, quando verificadas simultaneamente as seguintes condições:

$$\begin{aligned} V_{Sd} &\leq V_{Rd2} \\ V_{Sd} &\leq V_{Rd3} = V_c + V_{sw} \end{aligned} \quad \text{Eq. 7.2}$$

onde:

V_{Sd} é a força cortante solicitante de cálculo, na seção;

V_{Rd2} é a força cortante resistente de cálculo, relativa à ruína das diagonais comprimidas de concreto, de acordo com os modelos indicados em 17.4.2.2 ou 17.4.2.3;

$V_{Rd3} = V_c + V_{sw}$ é a força cortante resistente de cálculo, relativa à ruína por tração diagonal, onde V_c é a parcela de força cortante absorvida por mecanismos complementares ao da treliça e V_{sw} a parcela resistida pela armadura transversal, de acordo com os modelos indicados em 17.4.2.2 ou 17.4.2.3.

Na região dos apoios, os cálculos devem considerar as forças cortantes agentes nas respectivas faces, levando em conta as reduções prescritas em 17.4.1.2.1.”

A NBR 6118 possibilita o dimensionamento à força cortante segundo dois Modelos de Cálculo, I e II. O Modelo de Cálculo I admite a *treliça clássica*, com ângulo de inclinação das diagonais comprimidas (θ) fixo em 45° . O Modelo de Cálculo II considera a *treliça generalizada*, onde o ângulo de inclinação das diagonais comprimidas pode variar entre 30° e 45° . Aos modelos de treliça foi associada uma força cortante resistente (adicional) V_c , proporcionada por mecanismos complementares ao de treliça.¹⁹¹

7.3.1 Modelo de Cálculo I

“O modelo I admite diagonais de compressão inclinadas de $\theta = 45^\circ$ em relação ao eixo longitudinal do elemento estrutural e admite ainda que a parcela complementar V_c tenha valor constante, independentemente de V_{Sd} .” (NBR 6118, 17.4.2.2). A verificação da diagonal comprimida é feita pela equação:

$$V_{Rd2} = 0,27 \left(1 - \frac{f_{ck}}{250} \right) f_{cd} b_w d \quad \text{Eq. 7.3}$$

com f_{ck} em MPa. A parcela de força cortante a ser resistida pela armadura transversal é:

$$V_{sw} = V_{Sd} - V_c$$

Na flexo-compressão a parcela V_c é:

$$V_c = V_{co} \left(1 + \frac{M_0}{M_{Sd, \max}} \right) \leq 2 V_{co} \quad \text{Eq. 7.4}$$

com:

¹⁹¹ O dimensionamento de vigas de Concreto Armado à força cortante está apresentado com maiores detalhes em BASTOS, P.S. *Dimensionamento de vigas de concreto armado à força cortante*. Bauru/SP, Universidade Estadual Paulista (UNESP), nov/2023, 77p. Disponível em (18/03/2024): http://www.feb.unesp.br/pbastos/pag_concreto2.htm

$$V_{co} = 0,6 f_{ctd} b_w d \quad \text{Eq. 7.5}$$

$$f_{ctd} = \frac{f_{ctk,inf}}{\gamma_c} = \frac{0,7 f_{ctm}}{\gamma_c} = \frac{0,7 \cdot 0,3}{\gamma_c} \sqrt[3]{f_{ck}^2} \quad \text{Eq. 7.6}$$

“ b_w é a menor largura da seção, compreendida ao longo da altura útil d ; entretanto, no caso de elementos estruturais protendidos, quando existirem bainhas injetadas com diâmetro $\phi > b_w/8$, a largura resistente a considerar deve ser $b_w - 1/2 \Sigma \phi$, na posição da alma em que essa diferença seja mais desfavorável, com exceção do nível que define o banzo tracionado da viga;

d é a altura útil da seção, igual à distância da borda comprimida ao centro de gravidade da armadura de tração; entretanto no caso de elementos estruturais protendidos com cabos distribuídos ao longo da altura, d não precisa ser tomado com valor menor que $0,8h$, desde que exista armadura junto à face tracionada, de forma a satisfazer o descrito em 17.4.1.2.2;

s é o espaçamento entre elementos da armadura transversal A_{sw} , medido segundo o eixo longitudinal do elemento estrutural;

f_{ywd} é a tensão na armadura transversal passiva, limitada ao valor f_{yd} no caso de estribos e a 70 % desse valor no caso de barras dobradas, não se tomando, para ambos os casos, valores superiores a 435 MPa;¹⁹² entretanto, no caso de armaduras transversais ativas, o acréscimo de tensão devida à força cortante não pode ultrapassar a diferença entre f_{pyd} e a tensão de protensão, nem ser superior a 435 MPa;

α é o ângulo de inclinação da armadura transversal em relação ao eixo longitudinal do elemento estrutural, podendo-se tomar $45^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$;

M_o é o valor do momento fletor que anula a tensão normal de compressão na borda da seção tracionada por $M_{d,máx}$, provocada pelos esforços isostáticos de protensão e pelas forças normais de diversas origens concomitantes com V_{sd} , sendo essa tensão calculada com valores de γ_f e γ_p iguais a 1,0 e 0,9, respectivamente; os momentos correspondentes a essas forças normais não podem ser considerados no cálculo dessa tensão pois são considerados em $M_{sd,máx}$; devem ser considerados apenas os momentos isostáticos de protensão; devem ser consideradas todas as perdas de protensão na determinação das forças normais e dos momentos isostáticos de protensão:

$$M_o = P_d \left(\frac{W_1}{A_c} + e_p \right) + N_{sd} \left(\frac{W_1}{A_c} \right) \quad \text{Eq. 7.7}$$

sendo W_1 o módulo de resistência na fibra mais tracionada;

$M_{sd,máx}$ é o momento fletor de cálculo máximo na seção em análise, alternativamente pode ser tomado apenas na seção com maior valor de $M_{d,máx}$ no semitrampo em análise, nesse caso a relação $M_o / M_{sd,máx}$ fica constante no semitrampo e M_o deve ser calculado na mesma seção que atua $M_{sd,máx}$; os momentos isostáticos de protensão não podem ser considerados nesse cálculo, apenas os hiperestáticos.” (NBR 6118, 17.4.2.2)

A área de armadura transversal é:

$$\frac{A_{sw,\alpha}}{s} = \frac{V_{sw}}{0,9d f_{ywd} (\sin \alpha + \cos \alpha)} \quad \text{Eq. 7.8}$$

¹⁹² A tensão máxima imposta pela norma refere-se ao aço CA-50, pois $f_{yd} = 50/1,15 = 435$ MPa. No caso do dimensionamento do estribo ser feito com o aço CA-60, esta tensão máxima também deve ser obedecida, ou seja, deve-se calcular como se o aço fosse o CA-50.

Aplicando os aços CA-50 ou CA-60 e armadura transversal somente na forma de estribos com $\alpha = 90^\circ$, fazendo $f_{ywd} = 43,5 \text{ kN/cm}^2$ na Eq. 7.8 encontra-se:

$$\frac{A_{sw,90}}{s} = \frac{V_{sw}}{39,2 d} \quad \text{Eq. 7.9}$$

com: $A_{sw,90} = \text{cm}^2/\text{cm}$, $V_{sw} = \text{kN}$ e $d = \text{cm}$.

No cálculo da parcela resistente V_c , a relação $M_o/M_{Sd,máx}$ fornece uma indicação do estado de fissuração por flexão no trecho considerado, no ELU. Se a relação é próxima de zero (M_o tem valor muito pequeno), então a região estará com esforços de tração e possivelmente fissurada por flexão (zona b). Se a relação tem valor 1,0 (M_o tem valor próximo de $M_{Sd,máx}$), então não há fissuração (zona a) (Figura 7.3).

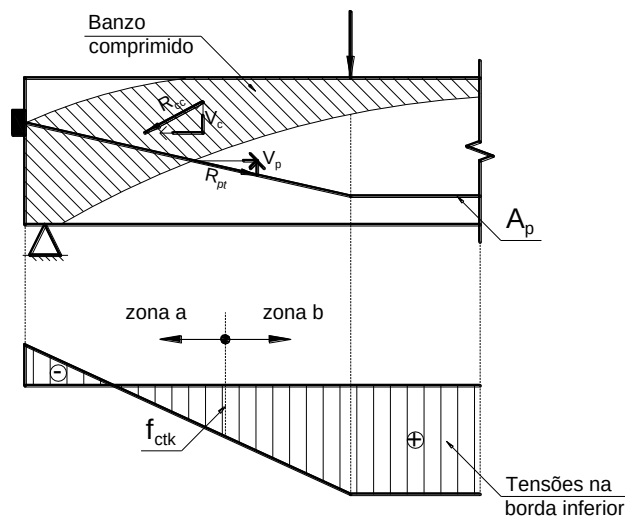


Figura 7.3 – Zona b com fissuração e zona a sem fissuração.

Os ensaios demonstraram que o estado de fissuração por flexão influi significativamente nos estados de tração na alma. Se o banzo tracionado não está fissurado (zona a), a tensão no estribo é bem menor do que a tensão no estribo na zona fissurada, o que permite a redução dos estribos.

7.3.2 Modelo de Cálculo II

“O modelo II admite diagonais de compressão inclinadas de θ em relação ao eixo longitudinal do elemento estrutural, com θ variável livremente entre 30° e 45° . Admite ainda que a parcela complementar V_c sofra redução com o aumento de V_{Sd} .” (NBR 6118, 17.4.2.3). A verificação da compressão diagonal do concreto é feita com a equação:

$$V_{Rd2} = 0,54 \left(1 - \frac{f_{ck}}{25} \right) f_{cd} b_w d \sin^2 \theta (\cot g \alpha + \cot g \theta) \quad \text{Eq. 7.10}$$

com f_{ck} em MPa. Deve-se ter: $V_{Sd} \leq V_{Rd2}$. A parcela de força cortante a ser resistida pela armadura transversal é:

$$V_{sw} = V_{Sd} - V_c \quad \text{Eq. 7.11}$$

Na flexo-compressão a parcela de força cortante resistente V_c é dada por:

$$V_c = V_{c1} \left(1 + \frac{M_0}{M_{Sd,máx}} \right) < 2V_{c1} \quad \text{Eq. 7.12}$$

com:

$$V_{c1} = V_{co} \rightarrow \text{para } V_{Sd} \leq V_{co} \quad \text{Eq. 7.13}$$

$$V_{c1} = 0 \rightarrow \text{para } V_{Sd} = V_{Rd2}$$

interpolando-se para valores intermediários de V_{c1} . A armadura transversal é:

$$\frac{A_{sw,\alpha}}{s} = \frac{V_{sw}}{0,9 d f_{ywd} (\cot g \alpha + \cot g \theta) \sin \alpha} \quad \text{Eq. 7.14}$$

7.3.3 Armadura Mínima

Para estribo vertical ($\alpha = 90^\circ$) e com $s = 100$ cm, a armadura mínima fica:

$$A_{sw,min} = \frac{20 f_{ct,m}}{f_{ywk}} b_w \quad \text{Eq. 7.15}$$

$A_{sw,min}$ = área da seção transversal de todos os ramos verticais do estribo (cm^2/m);

b_w em cm;

f_{ywk} em kN/cm^2 ;

$f_{ct,m}$ em kN/cm^2 e calculada como $f_{ct,m} = 0,3 \sqrt[3]{f_{ck}^2}$, f_{ck} em MPa.

7.4 Exemplo 1

Dimensionar a área de armadura transversal de uma viga protendida seção I, biapoiada sob flexão, considerando:

- estribos verticais;
- concreto C35, aço CA-50;
- coeficientes de ponderação: $\gamma_c = 1,4$, $\gamma_s = 1,15$, $\gamma_p = 0,9$;
- largura da alma da viga $b_w = 12$ cm, altura útil da armadura de protensão $d_p = 90,6$ cm;
- força cortante solicitante de cálculo $V_{Sd} = 235,4$ kN; força normal $N_{Sd} = 0$, concomitante com V_{Sd} ;
- força de protensão final $P_\infty = 686,6$ kN;
- momento fletor solicitante máximo no vão $M_{Sd,máx} = 79.593$ kN.cm;
- área da seção transversal $A_c = 2.344$ cm^2 , módulo de flexão da base $W_b = 50.044$ cm^3 ;
- excentricidade da armadura de protensão $e_p = 45,0$ cm.

Resolução

O cálculo da armadura transversal será feito conforme o Modelo de Cálculo I (Treliça Clássica, $\theta = 45^\circ$) e ângulo α de inclinação dos estribos de 90° (estribos verticais para a viga de eixo longitudinal horizontal).

a) Verificação da compressão nas bielas de concreto

Para não ocorrer o esmagamento do concreto que compõe as bielas comprimidas deve-se ter $V_{Sd} \leq V_{Rd2}$. A Eq. 7.3 definiu o valor de V_{Rd2} :

$$V_{Rd2} = 0,27 \left(1 - \frac{f_{ck}}{250} \right) f_{cd} b_w d = 0,27 \left(1 - \frac{35}{250} \right) \frac{3,5}{1,4} 12 \cdot 90,6 = 631,1 \text{ kN}$$

$$V_{Sd} = 235,4 \text{ kN} \leq V_{Rd2} = 631,1 \text{ kN} \rightarrow \text{ok! não ocorrerá esmagamento do concreto das bielas.}$$

b) Cálculo da armadura transversal

Para calcular a armadura transversal devem ser determinadas as parcelas da força cortante que serão absorvidas pelos mecanismos complementares ao de treliça (V_c) e pela armadura (V_{sw}), de tal modo que (Eq. 7.2): $V_{Sd} = V_c + V_{sw}$

$$\text{Na flexo-compressão a parcela } V_c \text{ é (Eq. 7.4): } V_c = V_{co} \left(1 + \frac{M_0}{M_{Sd, \text{máx}}} \right) \leq 2V_{co}$$

$$\text{A resistência média do concreto à tração direta é (Eq. 2.1): } f_{ct,m} = 0,3 \sqrt[3]{f_{ck}^2} = 0,3 \sqrt[3]{35^2} = 3,21 \text{ MPa}$$

O valor inferior da resistência do concreto à tração direta é:

$$f_{ctd} = \frac{f_{ctk, \text{inf}}}{\gamma_c} = \frac{0,7 f_{ct,m}}{\gamma_c} = \frac{0,7 \cdot 0,321}{1,4} = 0,161 \text{ kN/cm}^2$$

A força cortante resistente V_{co} é (Eq. 7.5):

$$V_{co} = 0,6 f_{ctd} b_w d = 0,6 \cdot 0,161 \cdot 12 \cdot 90,6 = 105,0 \text{ kN}$$

O momento fletor M_0 é aquele que anula a tensão normal de compressão máxima atuante na borda da seção transversal, e que causa a tensão σ_{bM_0} (Figura 7.4), portanto tem-se $\sigma_{bp\infty,d} + \sigma_{bM_0} = 0$, com:

$$\sigma_{bM_0} = \frac{M_0}{W_b}$$

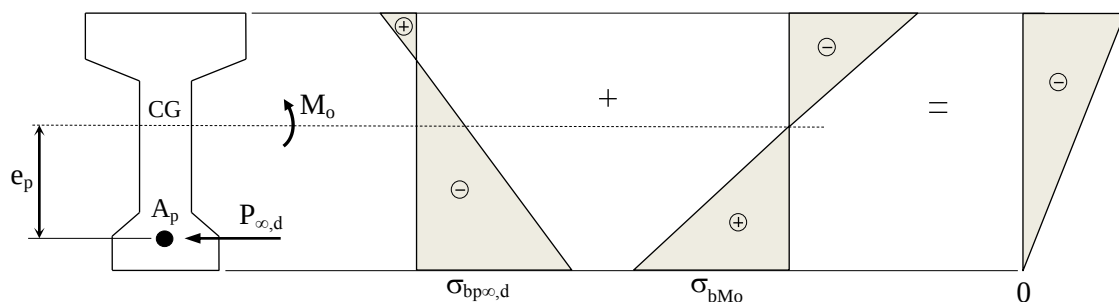


Figura 7.4 – Tensões normais na viga e estado de descompressão.

A tensão na base devida à força de protensão final é:

$$\sigma_{bp\infty,d} = -P_{\infty,d} \left(\frac{1}{A_c} + \frac{e_p}{W_b} \right)$$

com a força de protensão final de cálculo: $P_{\infty,d} = \gamma_p P_{\infty} = 0,9 \cdot 686,6 = 617,9 \text{ kN}$. A equação para a tensão final na base é:

$$-P_{\infty,d} \left(\frac{1}{A_c} + \frac{e_p}{W_b} \right) + \frac{M_0}{W_b} = 0$$

Da qual é definido o valor do momento fletor de descompressão M_o :

$$M_o = P_{\infty,d} \left(\frac{W_b}{A_c} + e_p \right) = 617,9 \left(\frac{50,044}{2,344} + 45,0 \right) = 40.998 \text{ kN.cm}$$

Portanto, a parcela V_c é:

$$V_c = V_{c0} \left(1 + \frac{M_o}{M_{Sd,máx}} \right) = 105,0 \left(1 + \frac{40.998}{79.593} \right) = 159,1 \text{ kN} \quad , \quad (2V_{c0} = 2 \cdot 105,0 = 210,0 \text{ kN})$$

$$V_c = 159,1 \text{ kN} \leq 2V_{c0} = 210,0 \text{ kN} \rightarrow \text{ok!}$$

Portanto, a parcela da força cortante solicitante a ser resistida pelos estribos é:

$$V_{sw} = V_{Sd} - V_c = 235,4 - 159,1 = 76,3 \text{ kN}$$

A armadura transversal é (Eq. 7.9):

$$\frac{A_{sw,90}}{s} = \frac{V_{sw}}{39,2 d} \rightarrow \frac{A_{sw,90}}{s} = \frac{76,3}{39,2 \cdot 90,6} = 0,0215 \text{ cm}^2/\text{cm}$$

e para 1 m de comprimento da viga $A_{sw,90} = 2,15 \text{ cm}^2/\text{m}$.

A armadura mínima para estribo vertical ($\alpha = 90^\circ$) e aço CA-50 é (Eq. 7.15):

$$A_{sw,mín} = \frac{20 f_{ct,m}}{f_{yk}} b_w \quad , \quad \text{com } f_{ct,m} = 3,21 \text{ MPa tem-se:}$$

$$A_{sw,mín} = \frac{20 \cdot 0,321}{50} 12 = 1,54 \text{ cm}^2/\text{m}$$

Portanto, deve-se dispor a armadura calculada, de $2,15 \text{ cm}^2/\text{m}$. Fazendo estribo de dois ramos $\phi 6,3 \text{ mm}$ ($2 \phi 6,3 \rightarrow 0,62 \text{ cm}^2$):

$$\frac{A_{sw,90}}{s} = 0,0215 \rightarrow \frac{0,62}{s} = 0,0215 \rightarrow s = 28,8 \text{ cm}$$

este espaçamento deve ser verificado se atende ao espaçamento máximo permitido.

8. REFERÊNCIAS

1. GILBERT, R.I. ; MICKLEBOROUGH, N.C. ; RANZI, G. *Design of prestressed concrete to Eurocode 2*. New York, Ed. CRC Press, 2ª ed., 2017, 665p.
2. ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *Projeto de estruturas de concreto*, NBR 6118. Rio de Janeiro, ABNT, 2023, 242p.
3. NAAMAN, A.E. *Prestressed Concrete Analysis and Design: Fundamentals*. 2nd Edition, Techno Press 3000, Ann Arbor, Michigan, 2004, 1072p.
4. HANAI, J.B. *Fundamentos do concreto protendido*. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos – USP, Departamento de Engenharia de Estruturas, E-Book, 2005. Disponível em (12/04/21): https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/2255776/mod_resource/content/1/Fundamentos%20do%20Concreto%20Protendido%20-%20J%20B%20Hanai.pdf
5. NAWY, E.G. *Prestressed concrete: a fundamental approach*. Pearson/Prentice Hall, 2006, 945p.
6. DYWIDAG SYSTEMS INTERNATIONAL. *Sistemas de Protensão com Barras DYWIDAG - Aplicações Estruturais*. Catálogo. 2018, 12p. Disponível em (3/08/2018): <http://www.dywidag.com.br>
7. RUDLOFF. *Concreto Protendido*. Catálogo. Rev. 6, 11/2015. Disponível em (1/02/2019): http://www.rudloff.com.br/downloads/catalogo_concreto_protendido_rev-06.pdf
8. ARCELORMITTAL. *Fios e Cordoalhas para Concreto Protendido*. Catálogo, s/d, 12p. Disponível em (10/03/2025): <https://qas-brasil.arcelormittal.com.br/produtos-solucoes/construcao-civil/fios-e-cordoalhas?asCatalogo=pdf>
9. CAUDURO, E.L. *Manual para a boa execução de estruturas protendidas usando cordoalhas de aço engraxadas e plastificadas*. 2ª ed., s/d, 111p. Disponível em (1/02/2019): http://www.set.eesc.usp.br/mdidatico/protendido/arquivos/manual_para_a_boa_execucao_de_estructuras_protendidas.pdf
10. NILSON, A. H. *Design of Prestressed Concrete*. New York. Ed. John Wiley & Sons, 2ª. ed., 1987, 592p.
11. ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CIMENTO PORTLAND. *Guia básico de utilização do cimento Portland*. Boletim Técnico – BT 106. São Paulo, ABCP, 2002, 27p.
12. MEHTA, P.K. ; MONTEIRO, P.J.M. *Concreto – Microestrutura, Propriedades e Materiais*. São Paulo, Instituto Brasileiro do Concreto (IBRACON), 2ª ed., 2014, 782p.
13. NEVILLE, A.M. *Propriedades do concreto*. São Paulo, Ed. Pini, 2ª ed., 1997, 828p.
14. BAUER, L.A.F. *Materiais de Construção*. Rio de Janeiro, Ed. Livros Técnicos e Científicos, 5ª ed., 2 vol., 2000.
15. AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. Committee 215. *Considerations for design of concrete structures subjected to fatigue loading*. (ACI C.215), ACI Journal, March 71(3), 1974, p.97-121.
16. ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *Ações e segurança nas estruturas – Procedimento*. NBR 8681, ABNT, 2003, 28p.
17. BHATT, P. ; MACGINLEY, T.J. ; CHOO, B.S. *Reinforced concrete design to Eurocodes: design theory and examples*. New York. Ed. CRC Press, 4ª. ed., 2014, 849p.
18. AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. *Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318-11) and Comentary*. Reported by ACI Committee 318, 2011, 503p.
19. EUROPEAN COMMITTEE STANDARDIZATION. *Eurocode 2 – Design of concrete structures*, Part 1-1, Part 1-2. 2005.
20. LEONHARDT, F. *Construções de Concreto-Concreto Protendido*. Vol.5. Rio de Janeiro, Editora Interciência, 1983.
21. NILSON, A.H. ; DARWIN, D. ; DOLAN, C.W. *Design of Concrete Structures*. New York. Ed. McGraw-Hill, 4ª. ed., 2010, 795p.
22. GILBERT, R.I. ; MICKLEBOROUGH, N.C. *Design of prestressed concrete*. London. Unwin Hyman, 1990, 504p.

23. CARVALHO, R.C. *Estruturas em Concreto Protendido – Pré-tração, Pós-tensão, Cálculo e Detalhamento*. São Paulo, Editora Pini, 2^a ed., 2017, 448p.
24. PRECAST/PRESTRESSED CONCRETE INSTITUTE. *PCI Design Handbook: Precast and Prestressed Concrete*. 7th Edition, 2010.
25. CAUDURO, E.L. *Aços para Protensão*. In: ISAIA, G.C. (ed.). *Concreto: Ensino, Pesquisa e Realizações*. São Paulo, Instituto Brasileiro do Concreto (IBRACON), 2005, v.1, p.265-294.
26. BATISTA, A. ; CAUDURO, E.L. ; BALLESTEROS, D. *Produtos de aço para estruturas de concreto e alvenaria*. In: ISAIA, G.C. (ed.). *Materiais de Construção Civil e Princípios de Ciência e Engenharia de Materiais*. São Paulo, Instituto Brasileiro do Concreto (IBRACON), 2007, v.2, p.1077-1111.
27. HURST, M.K. *Prestressed concrete design*. New York, Ed. Chapman and Hall, 1988, 262p.