

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**  
**ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS**

**DIMENSIONAMENTO DE PEÇAS RETANGULARES DE  
CONCRETO ARMADO SOLICITADAS À FLEXÃO RETA**

**WILSON SÉRGIO VENTURINI**  
**ROGÉRIO DE OLIVEIRA RODRIGUES**

São Carlos, 1987  
(REIMPRESSÃO/2000)

## Í N D I C E

1. INTRODUÇÃO .....	1
2. HIPÓTESES DE CÁLCULO. ESTADO LIMITE ÚLTIMO .....	2
3. COMPATIBILIDADE DE DEFORMAÇÕES .....	6
4. EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO. SEÇÃO RETANGULAR .....	12
5. CÁLCULO SIMPLIFICADO. SEÇÕES RETANGULARES .....	14
6. EQUAÇÕES ADIMENSIONAIS .....	18
7. ÁBACOS DE DIMENSIONAMENTO .....	24
8. EXEMPLOS .....	31
8.1 - Exemplo de verificação .....	32
8.2 - Exemplo de dimensionamento .....	33

## 1. INTRODUÇÃO

Este texto faz parte do material bibliográfico utilizado nas disciplinas de concreto armado oferecidas pelo Departamento de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos - USP para os alunos do curso de engenharia civil. As notações aqui utilizadas já foram definidas em textos anteriormente mostrados. Nos casos de novos símbolos, estes serão definidos a medida que forem utilizados. O assunto aqui tratado é sobre o dimensionamento de peças de concreto armado solicitadas à flexão reta. Note-se que até essa fase do curso sobre resistência do concreto armado as hipóteses básicas do estado limite último para o cálculo de peças fle<sup>u</sup>tidas já foram estudadas tendo sido mostrado o dimensionamento de peças solicitadas à flexão simples apenas.

Para o dimensionamento de peças de concreto armado submetidas à flexão composta, reta ou oblíqua, a resultante das tensões resistentes na seção considerada,  $N_R$ , não é nula. Neste caso deve-se igualar essa resultante à força normal de cálculo,  $N_d$ , permitindo-se estabelecer, assim, uma das condições de equilíbrio. Com relação ao momento fletor, a equação de equilíbrio a ser imposta na resolução do problema é a mesma utilizada para o caso da flexão simples ou seja,  $\vec{M}_R = \vec{M}_d$ , isto é, momento solicitante de cálculo igual a momento resistente.

Na flexão normal composta, caso que se pretende abranger neste texto, as grandezas  $\vec{M}_R$  e  $\vec{M}_d$  ficam definidas por apenas uma das componentes, já que neste caso particular o plano do momento já está definido e coincide com o eixo de simetria da peça. Assim, essas grandezas serão sempre referidas como  $M_R$  e  $M_d$ .

O objetivo do equacionamento a ser mostrado é apresentar uma maneira simples de encontrar a solução para o sistema de duas equações não lineares resultantes da imposição do equilíbrio entre esforços resistentes e atuantes, levando-se em conta as hipóteses relativas a deformações e as relações tensão-deformação dos dois materiais.

É ainda oportuno salientar que neste texto variações dos esforços solicitantes, nas peças de concreto armado, decorrentes da mudança de forma da peça, não serão estudadas. O estado limite último de instabilidade deverá ser tratado em ocasião oportuna.

## 2. HIPÓTESES DE CÁLCULO. ESTADO LIMITE ÚLTIMO

As hipóteses básicas, para o estudo das peças de concreto armado com relação a sua capacidade resistente, referentes a solicitações normais abrangem os limites de deformações já anteriormente descritos e os diagramas convencionais tensão/deformação para o concreto e o aço.

Admite-se para o concreto, no estado limite último, uma relação tensão/deformação de cálculo biunívoca onde o valor das tensões é dado por um diagrama parábola-retângulo (fig. 2.1) na região onde as deformações são de compressão, e é nulo na região de deformações positivas, uma vez que qualquer resistência do concreto a tração é desprezada. Algebricamente essa relação pode ser expressa na seguinte forma:

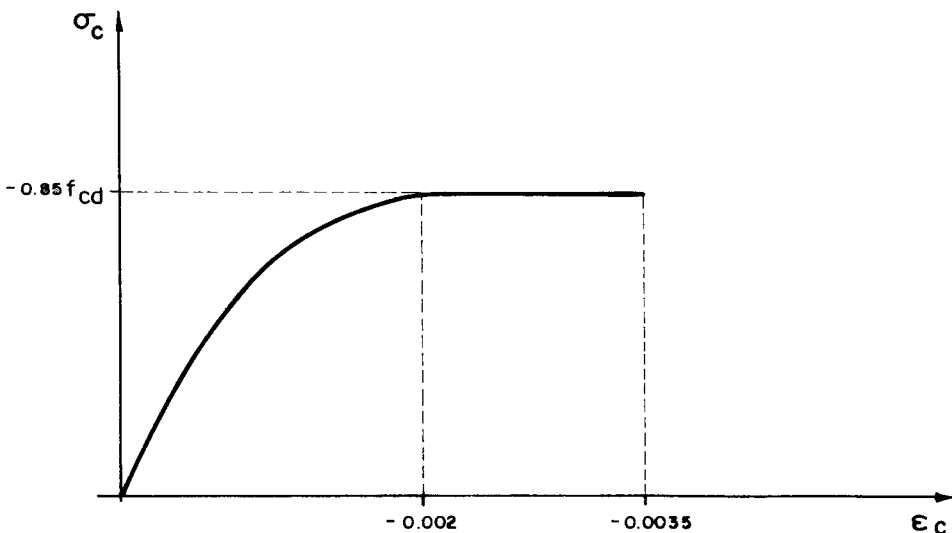


Fig. 2.1 - Diagrama tensão/deformação de cálculo para o concreto.



$$\begin{aligned}\sigma_c &= -0,85 f_{cd} && \text{para } -0,002 \geq \epsilon_c \geq -0,0035 \\ \sigma_c &= 850 f_{cd} \left[ 1 + 250 \epsilon_c \right] \epsilon_c && \text{para } 0 \geq \epsilon_c \geq -0,002 \quad (2.1) \\ \sigma_c &= 0 && \text{para } \epsilon_c \geq 0\end{aligned}$$

O sinal "menos" é mantido, aqui, para caracterizar tensões e deformações de compressão de modo que as equações decorrentes do equacionamento a ser mostrado sejam consistentes, evitando-se assim análises particulares para atribuir sinal aos esforços resultantes.

Para o aço Classe A o diagrama tensão/deformação indica material elasto-plástico perfeito. A tensão varia linearmente até o limite de escoamento e é constante para valores de deformação superior a esse ponto. A simetria indicada no diagrama da figura 2.2 é outra característica do comportamento desse aço; tanto para tração como para compressão o início do escoamento é dado, pelos mesmos valores absolutos da tensão e da deformação. Entretanto, para valores de  $\epsilon_s$  inferiores a -0,0035 o uso do diagrama perde sentido, uma vez que a solidariedade entre os materiais é admitida perfeita para a existência do concreto armado, não podendo portanto os valores da deformação ultrapassar o limite estabelecido para o concreto.

No caso do aço Classe B, obtidos por encruamento a frio, o diagrama adotado para a relação tensão/deformação de cálculo é apresentado na figura 2.3. Diferentemente do caso anterior o diagrama tensão/deformação apresenta um trecho com encruamento cuja representação analítica é dada por uma parábola do 2º grau,

$$\epsilon_s = \frac{\sigma_s}{E_s} + \frac{1}{45} \left( \frac{|\sigma_s|}{f_{yd}} - 0,7 \right)^2 \frac{\sigma_s}{|\sigma_s|} \quad (2.2)$$

ou em sua forma inversa,

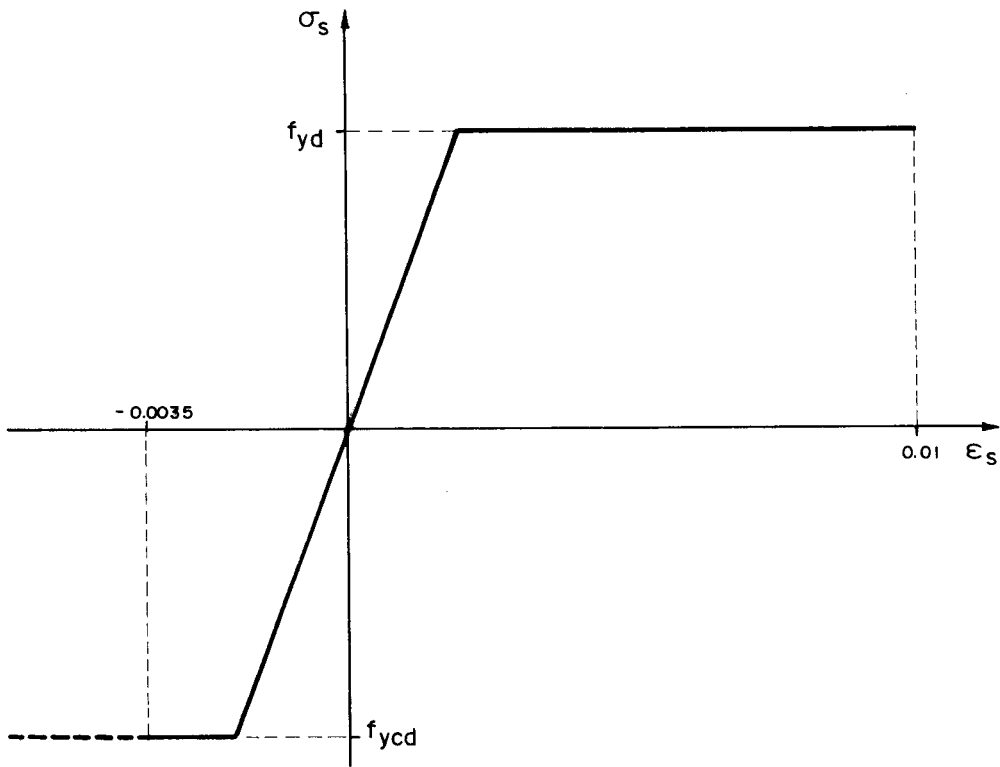


Fig. 2.2 - Diagrama tensão/deformação de cálculo. Aço Classe A

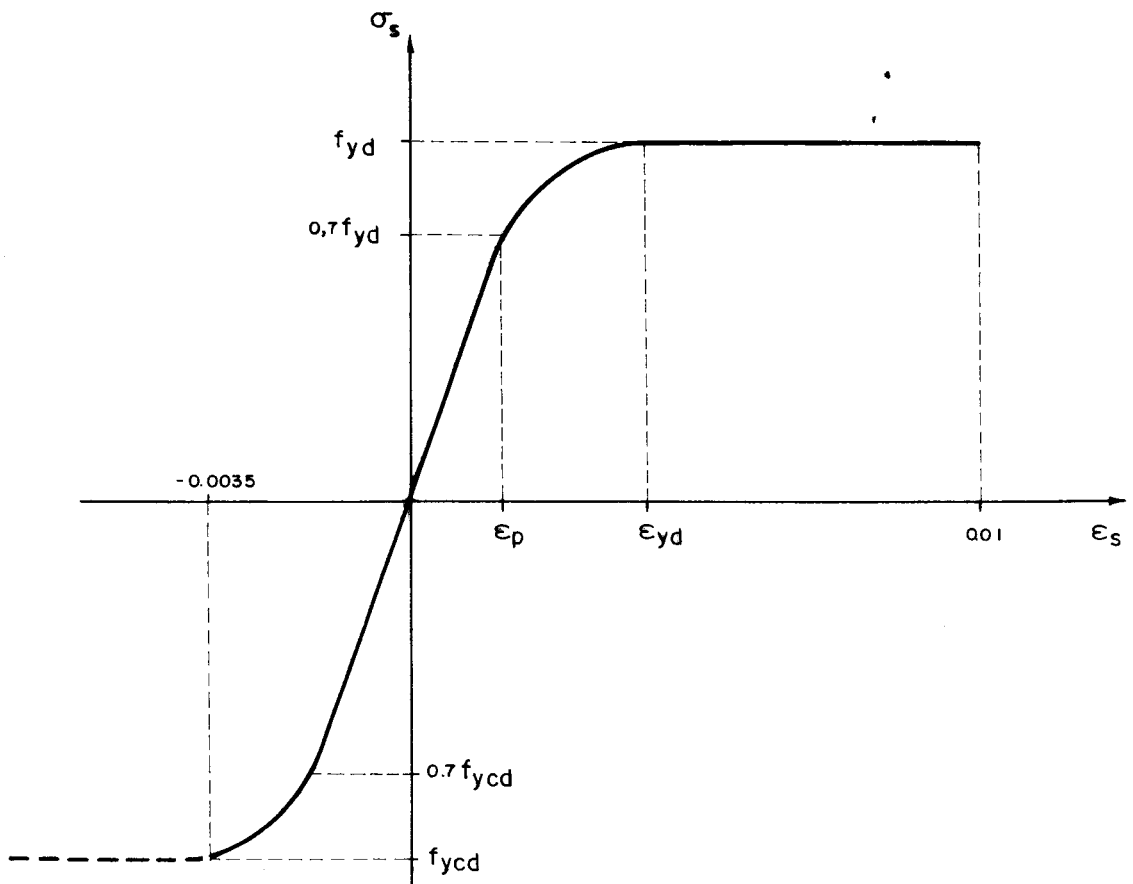


Fig. 2.3 - Diagrama tensão/deformação de cálculo. Aço Classe B

$$\sigma_s = \frac{\epsilon_s}{|\epsilon_s|} f_{yd} \left[ 0,7 - \frac{22,5 f_{yd}}{E_s} + \sqrt{(22,5 f_{yd} / E_s - 0,7)^2 + 45 |\epsilon_s| - 0,49} \right] \quad (3.3)$$

Como no caso anterior, tensões e deformações de compressão têm sinal negativo para facilitar a elaboração dos algoritmos numéricos utilizados na montagem dos ábacos mostrados no final deste texto.

Com relação aos limites estabelecidos para as deformações, os domínios de deformação, já amplamente discutidos, caracterizam-se pelos valores máximos permitidos. Para o concreto esses limites são -0,0035 e -0,002, e para o aço 0,01. É entretanto oportuno mostrar que os seis domínios de finidos podem ser enquadrados em apenas três regiões bem caracterizadas. Note que o estado limite último é caracterizado por uma deformação limite, sendo sempre os valores das tensões decorrentes do estado de deformação da peça.

A partir dos valores limites 0,01, -0,0035 e -0,002 definem-se as regiões I, II e III indicadas na figura 2.4. A região I é definida pelo limite de deformação 0,01 na armadura mais tracionada, abrangendo portanto os domínios 1 e 2. Nesta região a fibra de concreto menos tracionada tem deformação entre os valores -0,0035 e 0,01. A segunda região é caracterizada pelo valor -0,0035 de deformação na região mais comprimida da peça, podendo a parte tracionada variar de uma deformação máxima igual a 0,01 na barra mais tracionada da armadura a uma deformação nula na fibra mais tracionada da peça. Assim a região II engloba os domínios 3, 4 e 4a. A região III é também aqui reservada para peças totalmente comprimidas, coincidindo portanto com o domínio 5, e é caracterizada pela deformação igual a -0,002 para o ponto distante  $3/7h$  da borda mais comprimida da peça.

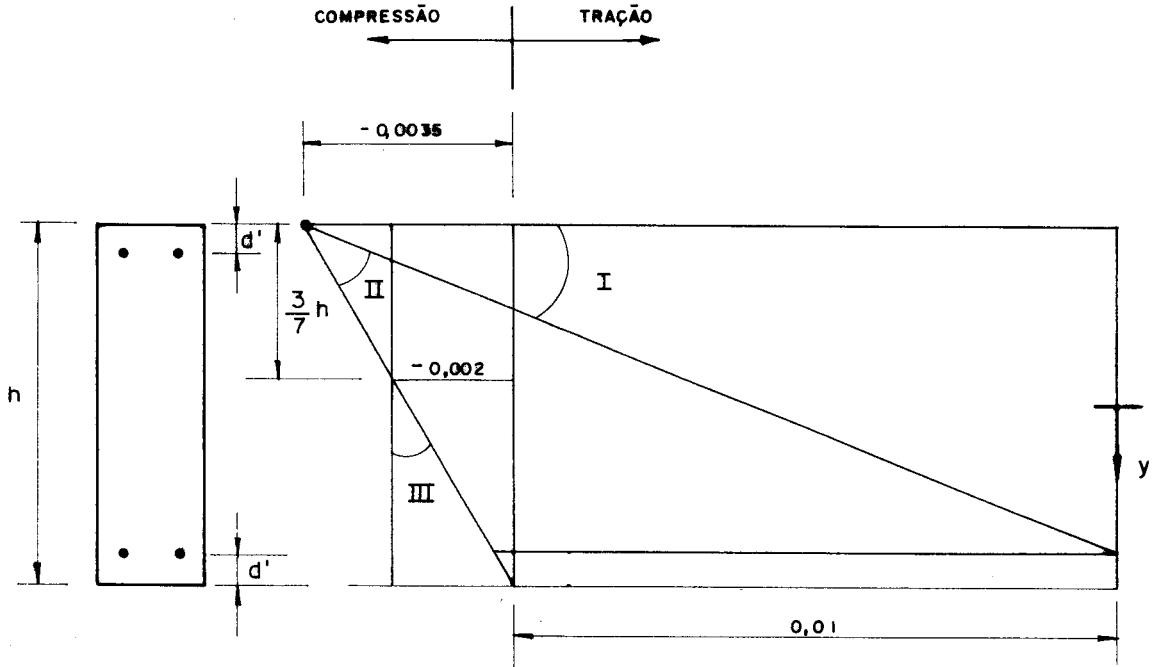


Fig. 2.4 - Regiões de deformação

### 3. COMPATIBILIDADE DE DEFORMAÇÕES

Assumindo válida a hipótese da conservação da seção plana e considerando que uma das deformações limites de finidas, para as regiões I, II ou III, no item anterior deva ser imposta, deformações em quaisquer outros pontos da seção fica automaticamente conhecidos em função apenas da posição do eixo neutro da peça, já que para a definição de uma reta, seção deformada, basta a fixação de dois valores.

Para facilitar o entendimento apresentam-se abaixo as expressões das deformações, ao longo de uma seção qualquer para cada uma das regiões descritas anteriormente.

#### Região I

Considerando o valor último  $\epsilon_{su} = 0,01$  para a armadura tracionada, pode-se escrever a seguinte relação para a deformação,  $\epsilon$ , de um ponto genérico distante  $y$  do centro geométrico da peça:

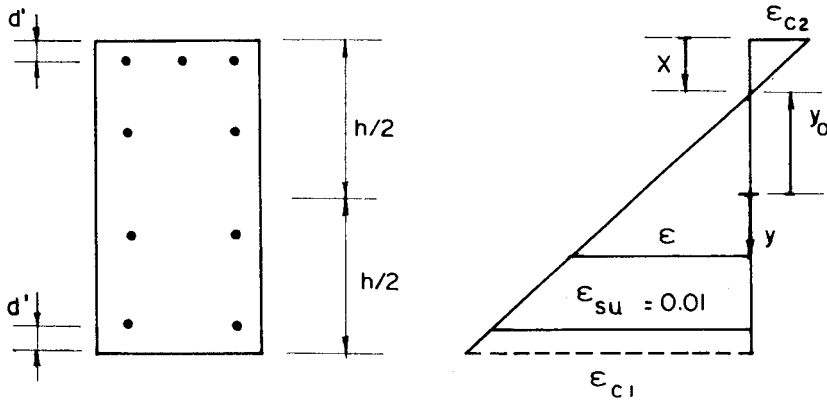


Fig. 3.1 - Deformações da região I

$$\frac{\epsilon}{y-y_0} = \frac{\epsilon_{su}}{h-d'-x} \quad (3.1)$$

Lembrando que tradicionalmente a posição do eixo neutro  $\bar{\epsilon}$  é indicada pelo parâmetro  $\xi$  ( $\xi=x/h$ ) e que

$$x = h/2 + y_0 \quad (3.2)$$

a relação (3.1) fica,

$$\epsilon = \epsilon_{su} \frac{\xi - (\beta_y + 0,5)}{\xi - 1 + \delta} \quad (3.3)$$

onde

$$\delta = d'/h \quad (3.4)$$

$$\beta_y = y/h$$

A relação (3.3) dá os valores das deformações no aço e no concreto para qualquer posição,  $\beta_y$ , desde que conhecida a posição do eixo neutro  $\xi$ .

É importante observar que a deformação do ponto  $y = -h/2$  (ou  $\beta_y = -1/2$ ),  $\epsilon_{c2}$ , deve obedecer os limites descritos para a região I, isto é,

$$\epsilon_{c2} \leq 0,01 \quad \text{e} \quad \epsilon_{c2} \geq -0,0035$$

Substituindo a primeira dessas desigualdades em (3.3) observa-se que essa condição significa  $\xi$  pertencente ao campo real. S3o n3o seria verificada se fosse admitido deforma33es na borda superior maiores que as da borda inferior. Introduzindo-se a segunda desigualdade em (3.3) obtem-se,

$$0,01 \frac{\xi}{\xi + \delta - 1} \geq -0,0035 \quad (3.5)$$

Resolvendo-se (3.5) em termos de  $\xi$  vem

$$\xi \leq 0,259(1 - \delta) \quad (3.6)$$

Para valores de  $\xi$  acima do indicado em (3.6) a regi33o de deforma33es n3o ser3a mais a regi33o I, portanto a equa33o de compatibilidade neste caso dever3a ser a da regi33o II ou regi33o III.

### Regi33o II

Impondo-se para esta regi33o o limite  $\epsilon_{cu2} = -0,0035$  para a deforma33o  $\epsilon_{c2}$  (figura 3.2) que ocorre na parte mais comprimida da pe33a, a equa33o de compatibilidade fica dada pela seguinte express33o:

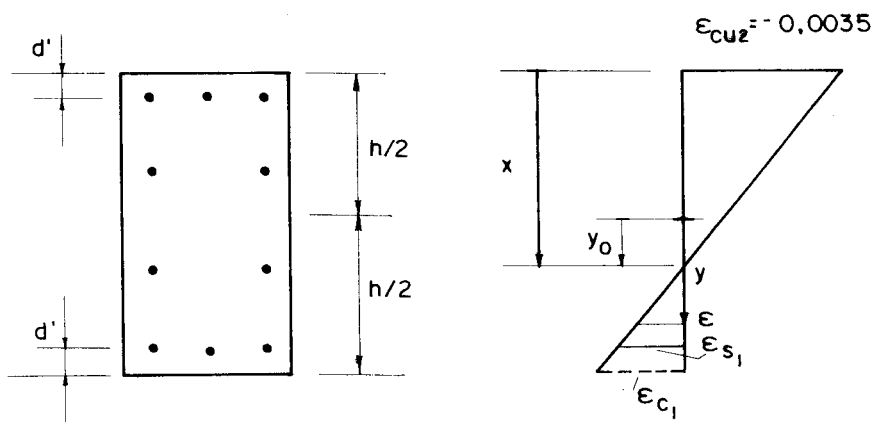


Fig. 3.2 - Deforma33es da regi33o II

$$\frac{\varepsilon}{y-y_0} = \frac{0,0035}{0,5h+y_0} \quad (3.7)$$

Substituindo-se em (3.7) os valores de  $y_0$  (3.2) e dividindo-se numerador e denominador por  $h$  obtem-se

$$\varepsilon = \varepsilon_{cu2} \frac{\xi - (\beta_y + 0,5)}{\xi} \quad (3.8)$$

O valor de  $\varepsilon$  acima deverá obedecer os seguintes limites

$$\varepsilon_s \leq 0,01 \quad (3.9)$$

$$\varepsilon_{c1} \geq 0$$

Quando a primeira dessas condições não for atendida o caso em análise pertence a região I; caso seja a segunda condição que esteja sendo violada o problema deve ser equacionado com as relações da região III.

Substituindo-se em (3.8)  $\beta_y = 0,5 - \delta'$  e  $\delta' = 1$  e utilizando as expressões (3.9) obtem-se o seguinte intervalo de variação para  $\xi$  dentro da região II

$$0,259(1-\delta) \leq \xi \leq 1 \quad (3.10)$$

### Região III

Esta região corresponde exatamente ao domínio 5, os valores das deformações ficam agora dados em função do valor  $\varepsilon_{cu3}$  fixado para o ponto situado a  $3/7h$  da borda mais comprimida.

A figura 3.3 mostra o diagrama de deformações correspondentes a região III, destacando-se o valor último  $\varepsilon_{cu3} = -0,002$  para a deformação de um ponto com  $y = -1/14h$ .

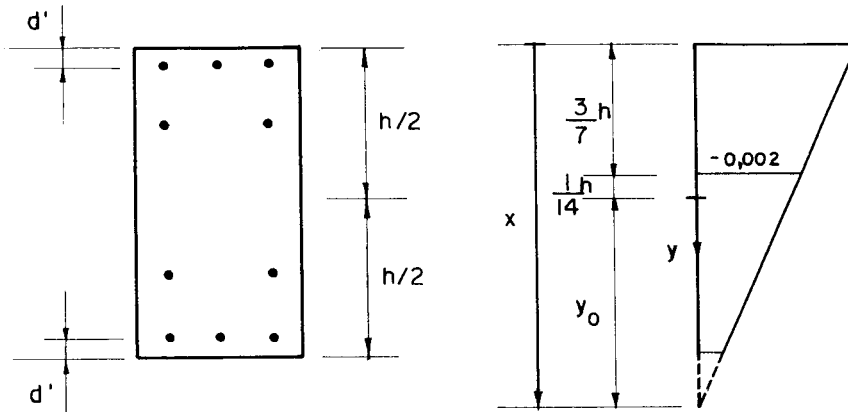


Fig. 3.3 - Deformação da região III

A expressão da deformação para qualquer ponto  $y$  fica novamente expressa pela equação de uma reta que neste caso é dada por,

$$\epsilon = 0,002 \frac{(y-y_0)}{x-3/7 h} \quad (3.11)$$

Substituindo-se o valor de  $y_0$  de acordo com (3.2) e dividindo-se numerador e denominador por  $h$  vem,

$$\epsilon = \epsilon_{cu3} \frac{\xi - (\beta_y + 1/2)}{\xi - 3/7} \quad (3.12)$$

Para que o estado de deformação da peça pertença a região III basta que se verifique a seguinte condição

$$\epsilon_{c1} \leq 0 \quad (3.13)$$

Calculando-se o valor da deformação,  $\epsilon_{c1}$ , na fibra mais tracionada, a partir de (3.12) com  $\beta_y = 1/2$  e impondo a desigualdade (3.13) obtém-se o seguinte intervalo para  $\xi$  na região III

$$\xi \geq 1 \quad (3.14)$$



As equações (3.3), (3.8) e (3.12) representam as condições de compatibilidade para as três regiões de deformações utilizadas. Lembrando que essas equações na verdade representam equações de retas, pode-se facilmente alterar as formas apresentadas de maneira a serem expressas por uma única equação que depende de apenas dois valores característicos da região.

Escolhendo-se como parâmetros indicadores da região o valor da deformação última  $\epsilon_u$ , 0,01, -0,0035 ou -0,002, respectivamente para região I, II ou III, e uma constante adimensional  $\xi_o$  obtida a partir da distância do ponto do valor último até a borda mais comprimida dividida por h, a seguinte fórmula para  $\epsilon$  pode ser escrita.

$$\epsilon = \epsilon_u \frac{\xi - (0,5 + \beta_y)}{\xi - \xi_o} \quad (3.15)$$

Considerando-se as três regiões, os valores assumidos por  $\epsilon_u$  e  $\xi_o$  são:

Região I             $\epsilon_u = \epsilon_{su} = 0,01$

$$\xi_o = 1 - \delta$$

Região II             $\epsilon_u = \epsilon_{cu2} = -0,0035$

$$\xi_o = 0$$

Região III             $\epsilon_u = \epsilon_{cu3} = -0,002$

$$\xi_o = 3/7$$

4. EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO - SEÇÃO RETANGULAR

No item anterior foram mostradas as expressões para o cálculo da deformação em um ponto genérico de uma peça qualquer de concreto armado, a partir dos valores limites estabelecidos pela Norma Brasileira NBr1/78. Sendo os valores das tensões calculados sempre em função das deformações, para se ter a distribuição das tensões resistentes em uma peça qualquer de concreto armado, basta a utilização das relações tensão/deformação (2.1), (2.2) e (2.3). A partir dos valores das tensões assim calculados obtém-se os esforços resistentes da seção.

No caso particular de seção retangular, considerando-se o eixo neutro perpendicular ao plano de simetria da peça, para se ter flexão composta reta, os esforços resistentes  $N_R$  e  $M_R$  são dados pelas seguintes expressões (ver figura 4.1),

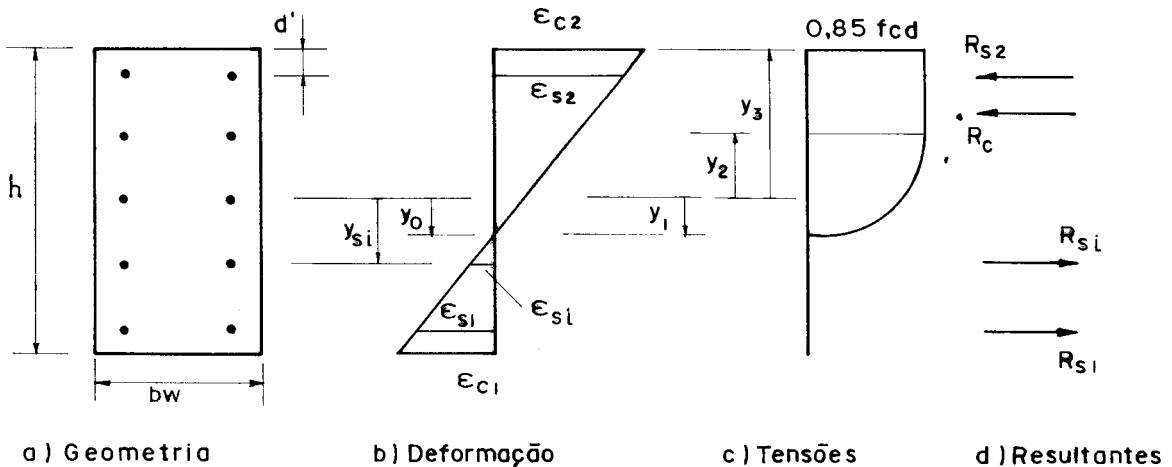


Fig. 4.1 - Seção retangular de concreto armado. Tensões e deformações.

$$N_R = R_c + \sum_{i=1}^N R_{si} \tag{4.1}$$

$$M_R = M_c + \sum_{i=1}^N R_{si} y_{si}$$

Onde  $N$  é o número de barras da armadura, e  $R_c$  e  $M_c$  são resultantes de tensão da seção comprimida de concreto armado relativas à força normal e ao momento fletor, isto é

$$N_c = \int_{A_c} \sigma_c \, dA$$

$$M_c = \int_{A_c} y \sigma_c \, dA$$
(4.2)

Escrevendo-se as resultantes de tensão na armadura em função da tensão,  $\sigma_{si}$ , e da área de cada barra,  $A_{si}$ , obtém-se,

$$N_R = \int_{A_c} \sigma_c \, dA + \sum_{i=1}^N \sigma_{si} A_{si}$$

$$M_R = \int_{A_c} y \sigma_c \, dA + \sum_{i=1}^N y_i \sigma_{si} A_{si}$$

Sendo a seção retangular, as integrais de área passam a ser apenas função da variável  $y$ , ficando (4.3) dada por:

$$N_R = \int_{-h/2}^{y_0} b_w \sigma_c \, dy + \sum_{i=1}^N \sigma_{si} A_{si}$$
(4.4a)

$$M_R = \int_{-h/2}^{y_0} b_w y \sigma_c \, dy + \sum_{i=1}^N y_{si} \sigma_{si} A_{si}$$
(4.4b)

As equações (4.4) permitem avaliar os esforços resultantes,  $N_R$  e  $M_R$  em uma seção de concreto armado com geometria, e características dos materiais definidas. Deve-se notar que os valores dos esforços são apenas função da posição do eixo neutro,  $y_0$ , e das tensões,  $\sigma_c$  e  $\sigma_{si}$ , ficando

portanto os valores de  $N_R$  e  $M_R$  independentes. Cada um deles depende apenas da posição deformada a ser imposta a peça. Assim, a equação (4.4) permite o cálculo de verificação de uma peça de concreto armado obtendo-se pares  $(N_R, M_R)$  para qualquer que seja a posição do eixo neutro. Note-se que no caso de flexão simples, o problema de verificação permite calcular um único valor de  $M_R$ , entretanto neste caso a condição adicional  $N_R = 0$  está sendo imposta, fazendo com que a posição do eixo neutro fique determinada.

Em problemas de dimensionamento, determinação da armadura para uma solicitação dada, o equilíbrio é imposto fazendo esforços solicitantes de cálculo iguais a esforços resistentes isto é,

$$N_d = N_R \tag{4.5}$$

$$M_d = M_R$$

Com essa condição a equação para o dimensionamento de peças retangulares fica,

$$N_d = b_w \int_{-h/2}^{y_o} \sigma_c dy + \sum_{i=1}^N A_{si} \sigma_{si} \tag{4.6}$$

$$M_d = b_w \int_{-h/2}^{y_o} y \sigma_c dy + \sum_{i=1}^N y_{si} A_{si} \sigma_{si}$$

## 5. CÁLCULO SIMPLIFICADO - SEÇÕES RETANGULARES

As fórmulas (4.6) mostradas acima representam o equilíbrio entre esforços resistentes e solicitantes em uma seção retangular para qualquer que seja a distribuição da armadura no interior da seção. Uma particularização que facilita o entendimento do problema proposto é considerar a

armadura constituída de barras localizadas em apenas duas posições, próximas as bordas superior e inferior da seção transversal. Deste modo as somatórias indicadas em (4.6) passam a ter no máximo dois termos, existindo também a possibilidade de uma das armaduras ser eliminada ficando a seção com armadura simples.

Outra simplificação usual que pode ser adotada é a substituição do diagrama tensão/deformação no concreto, constituído por um trecho parabólico e outro retangular, por uma distribuição constante de tensões.

Introduzindo-se essas duas simplificações, indicadas esquematicamente na figura 5.1, as equações de equilíbrio 4.6 podem ser reescritas,

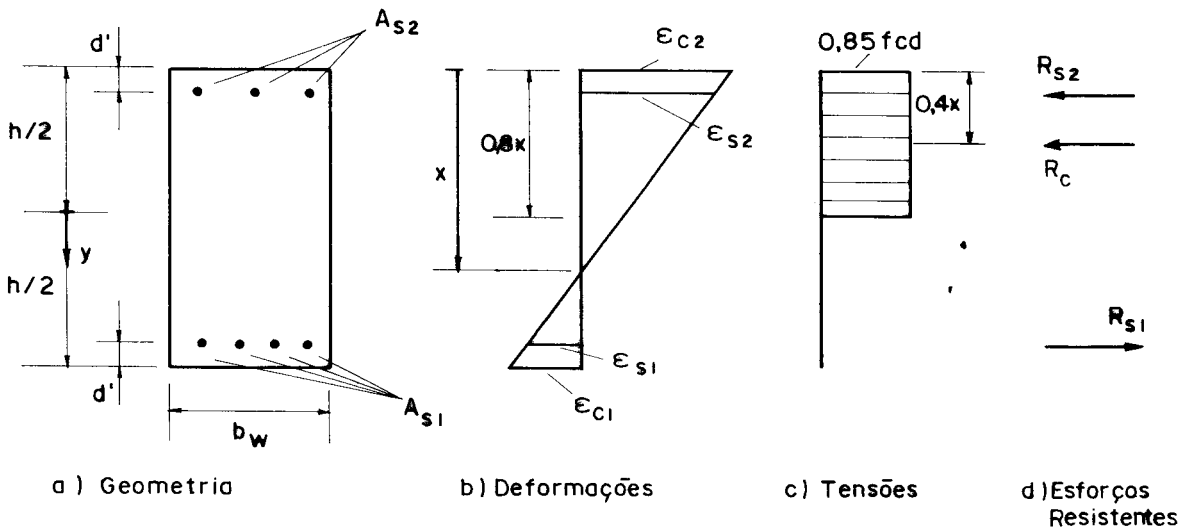


Fig. 5.1 - Seção de concreto armado. Diagrama simplificado de tensões e resultantes.

$$N_d = \int_{-h/2}^{0,8x-h/2} -0,85f_{cd} b_w dy + A_{s1} \sigma_{s1} + A_{s2} \sigma_{s2}$$

$$M_d = \int_{-h/2}^{0,8x-h/2} -0,85f_{cd} b_w y dy + A_{s1} (0,5h-d') \sigma_{s1} -$$

$$-A_{s2} (0,5h-d') \sigma_{s2} \tag{5.1}$$

Fazendo-se as integrais indicadas obtem-se,

$$N_d = -0,68f_{cd} b_w x + A_{s1} \sigma_{s1} + A_{s2} \sigma_{s2} \quad (5.2)$$

$$M_d = 0,34f_{cd} b_w x(h-0,8x) + (0,5h-d')(A_{s1} \sigma_{s1} - A_{s2} \sigma_{s2})$$

Nas equações acima o valor de  $x$  é sempre positivo e nunca maior que  $1,25h$ . Nos casos onde a posição do eixo neutro levaria a valores fora desse intervalo o valor de  $x$ , na equação (5.2), deverá ser tomado igual a zero quando a seção está totalmente tracionada e igual a  $1,25h$  quando totalmente comprimida.

O dimensionamento de peças de concreto armado submetidas à flexão composta é sempre feito com base em (5.2) e levando em conta a equação de compatibilidade (3.15) para que as tensões nas barras fiquem definidas. Em geral, no dimensionamento, a geometria da seção é previamente estabelecida ficando como incógnitas as variáveis  $A_{s1}$ ,  $A_{s2}$  e  $x$ . Assim, o sistema tem infinitas soluções. Portanto para se ter uma solução do sistema uma dessas variáveis deve ser necessariamente arbitrada. Fixando-se a linha neutra as incógnitas do problema ficam sendo as armaduras. Se ao contrário, for fixada uma armadura ou a relação entre elas, as incógnitas, neste caso, ficam sendo a posição do eixo neutro,  $x$ , e o valor de uma das armaduras.

Embora pelo descrito acima pareça que a solução seja muito simples, bastando adotar uma das variáveis, é importante lembrar que a fixação desse valor deve obedecer características impostas pela solicitação. A coerência em relação ao parâmetro adotado pode ser verificada pelo significado dos valores obtidos. Assim, se uma das áreas da armadura calculada for negativa fica claro que a imposição feita está incompatível com a solicitação e outro valor para o parâmetro deve ser adotado para reanalisar o problema.

Para ilustrar o dito acima, toma-se um tirante sollicitado por uma força normal  $N_d$  e com momento  $M_d$  nulo. É óbvio que o parâmetro adotado é  $x = -\infty$  acarretando  $\sigma_{s1} = \sigma_{s2} = f_{yd}$ . Das equações (5.2) obtém-se:

$$A_{s1} = A_{s2} = \frac{1}{2} \frac{N_d}{f_{yd}} \quad (5.3)$$

Se outra condição diferente fosse imposta, algum absurdo resultaria dos valores calculados. Por exemplo, fixando-se  $x = \infty$  obtém-se duas armaduras iguais e negativas.

### Exemplo Numérico

Dados:

geometria  $h = 50\text{cm}$  ,  $b_w = 20\text{cm}$  ,  $d' = 3\text{cm}$

materiais aço: CA-50A , concreto: C-18

solicitação  $N_d = 1029\text{kN}$   $M_d = 1582\text{kNcm}$  ,

Pede-se: calcular as armaduras

Impondo  $A_s = A_{s1} = A_{s2}$ , restam como incógnitas do problema,  $x$  e  $A_s$ , podendo-se escrever (5.2) na seguinte forma,

$$N_d = -0,68f_{cd}b_w x + A_s(\sigma_{s1} + \sigma_{s2}) \quad (5.4)$$

$$M_d = 0,34f_{cd}b_w x(h - 0,8x) + A_s(0,5h - d')(\sigma_{s1} - \sigma_{s2})$$

O sistema acima deve ser resolvido sempre levando-se em conta a equação de compatibilidade (3.15). Uma das maneiras de se obter a área  $A_s$  desejada é através de tentativas. Adotando-se  $x$  obtém-se a partir da primeira equação de (5.4) o valor de  $A_s$ . Com os valores de  $x$  e  $A_s$  verifica-se a segunda equação. Se os momentos calculado e aplicado forem

diferentes, adotam-se outros valores de  $x$  até que a convergência seja verificada. Assim, fazendo-se  $x = 50\text{cm}$  (domínio 5) obtem-se  $\sigma_{s1} = -4,41\text{kN/cm}^2$  e  $\sigma_{s2} = -43,5\text{kN/cm}^2$ , podendo-se, portanto, calcular  $A_s$  para a primeira tentativa.

$$A_s^1 = 6,88\text{cm}^2$$

Substituindo-se esse valor na segunda equação estima-se o valor do momento  $M_d^1$ .

$$M_d^1 = 9413\text{kNcm} \neq M_d$$

O procedimento acima deve ser repetido para outros valores de  $x$  até encontrar  $M_d^i = M_d$  dentro de uma tolerância aceitável. No exercício proposto chega-se a

$$x = 62,5\text{cm} \quad \text{e} \quad A_s = 2,60\text{cm}^2$$

## 6. EQUAÇÕES ADIMENSIONAIS

As integrais do diagrama de tensão indicadas em (4.4) pode-se, por facilidade de entendimento, ser separadas em dois termos que correspondem as partes parabólica e retangular do diagrama de tensão. Assumindo-se que o trecho parabólico é definido entre os valores  $y_1$  e  $y_2$  e o trecho retangular é válido de  $y_2$  e  $y_3$ , e substituindo o valor de  $\sigma_c$  de acordo com (2.1) obtem-se,

$$N_R = 850f_{cd}b_w \int_{y_{c2}}^{y_{c1}} (1+250\varepsilon_c)\varepsilon_c dy - 0,85f_{cd}b_w(y_2-y_3) + \sum_{i=1}^N \sigma_{si}A_{si} \quad (6.1)$$



$$M_R = 850 f_{cd} b_w \int_{y_2}^{y_1} y (1+250 \epsilon_c) \epsilon_c dy - 0,425 f_{cd} b_w (y_2^2 - y_3^2) +$$

$$+ \sum_{i=1}^N y_{si} \sigma_{si} A_{si}$$

As expressões (6.1) permitem a avaliação dos esforços resistentes,  $N_R$  e  $M_R$ , para um seção retangular. Os limites de integração e a relação entre  $\sigma_c$  e  $y$  são sempre dadas em função da posição da linha neutra  $\xi$ . É importante observar que os valores limites  $y_1$ ,  $y_2$  e  $y_3$  não devem, em módulo, ser maiores que  $h/2$  para se ter integração apenas sobre as dimensões reais da peça.

Para o estudo de seções de concreto armado é conveniente escrever as relações (6.1) independentes das dimensões da peça,  $h$  e  $b_w$ , e da tensão de cálculo  $f_{cd}$ . Para isso, definem-se agora os valores adimensionais da força normal e do momento fletor resistentes

$$v = \frac{N_R}{A_c f_{cd}} \quad (6.2)$$

$$\mu = \frac{M_R}{A_c h f_{cd}}$$

Dividindo-se as equações (6.1) por  $A_c f_{cd}$  e  $A_c h f_{cd}$  respectivamente obtém-se,

$$v = 850 \int_{\beta_2}^{\beta_1} (1+250 \epsilon_c) \epsilon_c d\beta_y - 0,85 (\beta_2 - \beta_3) + \frac{\omega}{f_{yd}} \sum_{i=1}^N \sigma_{si} \eta_{si} \quad (6.3)$$

$$\mu = 850 \int_{\beta_2}^{\beta_1} \beta_y (1+250 \epsilon_c) \epsilon_c d\beta_y - 0,425 (\beta_2^2 - \beta_3^2) + \frac{\omega}{f_{yd}} \sum_{i=1}^N \sigma_{si} \beta_{si} \eta_{si}$$

onde  $\omega$ , definido como a taxa mecânica de armadura da seção, vale,

$$\omega = \frac{f_{yd} A_s}{f_{cd} A_c}, \quad (6.4)$$

$\eta_{si}$  é relação entre a área de uma barra e a área total,

$$\eta_{si} = A_{si} / A_s, \quad (6.5)$$

e  $\beta_{si}$  são as coordenadas adimensionais das posições das barras,

$$\beta_{si} = y_{si} / h \quad (6.6)$$

As expressões (6.3) podem ser transformadas substituindo-se o valor de  $\epsilon_c$  pela equação de compatibilidade dada em (3.5), obtendo-se,

$$\begin{aligned} v = 850 \int_{\beta_2}^{\beta_1} (1 + 250 \epsilon_u \frac{\xi - 0,5 - \beta_y}{\xi - \xi_0}) \epsilon_u \frac{\xi - 0,5 - \beta_y}{\xi - \xi_0} d\beta_y \\ - 0,85(\beta_2 - \beta_3) + \frac{\omega}{f_{yd}} \sum_{i=1}^N \sigma_{si} \eta_{si} \end{aligned} \quad (6.7a)$$

$$\begin{aligned} \mu = 850 \int_{\beta_2}^{\beta_1} \beta_y (1 + 250 \epsilon_u \frac{\xi - 0,5 - \beta_y}{\xi - \xi_0}) \epsilon_u \frac{\xi - 0,5 - \beta_y}{\xi - \xi_0} d\beta_y \\ - 0,425(\beta_2^2 - \beta_3^2) + \frac{\omega}{f_{yd}} \sum_{i=1}^N \sigma_{si} \beta_{si} \eta_{si} \end{aligned} \quad (6.7.b)$$

Integrando-se (6.7) e substituindo os limites  $\beta_1$  e  $\beta_2$  chega-se a,

$$v = \frac{850 \epsilon_u}{\xi - \xi_0} \left\{ \frac{250 \epsilon_u}{\xi - \xi_0} \left[ (\beta_1^3 - \beta_2^3) / 3 - (\xi - 0,5) (\beta_1^2 - \beta_2^2) \right] + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + (\xi - 0,5)^2 (\beta_1 - \beta_2) \Big] - (\beta_1^2 - \beta_2^2) / 2 + \\
 & + (\xi - 0,5) (\beta_1 - \beta_2) \Big\} - 0,85 (\beta_2 - \beta_3) + \\
 & + \frac{\omega}{f_{yd}} \sum_{i=1}^N \sigma_{si} \eta_{si} \qquad (6.8a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mu = \frac{850 \epsilon_u}{\xi - \xi_0} & \left\{ - (\beta_1^3 - \beta_2^3) / 3 + (\xi - 0,5) (\beta_1^2 - \beta_2^2) / 2 + \frac{250 \epsilon_u}{\xi - \xi_0} \right. \\
 & \left[ - 2 (\xi - 0,5) (\beta_1^3 - \beta_2^3) / 3 + (\xi - 0,5)^2 (\beta_1^2 - \beta_2^2) / 2 + \right. \\
 & \left. \left. + (\beta_1^4 - \beta_2^4) / 4 \right] \right\} - 0,425 (\beta_2^2 - \beta_3^2) + \frac{\omega}{f_{yd}} \sum_{i=1}^N \sigma_{si} \beta_{si} \eta_{si} \qquad (6.8b)
 \end{aligned}$$

As expressões acima permitem a determinação dos esforços adimensionais em uma seção retangular de concreto armado. Para o dimensionamento de uma seção deve-se procurar fazer o par de esforço resistente ser igual aos valores dos esforços adimensionais de cálculo, garantindo-se portanto o equilíbrio no estado limite último. Considerando-se em (6.8)  $v$  e  $\mu$  de cálculo obtem-se um sistema não linear que resolvido fornecerá o valor da taxa mecânica de armadura,  $\omega$ , para uma disposição de barras previamente fixada. Na resolução desse sistema será também determinada o parâmetro  $\xi$  que apenas indica a posição do eixo neutro e portanto o domínio em que o estado limite ocorre. Note-se que esse sistema assim apresentado tem solução única uma vez que as relações entre os diversos valores de  $A_{si}$  foram fixados pelos valores  $\eta_{si}$ , com todas as demais variáveis que aparecem em (6.8),  $\beta_{si}$ ,  $\sigma_{si}$ ,  $\epsilon_u$  e  $\xi_0$ , sendo funções de  $\xi$ .

Para ilustrar a resolução do sistema acima, é analisado o caso de peças totalmente comprimidas. Neste caso  $\xi$

passa a valer  $+\infty$ . Ficam também fixados o valor  $\xi_0 = 3/7$  e deformações para qualquer ponto iguais a  $-0,002$ . Calculando-se o limite de 6.8 para  $\xi \rightarrow \infty$  obtem-se,

$$v = 850\varepsilon_u (\beta_1 - \beta_2) (1 + 250\varepsilon_u) - 0,85(\beta_2 - \beta_3) + \frac{\omega}{f_{yd}} \sum_{i=1}^N \sigma_{si} \eta_{si}$$

$$\mu = 425\varepsilon_u (\beta_1^2 - \beta_2^2) (1 + 250\varepsilon_u) - 0,425(\beta_2^2 - \beta_3^2) + \frac{\omega}{f_{yd}} \sum_{i=1}^N \beta_{si} \sigma_{si} \eta_{si}$$

(6.9)

Agora com a posição da linha neutra definida os demais parâmetros dependentes de  $\xi$  ficam também definidos. Assim tem-se,

para  $\xi = \infty$        $\varepsilon_u = -0,002$        $\beta_1 = 1/2$

$\beta_2 = -1/14$        $\beta_3 = -1/2$

$$\sigma_{si} = \sigma_s - \text{valor da tensão na armadura para } \varepsilon_s = -0,002$$

Substituindo-se esses valores em (6.9) vem,

$$v = -0,85 + \frac{\omega}{f_{yd}} \sigma_s \sum_{i=1}^N \eta_{si}$$

(6.10)

$$\mu = \frac{\omega}{f_{yd}} \sigma_s \sum_{i=1}^N \beta_{si} \eta_{si}$$

O sistema (6.10) permite a determinação da taxa mecânica de armadura,  $\omega$ , de uma seção totalmente comprimida. É evidente que se uma variável foi fixada ( $\xi = \infty$ ) é necessário que apenas duas outras referentes a armadura sejam incógnitas para se ter solução de (5.11) única. Escolhendo-se, por exemplo, para a seção,  $N = 2$ , com armaduras localizadas em  $\beta_{s1} = 0,5 - \delta$  e  $\beta_{s2} = -0,5 + \delta$ , isto é, peça com ar

madura dupla, as relações  $\eta_{s1}$  e  $\eta_{s2}$  ficam sendo incôgnitas do sistema. Sabendo-se que  $\eta_{s1} + \eta_{s2} = 1$  as equações (6.10) podem ser escritas na seguinte forma,

$$v = -0,85 + \frac{\omega \sigma_s}{f_{yd}} \quad (6.11)$$

$$\mu = \frac{\omega}{f_{yd}} \sigma_s (0,5 - \delta) (2\eta_{s1} - 1)$$

da primeira obtem-se,

$$\omega = (v + 0,85) \frac{f_{yd}}{\sigma_s} \quad (6.12)$$

podendo-se calcular, a partir desse valor,  $\eta_{s1}$  e  $\eta_{s2}$ ,

$$\eta_{s1} = 1/2 + \frac{1}{(1-2\delta)} \frac{\mu}{(v+0,85)} \quad (6.13)$$

$$\eta_{s2} = 1/2 - \frac{1}{(1-2\delta)} \frac{\mu}{(v+0,85)}$$

Lembrando-se da definição de taxa mecânica de armadura (6.4) obtem-se,

$$A_s = (v + 0,85) A_c f_{cd} / \sigma_s \quad (6.14)$$

com armadura inferior dada por,

$$A_{s1} = \frac{A_c f_{cd}}{2\sigma_s} \left( v + 0,85 + \frac{\mu}{0,5 - \delta} \right) \quad (6.15)$$

e armadura superior igual a,

$$A_{s2} = \frac{A_c f_{cd}}{2\sigma_s} \left( v + 0,85 - \frac{\mu}{0,5 - \delta} \right) \quad (6.16)$$

Assim como as equações (6.8) foram particularizadas para o caso de peças com força normal predominante, onde é possível a imposição de  $\xi = \infty$ , outras particularizações também podem ser feitas. Recomenda-se, no entanto, que qualquer particularização seja feita com a fixação de  $\xi$  ficando sempre como incógnitas parâmetros relativos a armadura.

O equacionamento mostrado acima, entretanto, não é usual. Para o cálculo direto da armadura o emprego do diagrama aproximado de tensões, já mostrado no item 5, leva a um sistema relativamente mais simples, sendo, portanto, recomendado. O objetivo do equacionamento proposto é ter uma formulação que permita avaliar esforços resistentes,  $v$  e  $\mu$ , em uma peça com disposição e taxa mecânica da armadura definidas para qualquer que seja a deformação imposta. Esse esquema permite a construção de ábacos de esforços resistentes, que uma vez elaborados podem ser utilizados no dimensionamento de peças de concreto armado desde que adotada previamente a disposição das barras no interior da seção.

## 7. ÁBACOS DE DIMENSIONAMENTO

Como foi discutido no final do item anterior às equações (6.8) permitem avaliar os esforços adimensionais,  $v$  e  $\mu$ , quando os parâmetros posição do eixo neutro,  $\xi$ , taxa mecânica de armadura,  $\omega$ , disposição das barras na seção e tipo de aço estão definidos.

Para ilustrar o descrito acima, um exemplo é analisado mostrando diversos pares  $v$ ,  $\mu$  calculados a partir de valores de  $\xi$  e mantendo fixo o valor de  $\omega$ .

Na figura 7.1 é indicada a posição adotada para as armaduras. Embora a seção esteja descrita com dimensões, o cálculo a ser feito é independente, uma vez que é baseado em esforços adimensionais e válido, portanto, para qualquer que sejam as dimensões da peça desde que as relações fixadas sejam mantidas.

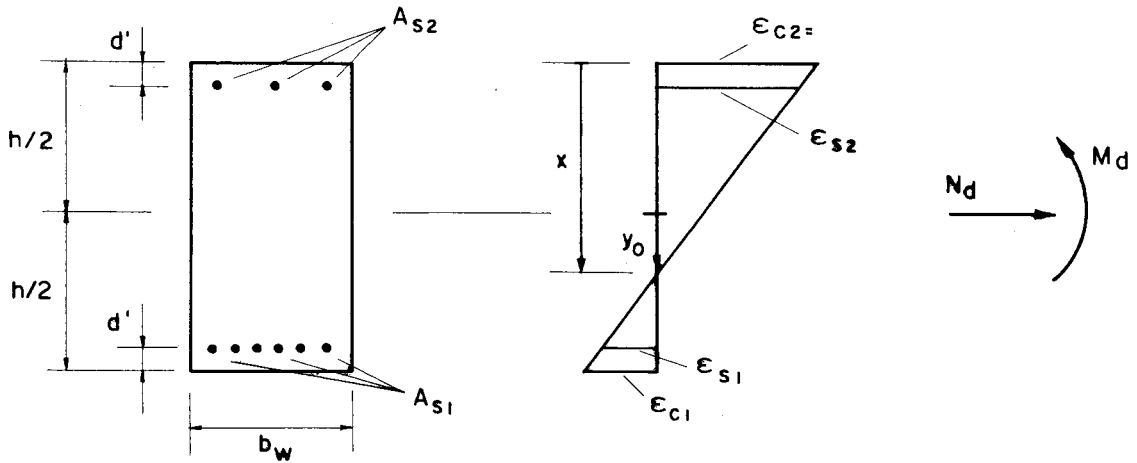


Fig. 7.1 - Exemplo numérico. Geometria e disposição das barras

Para o cálculo dos parâmetros  $\nu$  e  $\mu$  os seguintes valores da seção são dados:

cobrimento:  $\delta = d'/h = 0,05$

posição das armaduras:  $\beta_{s1} = 0,45$  e  $\beta_{s2} = -0,45$

armaduras:  $\eta_{s1} = A_{s1}/A_s = 0,667$  e  $\eta_{s2} = A_{s2}/A_s = 0,333$

classe do aço: CA-50A  $\rightarrow f_{yd} = 435 \text{ kN/cm}^2$

taxa mecânica: de armadura:  $\omega = 0,5$

Com esses valores a seção fica com a geometria de finida podendo-se avaliar  $\nu$  e  $\mu$  para qualquer  $\xi$ . Fazendo, por exemplo,  $\xi = 1,0$ , isto é, eixo neutro passando na face inferior da seção, tem-se,

$$\beta_1 = 0,5 \quad \beta_2 = -1/14 \quad \beta_3 = -0,5$$

Os valores  $\xi_o$  e  $\epsilon_u$  podem ser os relativos a região II ou III pois  $\xi = 1,0$  representa o limite entre essas duas regiões. Fazendo-se  $\xi_o = 0,0$  e  $\epsilon_u = -0,0035$ , região II, e

empregando a equação (3.15) calculam-se as deformações nas armaduras,

$$\epsilon_{s1} = -0,0035 \frac{1,0 - (0,5 + 0,45)}{1,0} = -1,75 \times 10^{-4}$$

$$\epsilon_{s2} = -0,0035 \frac{1,0 - (0,5 - 0,45)}{1,0} = -3,33 \times 10^{-3}$$

A partir desses valores das deformações, as tensões nas armaduras podem ser avaliadas,

$$\sigma_{s1} = -1,75 \times 10^{-4} \times 2,1 \times 10^5 = -36 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{s2} = -435 \text{ kN/cm}^2 \quad (|\epsilon_{s2}| > \epsilon_{yd})$$

Com esses parâmetros fixados, pode-se calcular os valores de  $\nu$  e  $\mu$  a partir de (6.8).

Para um melhor entendimento dessa operação, é melhor avaliar separadamente as influências do concreto e da armadura nos valores de  $\nu$  e  $\mu$ , assim pode-se escrever

$$\mu = \nu_c + \nu_s \tag{7.1}$$

$$\mu = \mu_c + \mu_s$$

Deste modo, considerando que nas equações (6.8) as parcelas  $\nu_s$  e  $\mu_s$  são os termos que contêm  $\omega$ , e  $\nu_c$  e  $\mu_c$  o restante da expressão obtém-se,

$$\nu_c = -0,688 \qquad \nu_s = -0,193$$

$$\mu_c = 0,055 \qquad \mu_s = 0,063$$



Somando-se as partes referentes ao concreto e à armadura vem:

$$v = -0,881 \quad \mu = 0,118$$

Note que os valores calculados para o concreto são bastante próximos dos valores obtidos com o uso do diagrama de tensões aproximado. Neste caso o retângulo de tensões teria uma altura igual a 0,8 com a resultante aplicada a 0,1 do CG da peça (figura 7.2) podendo-se avaliar  $v_c$  e  $\mu_c$  com as seguintes expressões

$$v_{c(\text{apr.})} = -0,85 \times 0,8 = -0,68$$

$$\mu_{c(\text{apr.})} = 0,85 \times 0,8 \times 0,1 = 0,068$$

Sendo portanto bastante próximos dos valores calculados sem a simplificação do diagrama

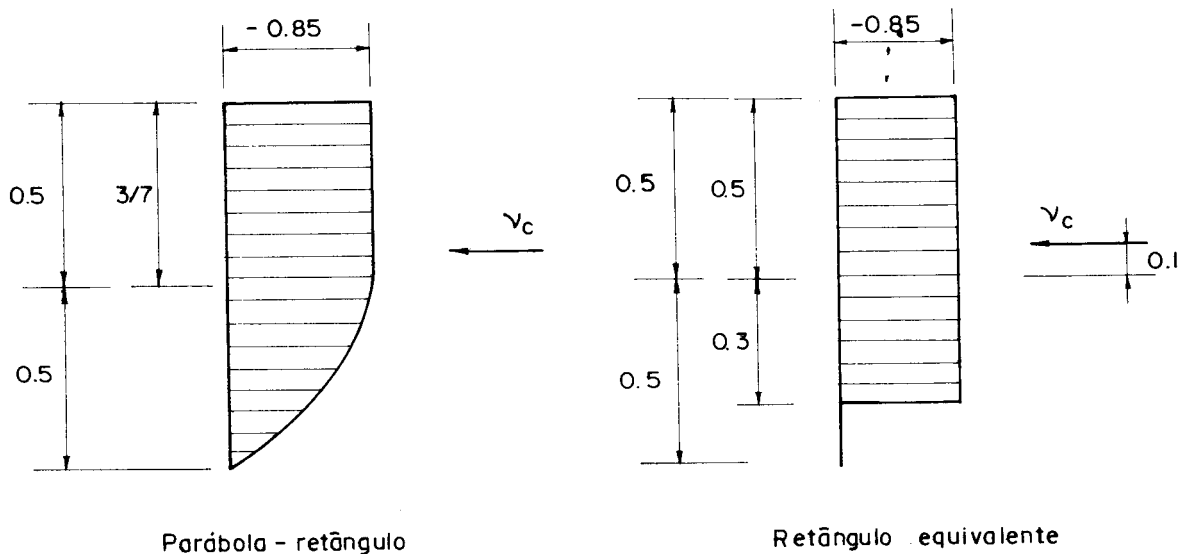


Fig. 7.2 - Diagramas reduzidos de tensão com resultantes adimensionais.

De uma maneira análoga o cálculo poderia ser repetido para outros valores de  $\xi$  obtendo-se uma série de pares  $v, \mu$  como é mostrado na tabela 7.1.

$\xi$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\xi$	$\epsilon_{lim}$	$\epsilon_{s1}$	$\epsilon_{c2}$	$\sigma_{s1}$	$\sigma_{s2}$	$\nu$	$\mu$
-5,0	-0,5	-0,50	-0,5	0,95	0,0100	0,0100	0,0085	435	435	0,50	0,07
0,0	-0,5	-0,50	-0,5	0,95	0,0100	0,0100	0,0005	435	105	0,38	0,13
0,1	-0,4	-0,50	-0,5	0,95	0,0100	0,0100	0,0017	435	-370	0,25	0,19
0,2	-0,3	-0,45	-0,5	0,95	0,0100	0,0100	0,0020	435	-420	-0,05	0,27
0,3	-0,2	-0,37	-0,5	0,00	-0,0035	0,0076	-0,0029	435	-435	-0,04	0,30
0,4	-0,1	-0,33	-0,5	0,00	-0,0035	0,0048	-0,0031	435	-435	-0,10	0,32
0,5	0,0	-0,29	-0,5	0,00	-0,0035	0,0032	-0,0032	435	-435	-0,17	0,32
0,6	0,1	-0,24	-0,5	0,00	-0,0035	0,0020	-0,0032	429	-435	-0,24	0,33
0,7	0,2	-0,20	-0,5	0,00	-0,0035	0,0013	-0,0035	263	-435	-0,44	0,26
0,8	0,3	-0,16	-0,5	0,00	-0,0035	0,0007	-0,0033	138	-435	-0,60	0,21
0,9	0,4	-0,11	-0,5	0,00	-0,0035	0,0002	-0,0033	041	-435	-0,75	0,16
1,0	0,5	-0,07	-0,5	0,00	-0,0035	-0,0002	-0,0033	- 35	-435	-0,88	0,12
3,0	0,5	-0,07	-0,5	0,43	-0,0020	-0,0016	-0,0023	-335	-435	-1,27	-0,04
5,0	0,5	-0,07	-0,5	0,43	-0,0020	-0,0018	-0,0022	-372	-435	-1,30	-0,05
$\infty$	0,5	-0,07	-0,5	0,43	-0,0020	-0,0020	-0,0020	-420	-420	1,33	-0,07

Tabela 7.1 - Valores de esforços adimensionais resistentes em função da posição do eixo neutro,  $\xi$ .

Os valores de  $\nu$  e  $\mu$  dados na tabela 2.1 podem ser lançados em diagramas adimensionais  $\nu$ ,  $\mu$  conforme indicada na figura 7.3. Embora apenas pontos discretos tenham sido calculados, é fácil perceber que uma curva contínua relacionado os valores de  $\mu$  e  $\nu$  pode ser obtida. A continuidade dessa curva é garantida pelas equações (6.8) onde todos os termos são contínuos, uma vez que estão baseados nas relações tensão de formação dos materiais e na equação de compatibilidade.

A curva obtida também pode ser interpretada como um critério de resistência da peça. Pares  $(\nu, \mu)$  na região interna obedecem ao critério estabelecido, enquanto que pares sobre a curva estão no limite último de resistência. Para pares  $(\nu, \mu)$  fora da área determinada pela curva não é possível encontrar uma posição deformada da peça que produza esforços resistentes necessários ao equilíbrio.

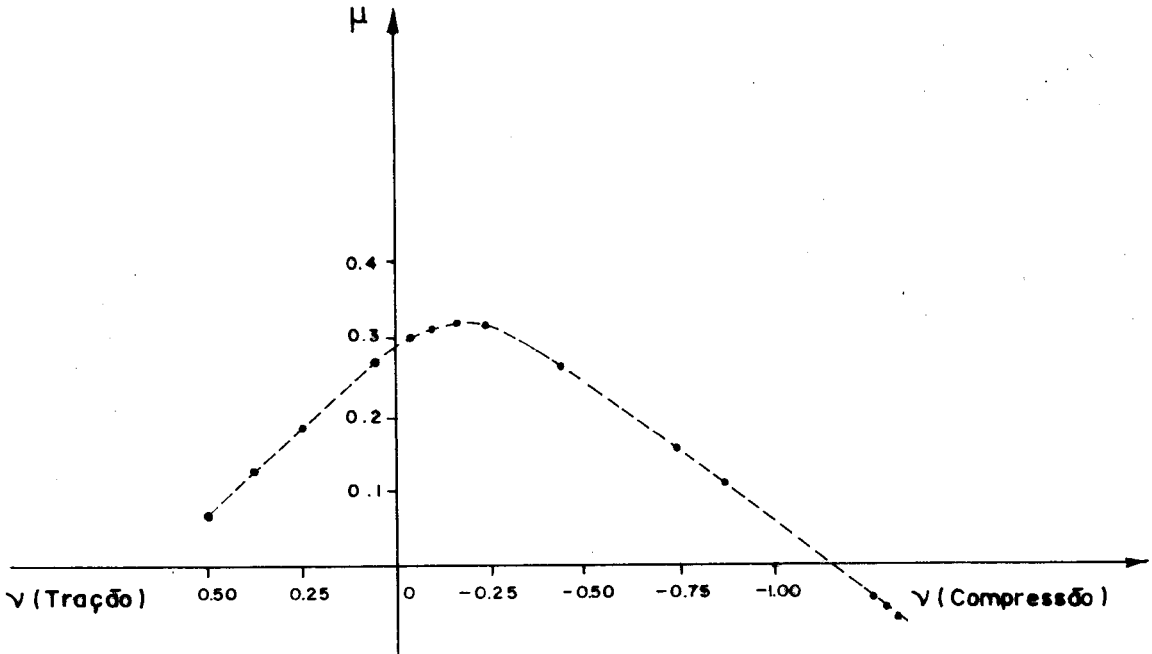


Fig. 7.3 - Relação entre esforços adimensionais últimos em uma seção retangular com  $\omega = 0,5$  e aço CA-50A.

A não uniformidade na distribuição dos pontos indicados na figura 7.3 é explicada pela não linearidade mostrada nas equações dos esforços resistentes. Observa-se também que para valores de  $\xi$  que correspondem ao eixo neutro definido fora da seção,  $\xi > 1,0$  e  $\xi < 0,0$ , pouca variação nos valores de  $\nu$  e  $\mu$  é observada, enquanto que os pontos obtidos com  $\xi$  entre 0,0 e 1,0 correspondem a uma grande extensão da curva.

O gráfico também mostra um trecho com valores negativos de  $\mu$ . Isto só vai ocorrer para diagramas onde não há simetria de armadura.

Curvas similares as indicadas em 7.3 podem ser obtidas para valores de  $\omega$  usuais em peças de concreto armado estabelecendo-se um ábaco que fornece valores de esforços resistentes  $\nu$ ,  $\mu$  para qualquer que seja a posição do eixo neutro. Este ábaco possibilita o cálculo de  $\omega$  em peças de concreto armado. A partir dos valores  $\nu$  e  $\mu$  de cálculo escolhe-se o valor de  $\omega$  de maneira a se ter  $\nu$  e  $\mu$  resistentes que

satisfaçam o equilíbrio. Isto é, sabendo-se que valores de cálculo e esforços resistentes devem ser iguais, entra-se com  $v$  e  $\mu$  no ábaco obtendo-se  $\omega$ , e interpolando-se quando necessário.

No final deste texto estão apresentados ábacos para os aços CA-50A e CA-50B, para as disposições simétricas mais usuais de armadura, permitindo assim o cálculo de seções de concreto armado de uma maneira rápida e segura.

O dimensionamento de uma peça de concreto armado pode ser feito facilmente empregando-se tais ábacos. Escolhida uma disposição construtiva para a armadura a ser calculada (figura 7.4) o cálculo de  $A_s$  total da seção é iniciado pela obtenção dos esforços adimensionais de cálculo

$$v = \frac{N_d}{A_c f_{cd}} \quad (7.2)$$

$$\mu = \frac{M_d}{A_c h f_{cd}}$$

onde  $A_c$  é a área total da seção,  $A_c = bh$

A distância "e", excentricidade da força normal de cálculo, que é indicada para ressaltar a direção do momento fletor aplicado, vale,

$$e = \frac{M_d}{N_d}$$

ou (7.3)

$$e = \frac{\mu}{v}$$

Os valores m e n indicam respectivamente o número total de barras dispostas na seção e a quantidade de camadas utilizadas. Na figura 3.4 o número total de barras m é igual a 20 distribuídas em 7 (n) camadas.

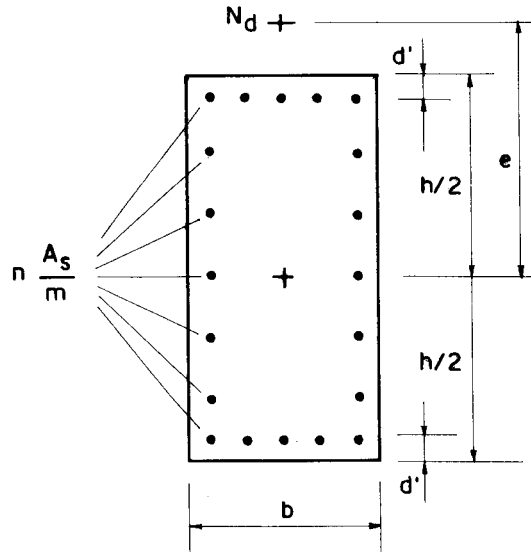


Fig. 7.4 - Parâmetros utilizados no dimensionamento de seção retangular de concreto armado.

Escolhendo-se o âbaco a partir do tipo de aço adotado e do valor da relação  $\delta$  ( $\delta = d'/h$ ), entra-se com o par  $(\nu, \mu)$  e obtém-se a taxa mecânica,  $\omega$ .

Para o cálculo da armadura total utiliza-se (6.4) em sua forma inversa, ou seja,

$$A_s = \frac{\omega A_c f_{cd}}{f_{yd}} \quad (7.4)$$

Com esse valor pode-se estabelecer a área individual de cada barra

$$A_s^1 = A_s / m \quad (7.5)$$

## 8. EXEMPLOS

Para ilustrar o processo de dimensionamento descrito nos itens anteriores são mostrados agora exemplos de aplicação.

### 8.1 - Exemplo de verificação

Dada uma seção retangular com 50cm de altura, 25cm de base e armadura de  $3,88\text{cm}^2$  (fig. 8.1) disposta apenas próximas as faces inferior e superior e com  $d' = 5\text{cm}$ , pede-se a força normal que a peça resiste para uma relação  $\mu/\nu = 0,4$  e considerando ainda concreto com resistência característica  $f_{cd} = 18\text{ MPa}$  e aço CA-50A.

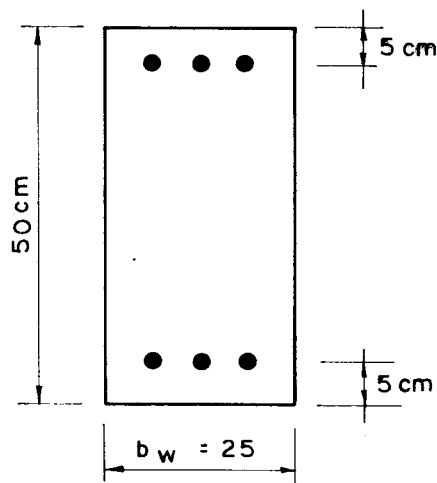


Fig. 8.1 - Seção transversal. Geometria e disposição da armadura.

Valores necessários a resolução do problema:

$$\delta = 5/50 = 0,1 \quad \omega = \frac{A_s f_{yd}}{A_c f_{cd}} = 0,5$$

Resolução:

Escolhendo-se o âbaco A-2 em função do aço e de  $\delta = 0,1$  marca-se, a partir da origem, uma reta  $\mu = 0,4\nu$  (fig. 8.2). Do ponto de intersecção dessa reta com a curva  $\omega = 0,5$  obtém-se  $\nu = 0,63$  e  $\mu = 0,24$ .

Utilizando-se a definição de  $\nu$ ,  $\mu$  (equação) obtém-se os seguintes valores de cálculo:

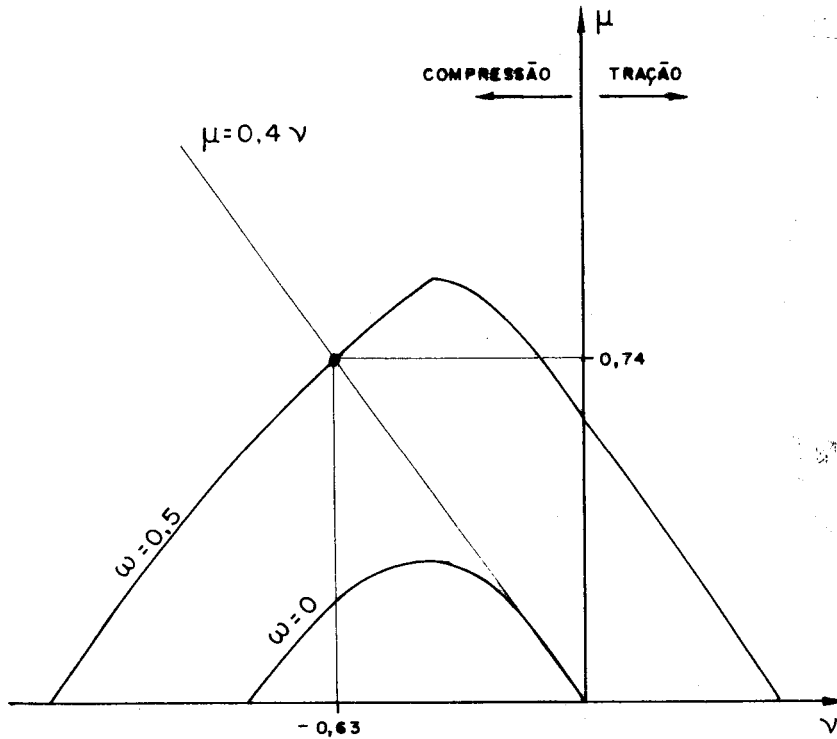


Fig. 8.2 - Intersecção da reta  $\mu = -0,4\nu$  e o diagrama  $\omega = 0,5$

$$N_d = \nu f_{cd} A_c = 0,63 \frac{1,8}{1,4} \times 50 \times 25 = 1012,5 \text{ kN}$$

$$M_d = \mu f_{cd} A_c h = 0,24 \frac{1,8}{1,4} \times 50 \times 25 \times 50 = 192,86 \text{ kNm}$$

Considerando-se  $\gamma_f = 1,4$  os esforços característicos correspondentes são:

$$N_k = 1,012/1,4 = 723,2 \text{ kN}$$

$$M_k = 192,86/1,4 = 137,75 \text{ kNm}$$

## 8.2 - Exemplo de dimensionamento

A partir da geometria da seção de concreto e da posição da armadura indicada na figura 8.1 determinar a armadura da peça para resistir a uma sollicitação  $N_k = 800 \text{ kN}$  e  $M_k = 100 \text{ kNm}$  para o concreto C-18 e aço CA-50A.

Valores adimensionais necessários:

$$\delta = 5/50 = 0,1$$

$$\nu = \frac{1,4 \times 800}{50 + 25 + 1,8/1,4} = 0,70$$

$$\mu = \frac{1,4 \times 10000}{50 \times 25 \times 50 \times 1,8/1,4} = 0,17$$

Entrando-se com esses valores no ábaco obtém-se

$$\omega = 0,46$$

A partir desse valor a armadura da peça pode ser determinada

$$A_s = \frac{\omega f_{cd} A_c}{f_{yd}}$$

$$A_s = 0,46 \frac{18 \times 1,15 \times 50 \times 25}{500 \times 1,4} = 17,00 \text{ cm}^2$$

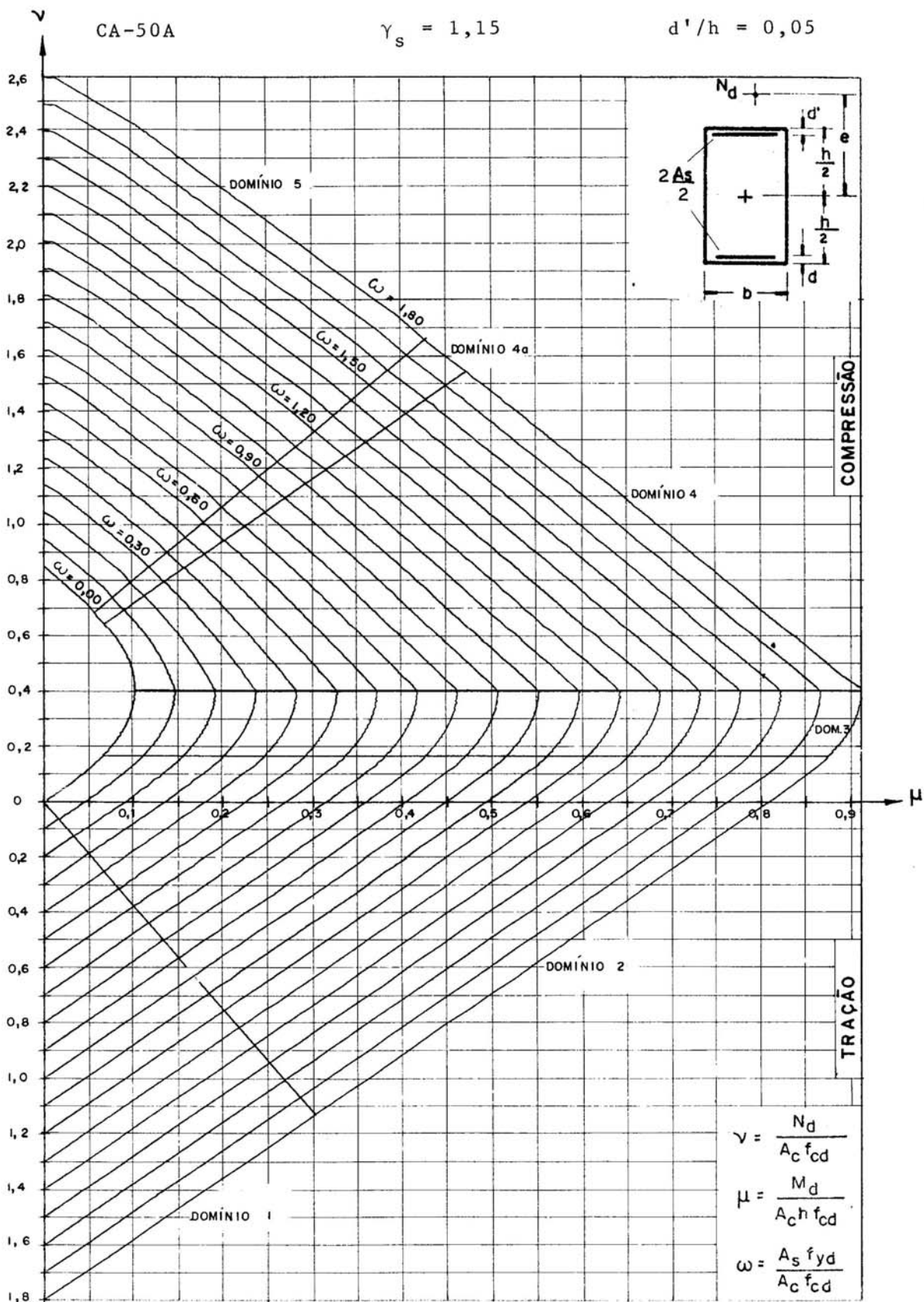
A armadura necessária para a peça é  $17,00 \text{ cm}^2$ , isto é,  $8,5 \text{ cm}^2$  (3 barras de 20mm) para cada lado.



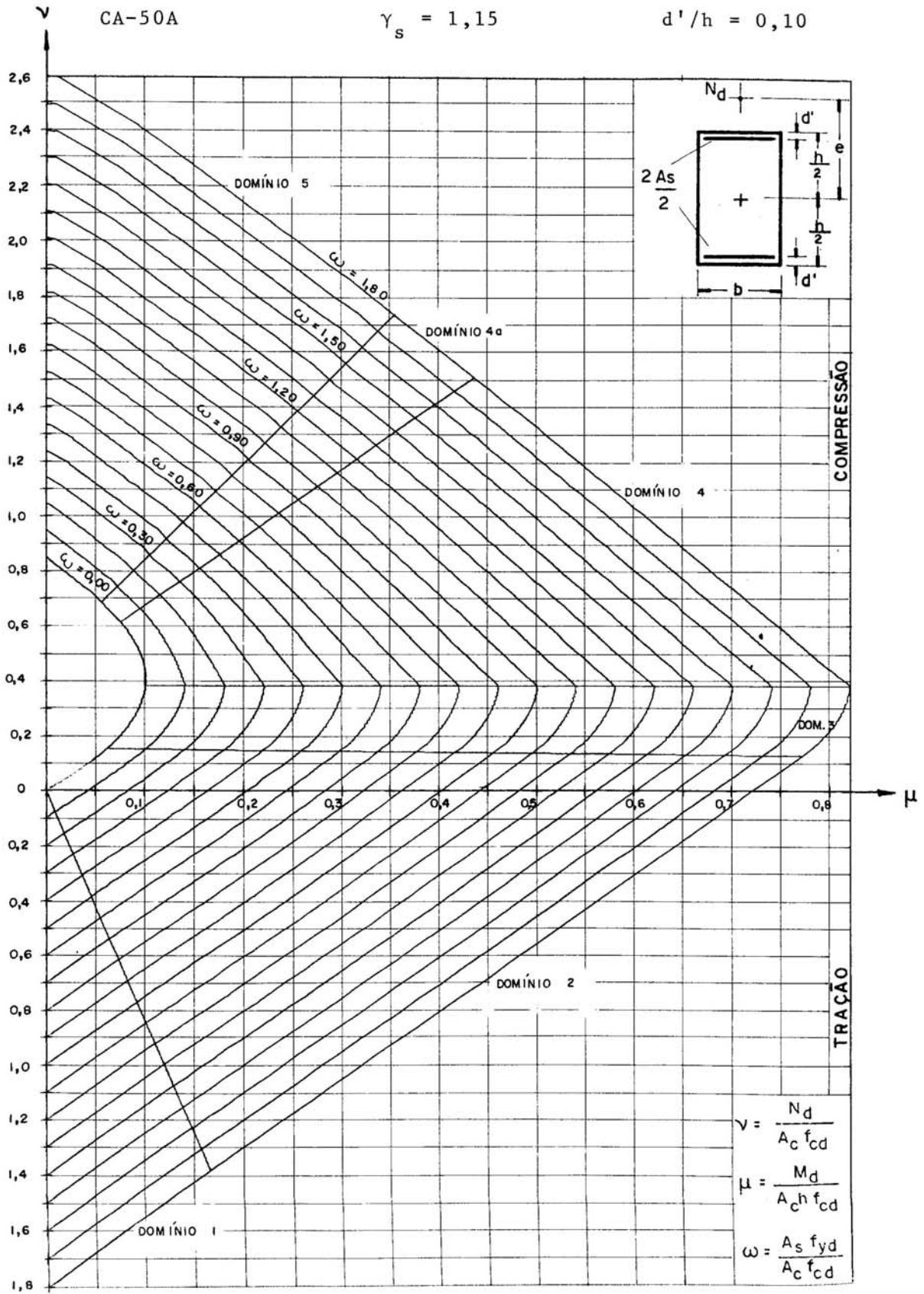
ÁBACOS PARA O DIMENSIONAMENTO DE  
PEÇAS RETANGULARES DE CONCRETO ARMADO

CA-50A

ÁBACO A-1



ÁBACO A-2

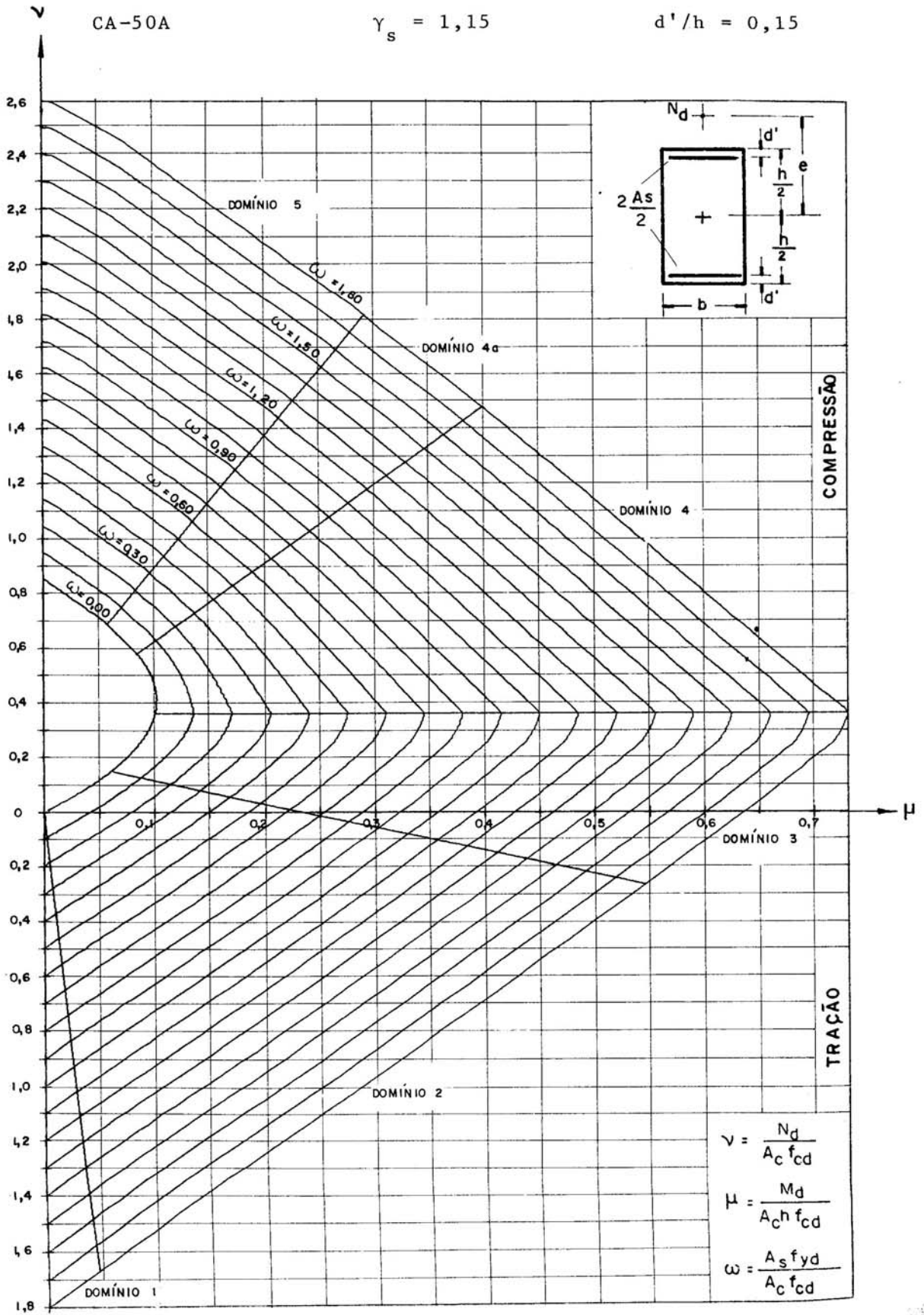


ÁBACO A-3

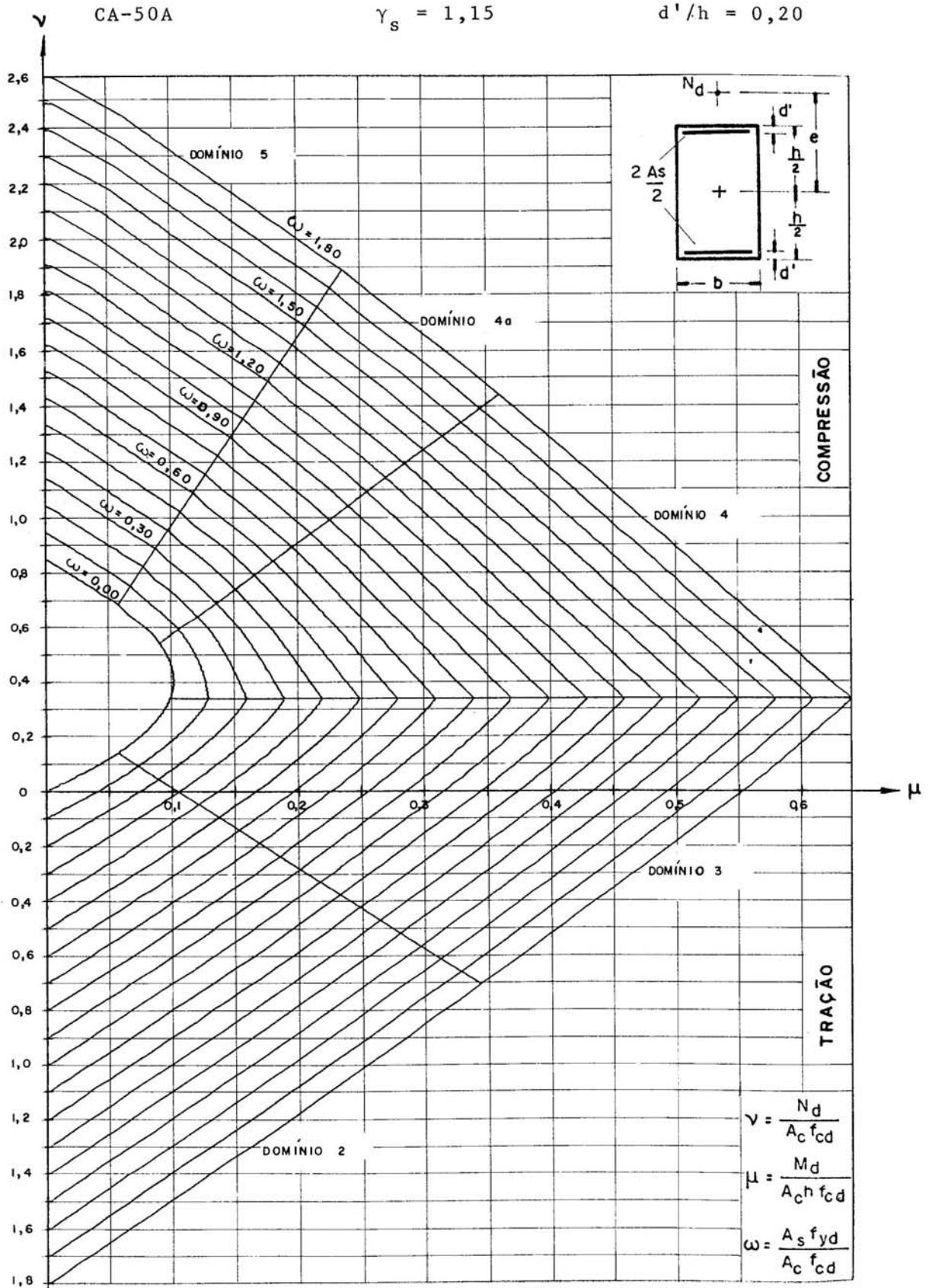
CA-50A

$\gamma_s = 1,15$

$d'/h = 0,15$



ÁBACO A-4

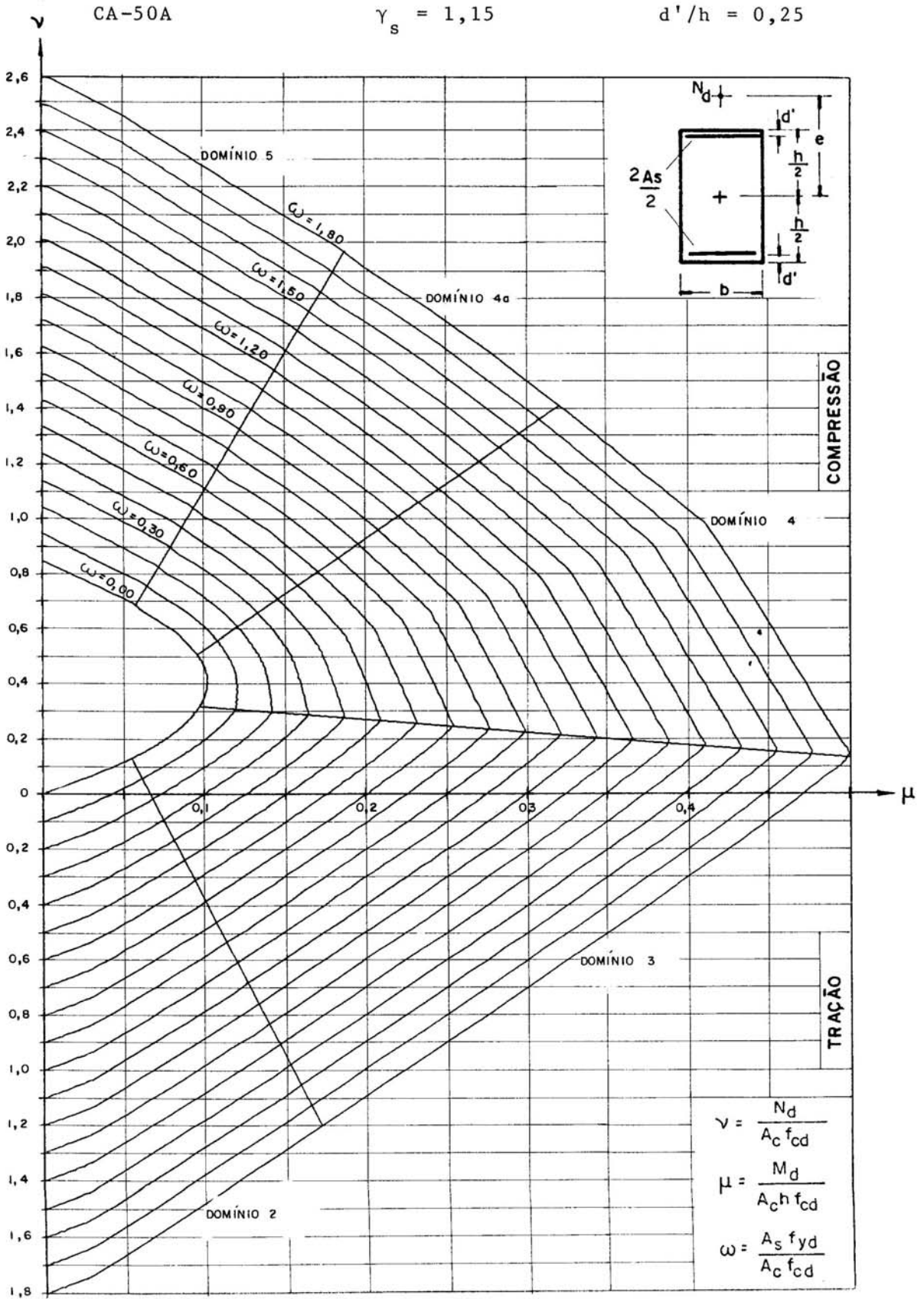


ÁBACO A-5

CA-50A

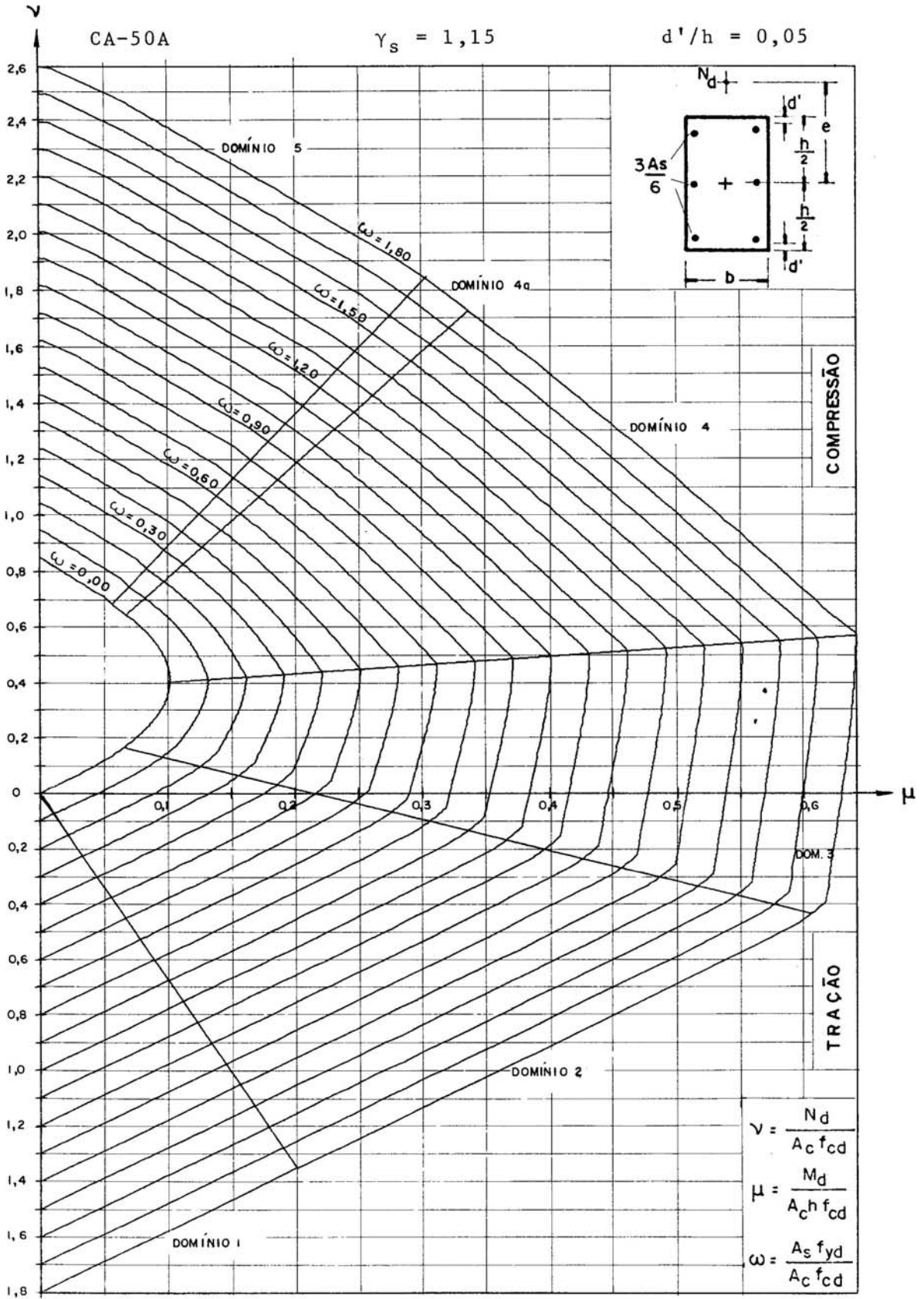
$\gamma_s = 1,15$

$d'/h = 0,25$





ÁBACO A-6

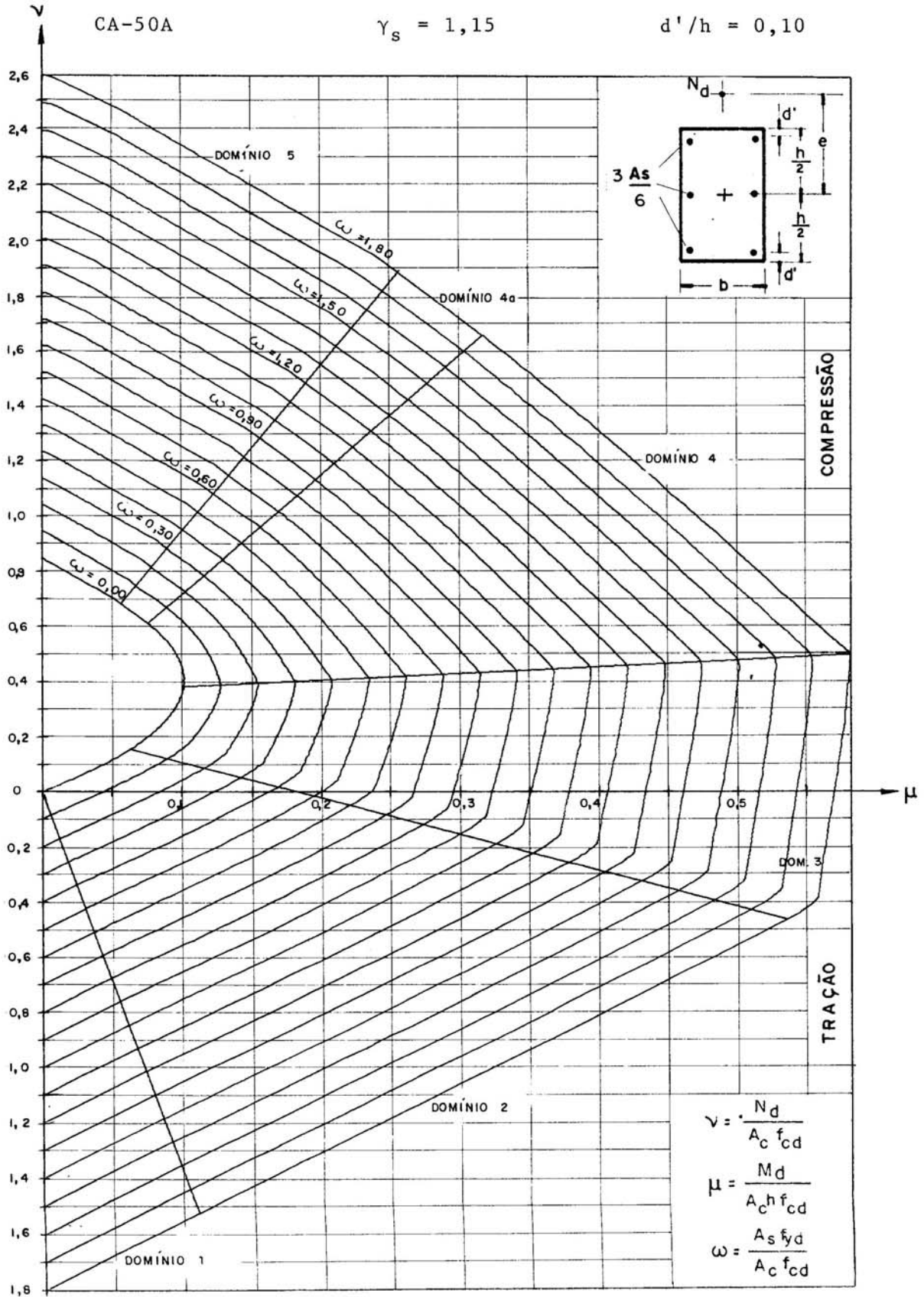


ÁBACO A-7

CA-50A

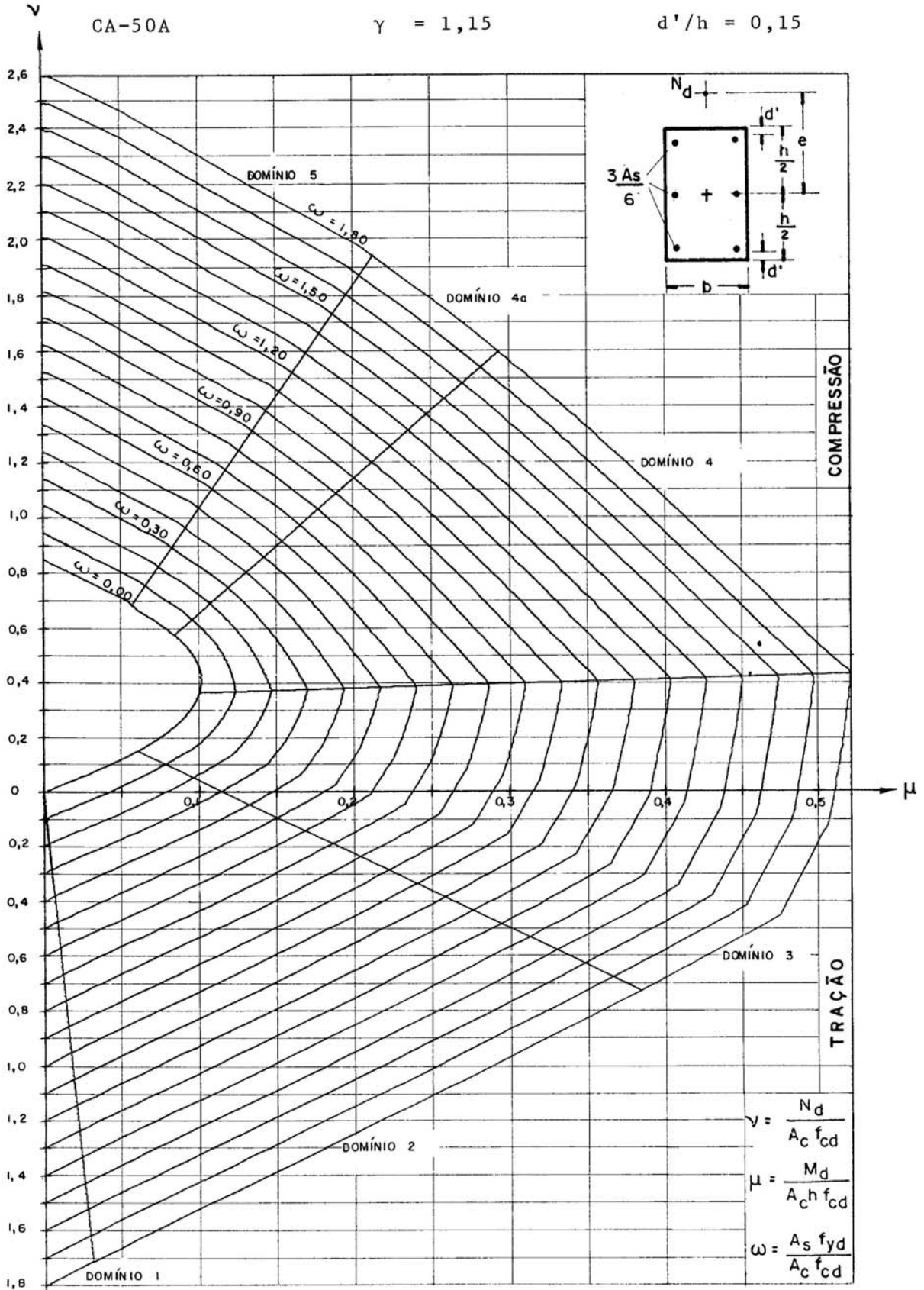
$\gamma_s = 1,15$

$d'/h = 0,10$

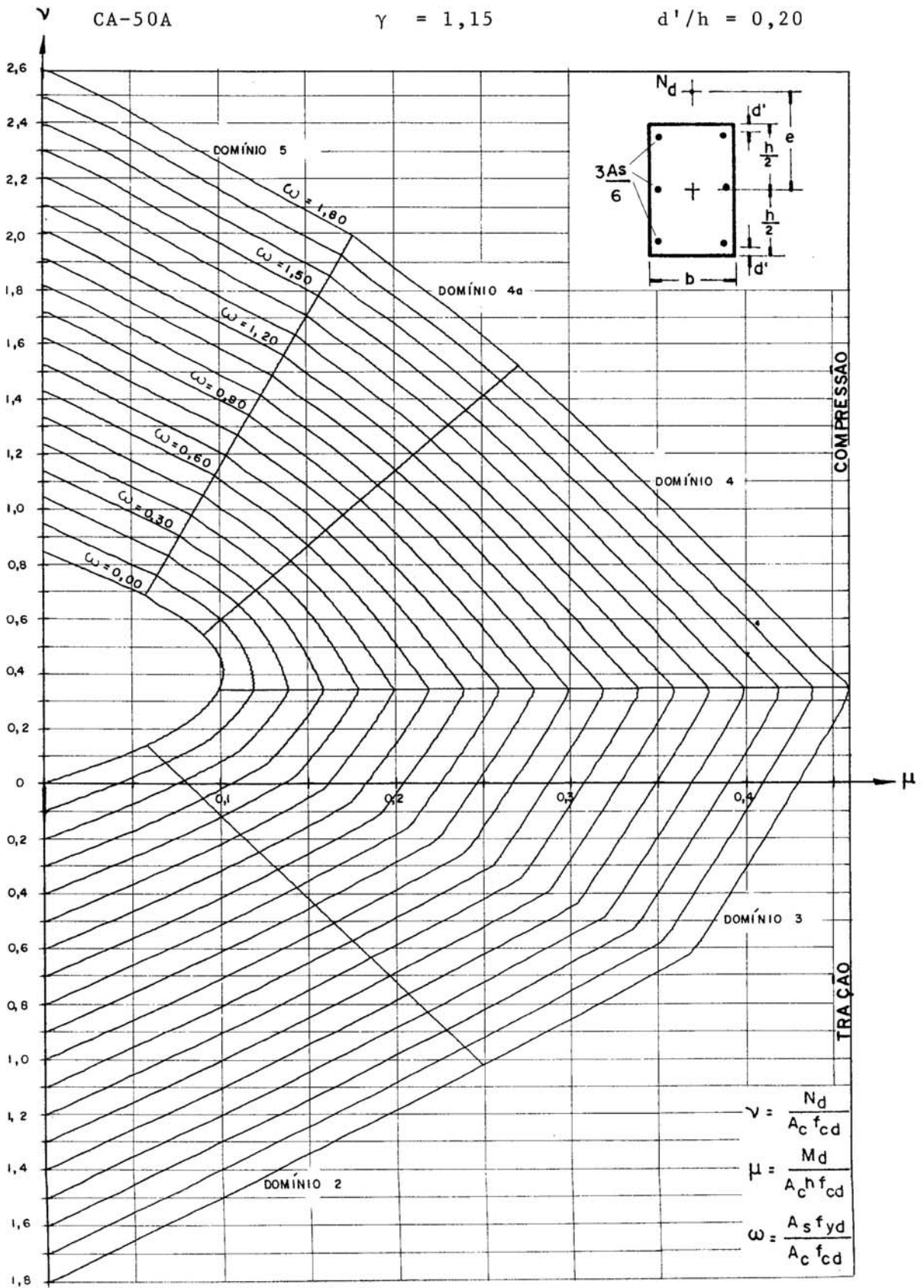




ÁBACO A-8



ÁBACO A-9

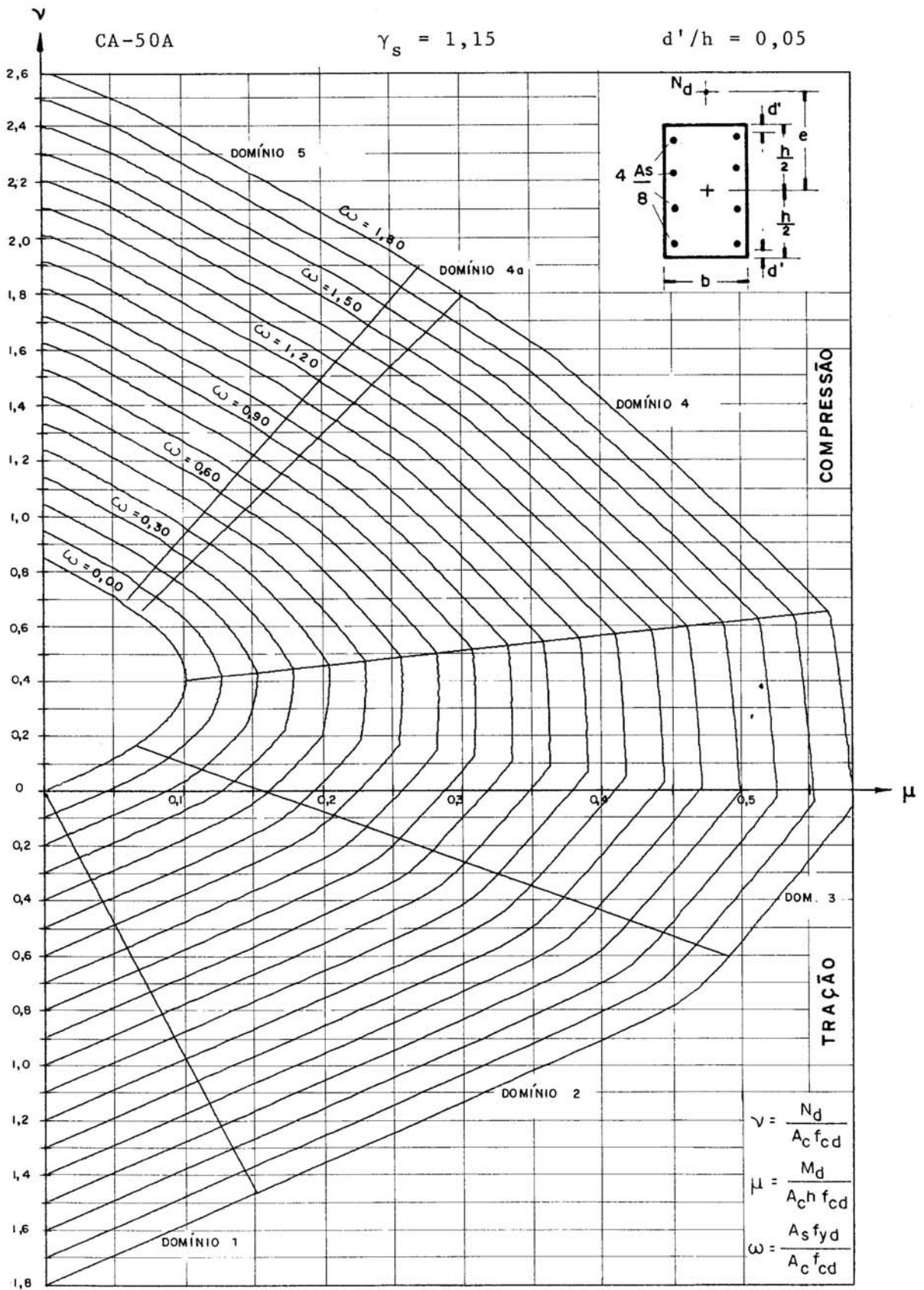


ÁBACO A-10

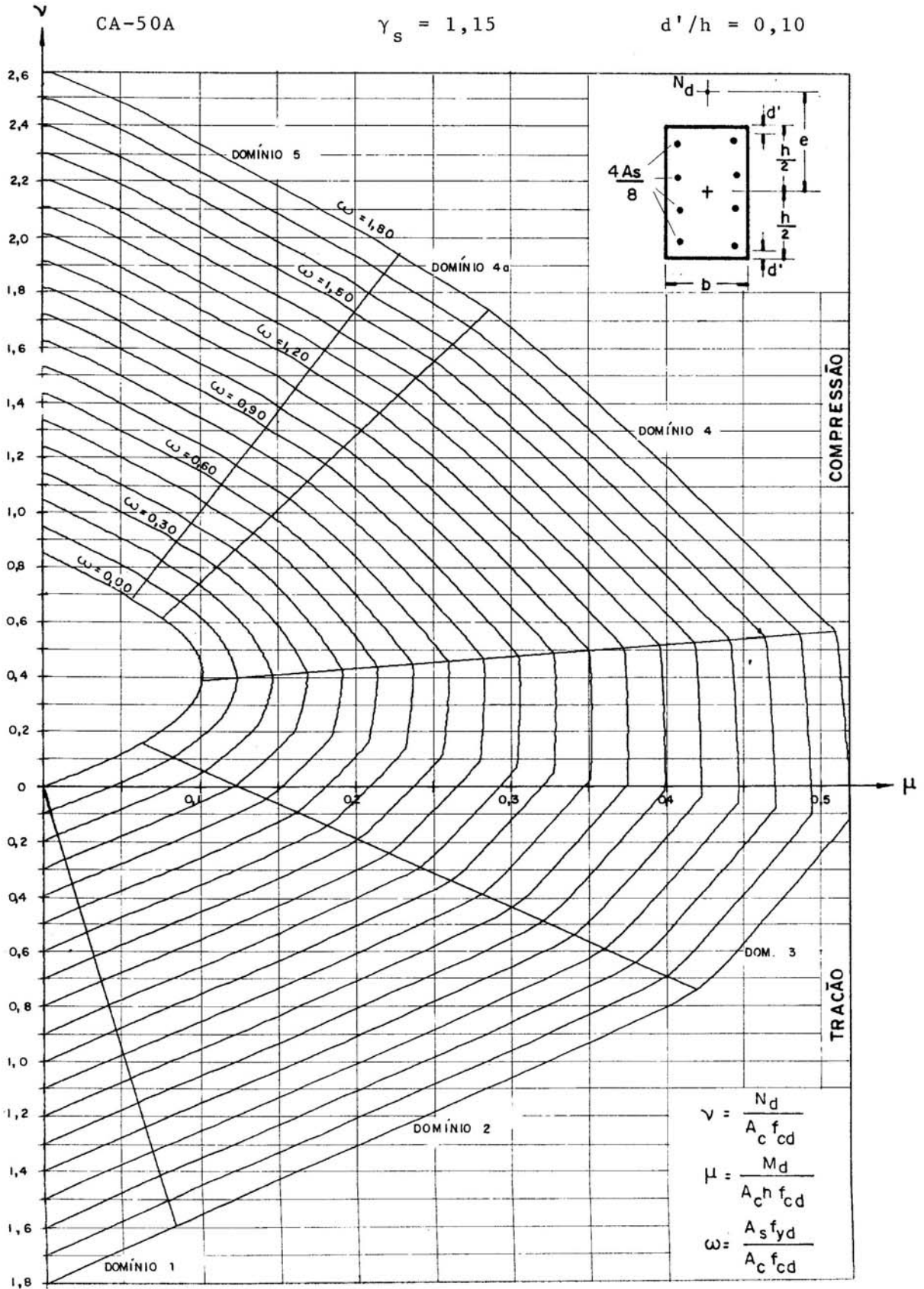
CA-50A

$\gamma_s = 1,15$

$d'/h = 0,05$



ÁBACO A-11

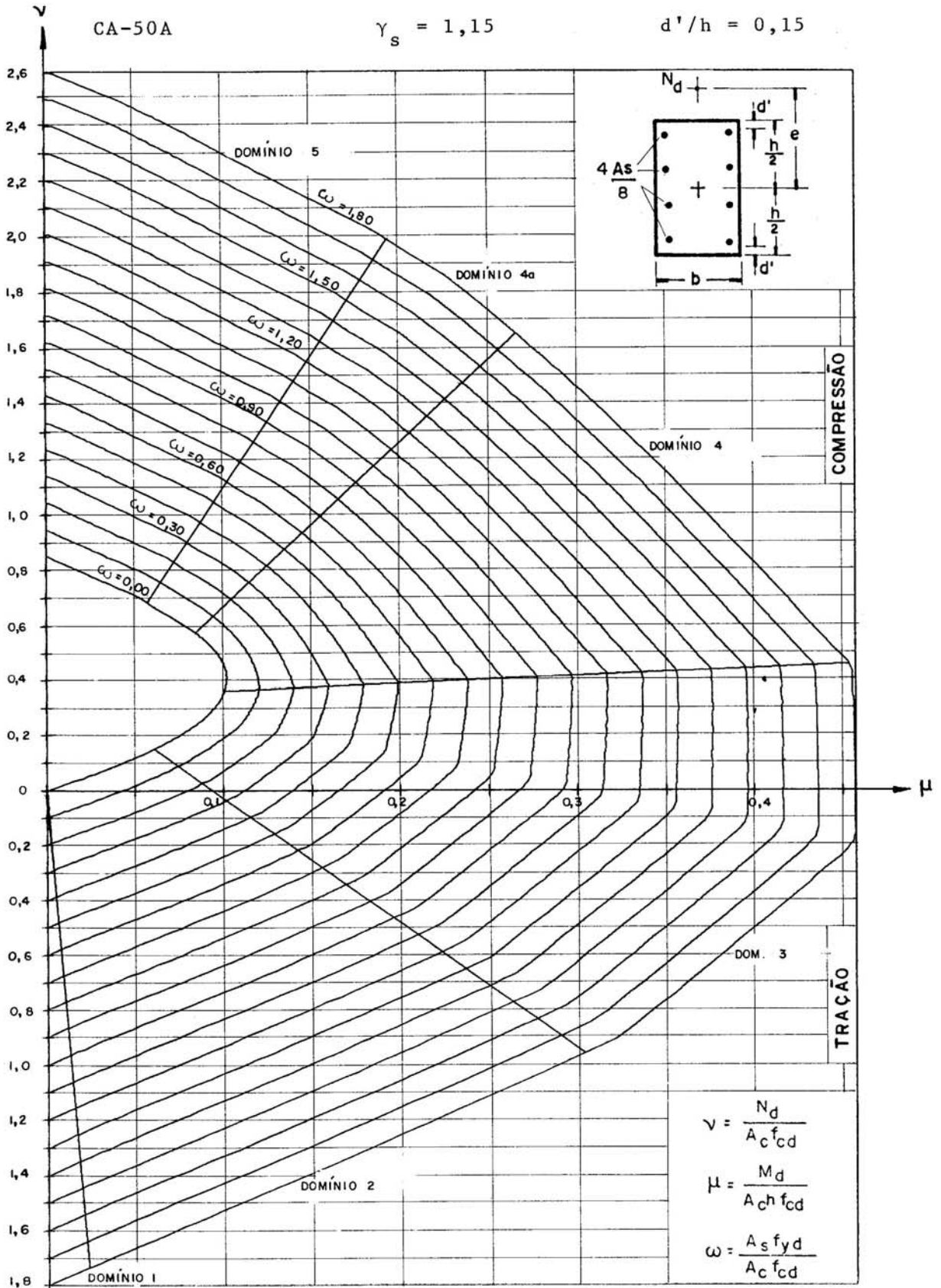


ÁBACO A-12

CA-50A

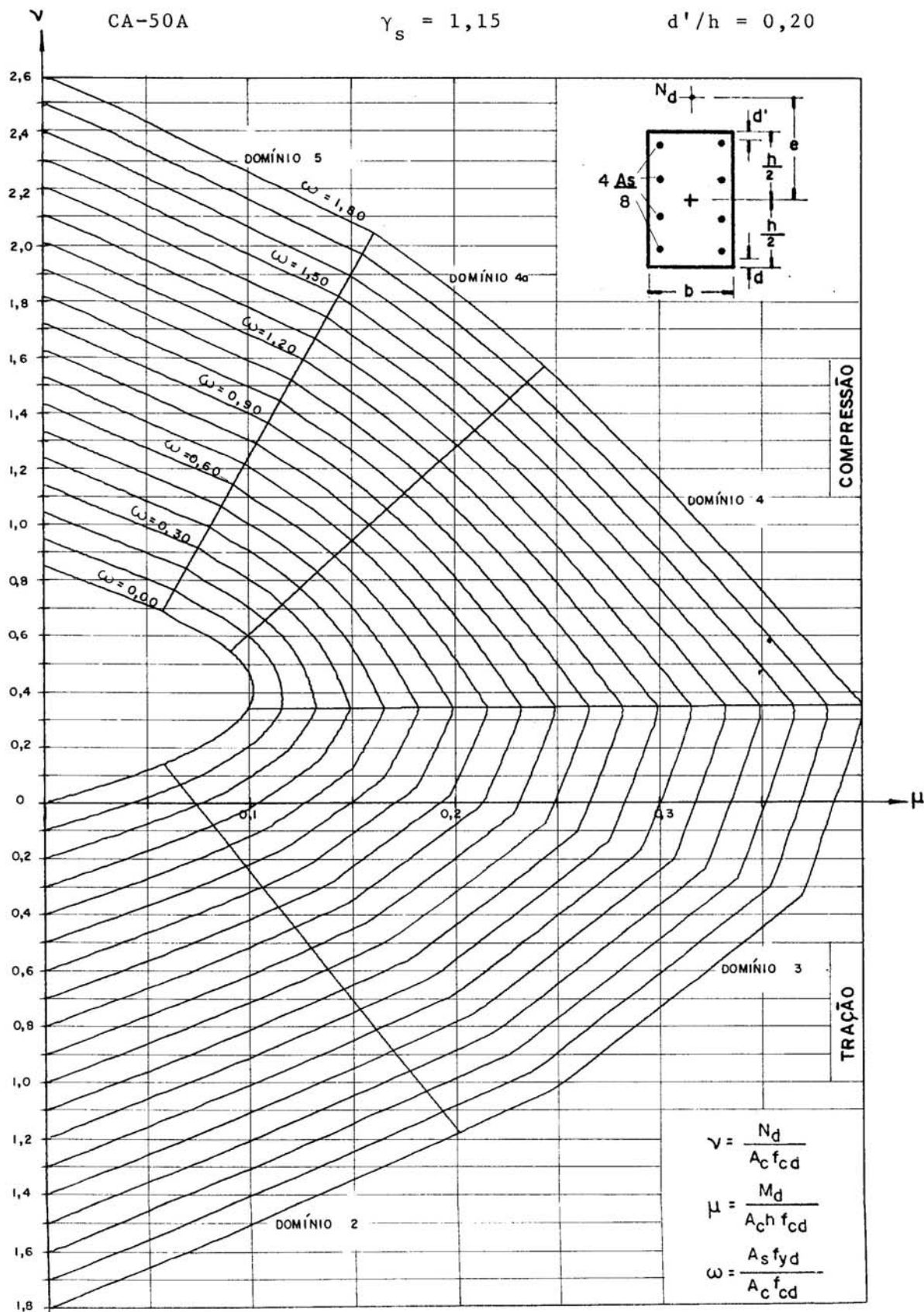
$\gamma_s = 1,15$

$d'/h = 0,15$

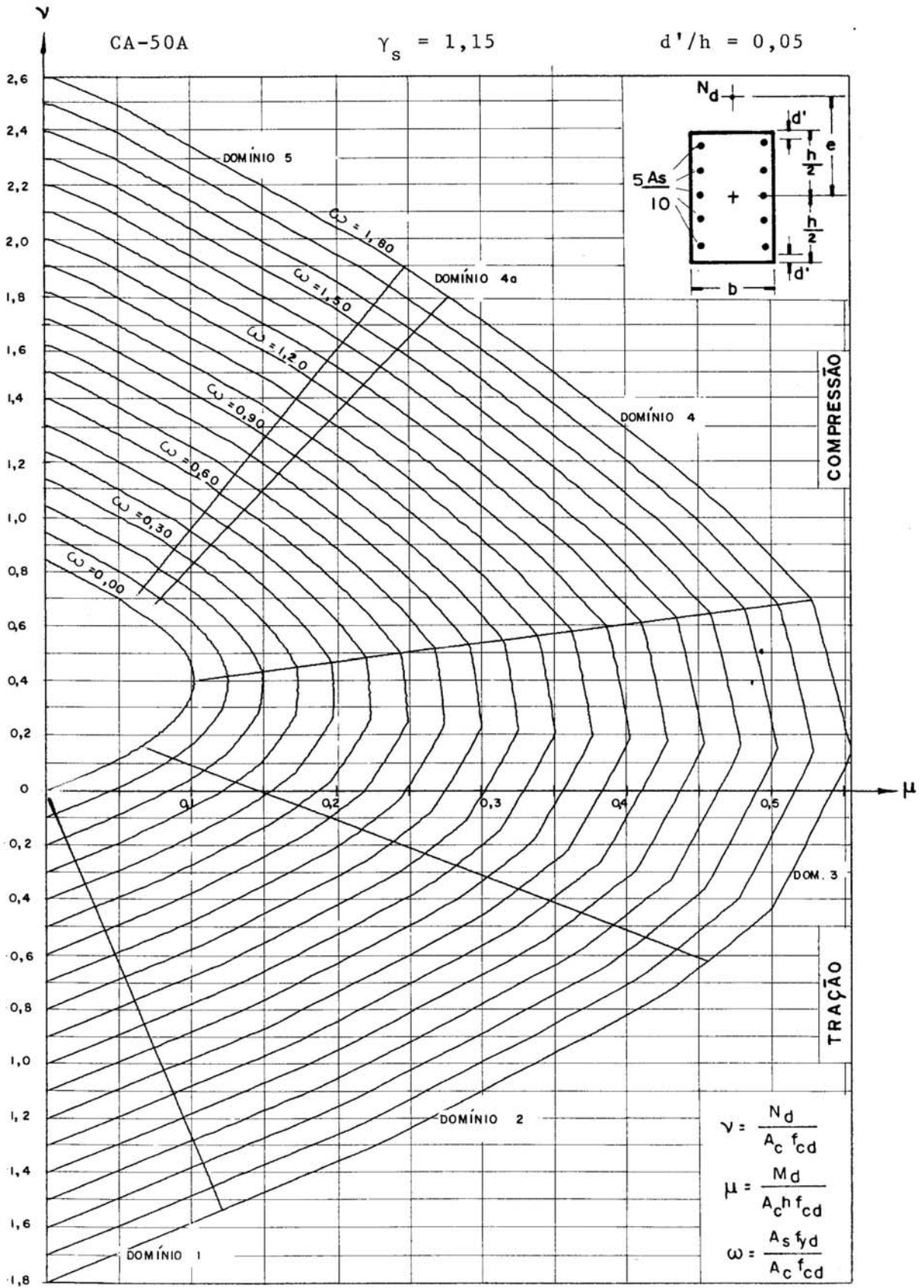




ÁBACO A-13



ÁBACO A-14

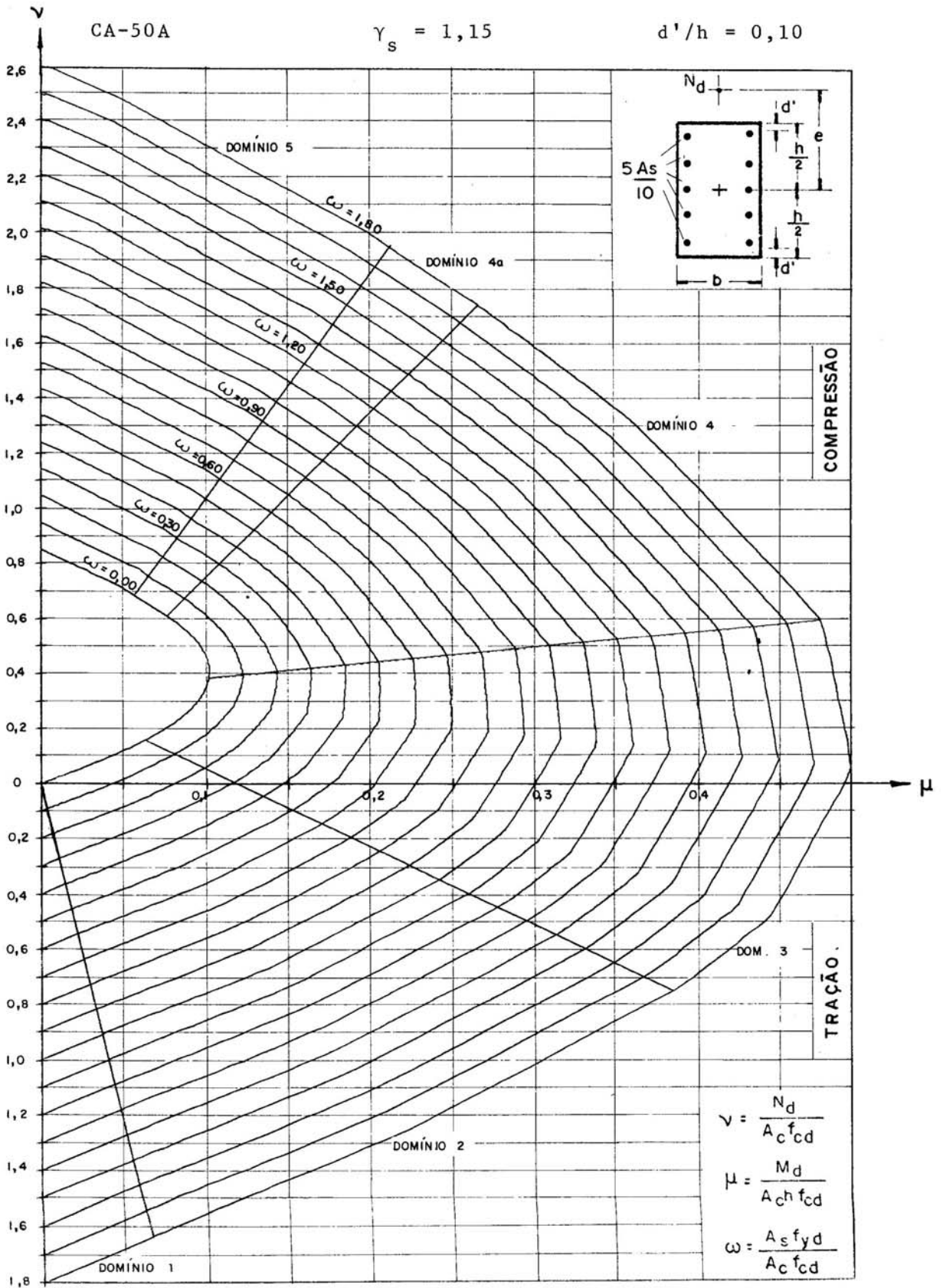


ÁBACO A-15

CA-50A

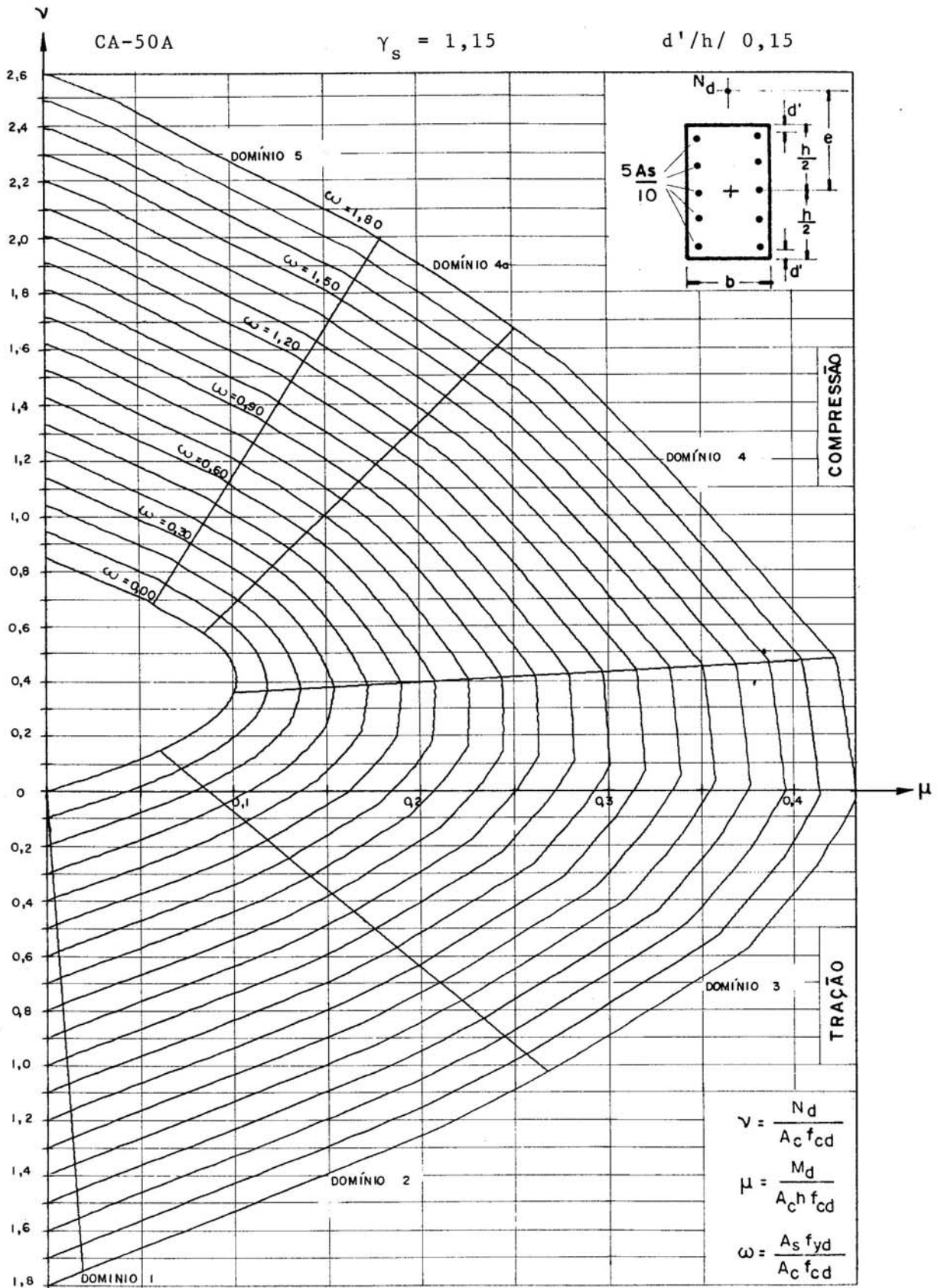
$\gamma_s = 1,15$

$d'/h = 0,10$





ÁBACO A-16

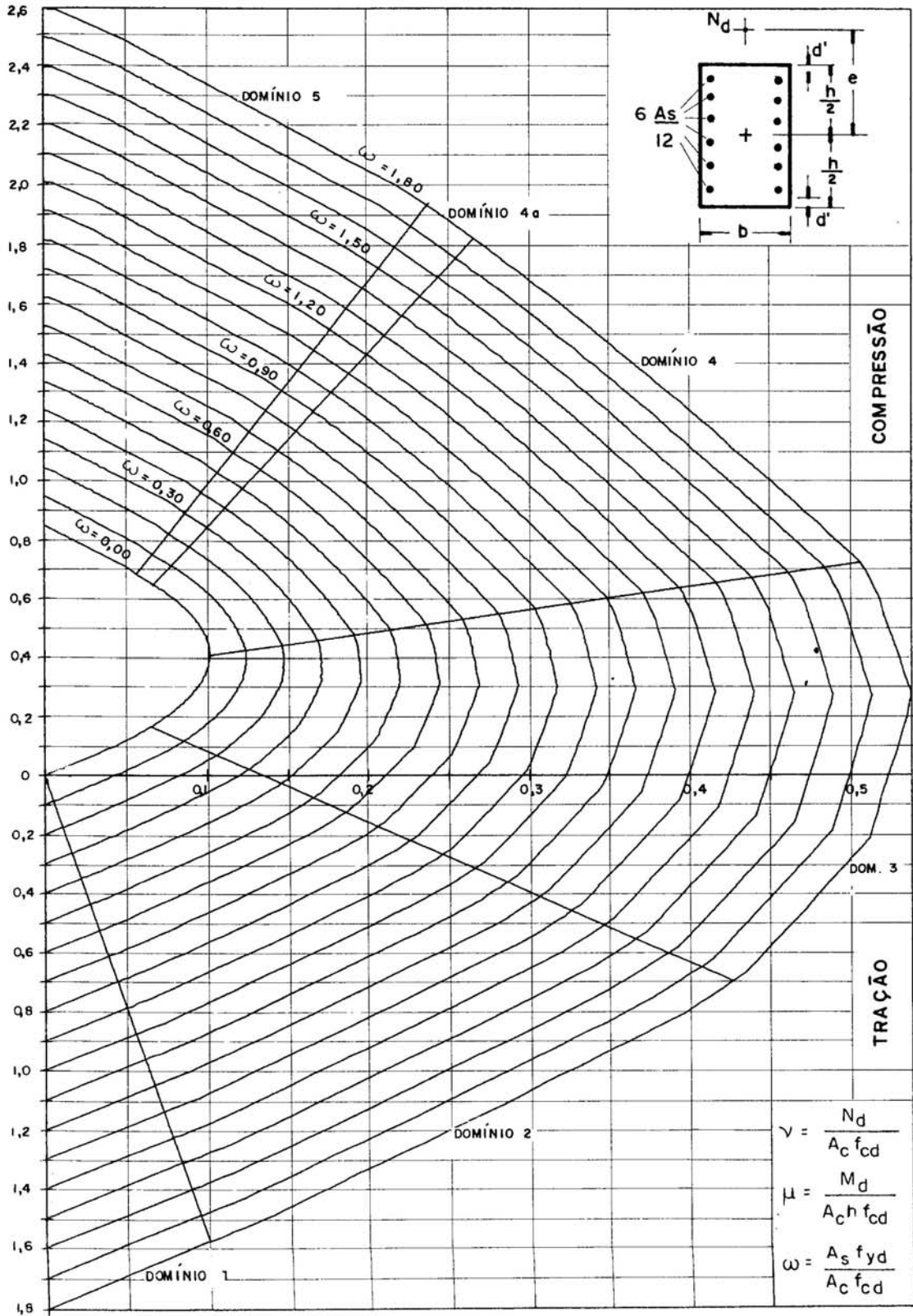


ÁBACO A-17

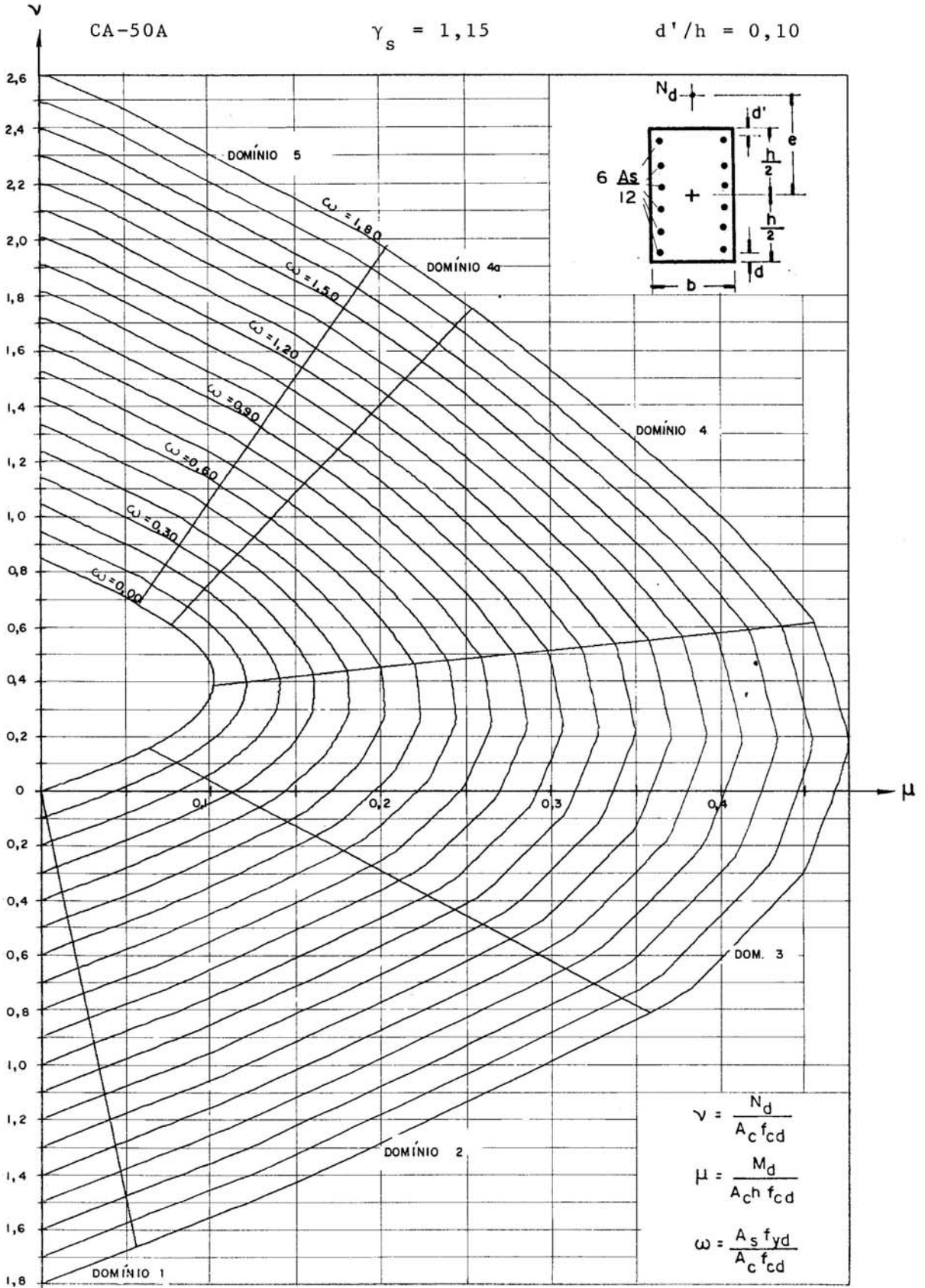
CA-50A

$\gamma_s = 1,15$

$d'/h = 0,05$



ÁBACO A-18

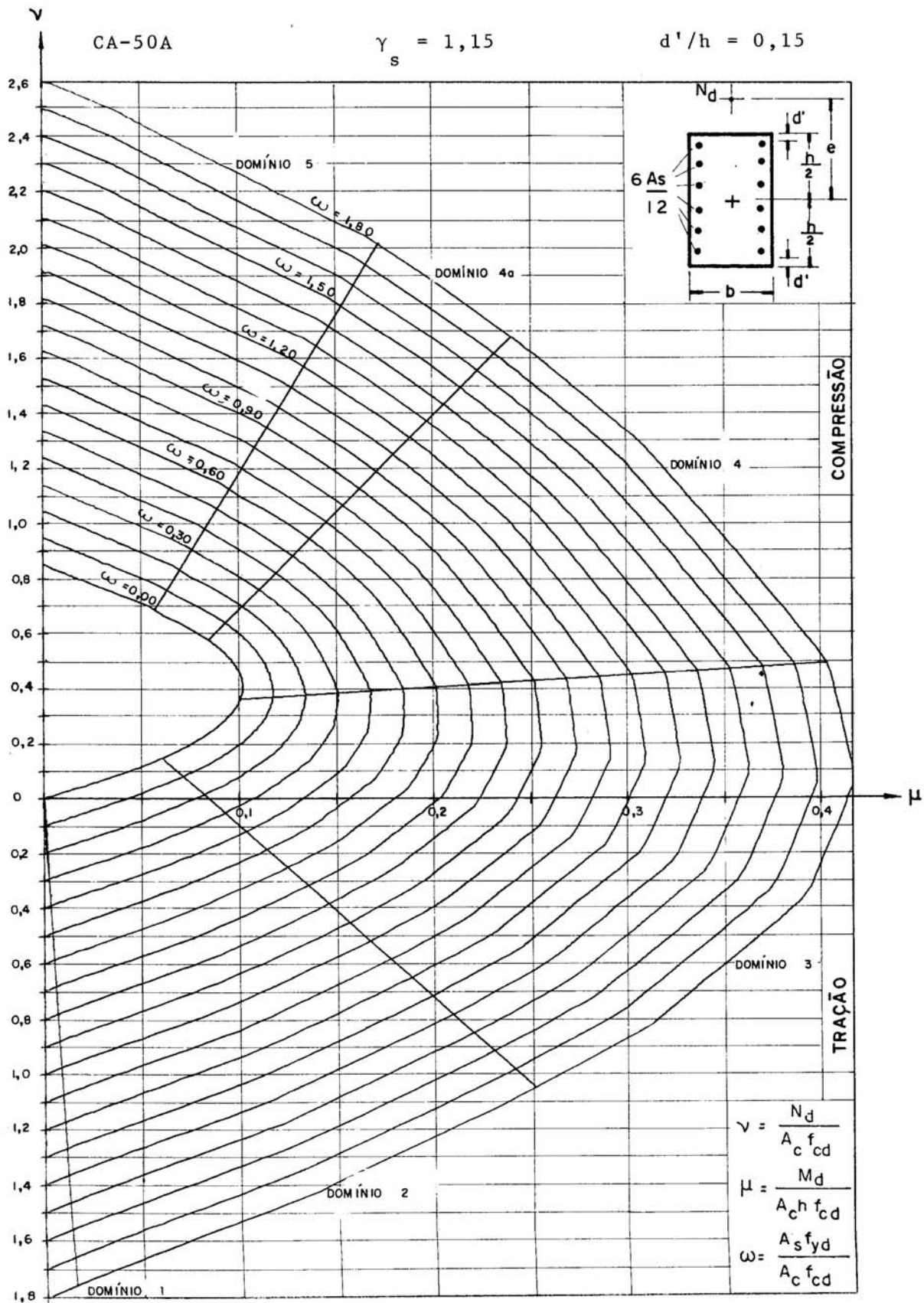


ÁBACO A-19

CA-50A

$\gamma_s = 1,15$

$d'/h = 0,15$



$$v = \frac{N_d}{A_c f_{cd}}$$

$$\mu = \frac{M_d}{A_c h f_{cd}}$$

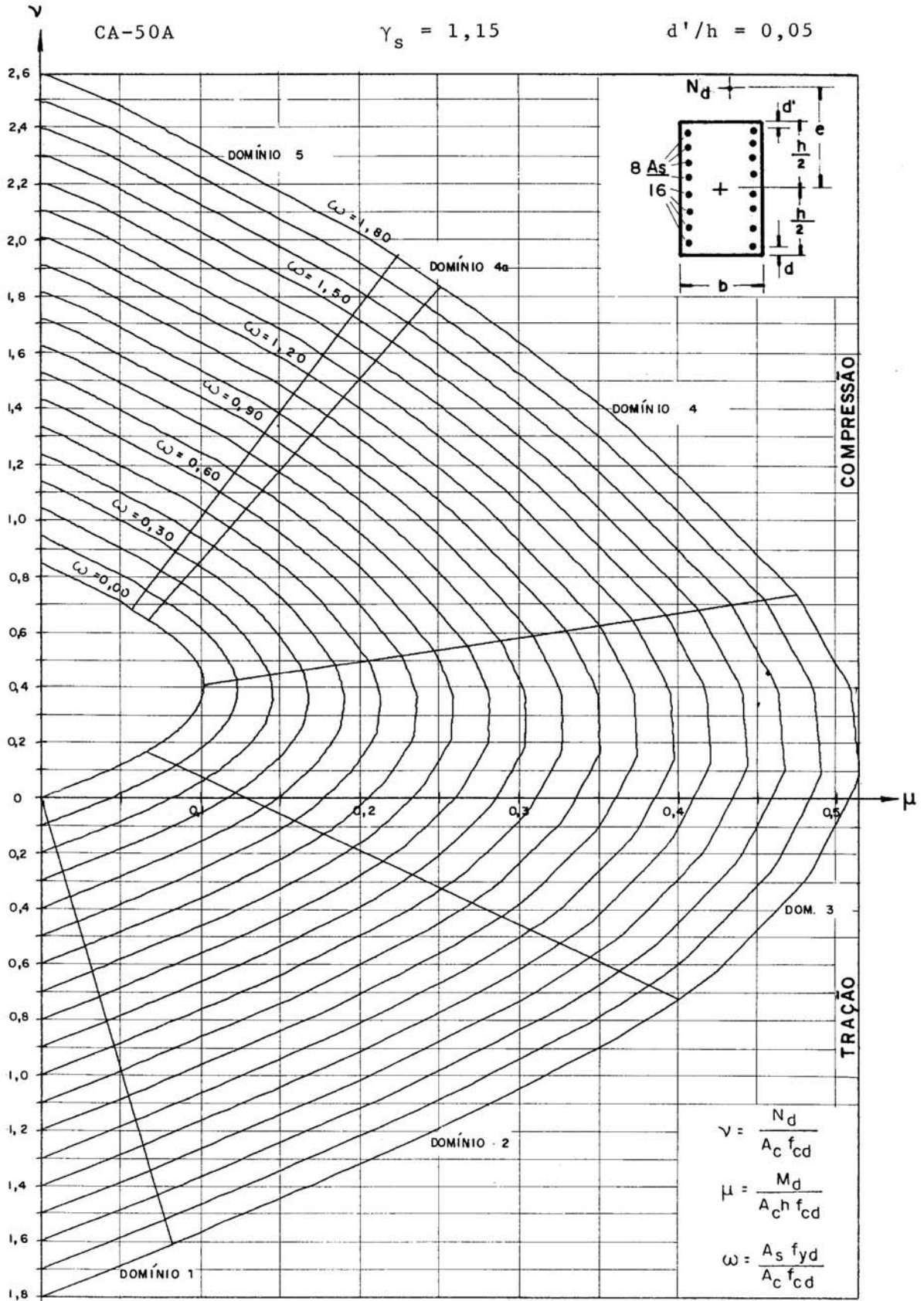
$$\omega = \frac{A_s f_{yd}}{A_c f_{cd}}$$

ÁBACO A-20

CA-50A

$\gamma_s = 1,15$

$d'/h = 0,05$



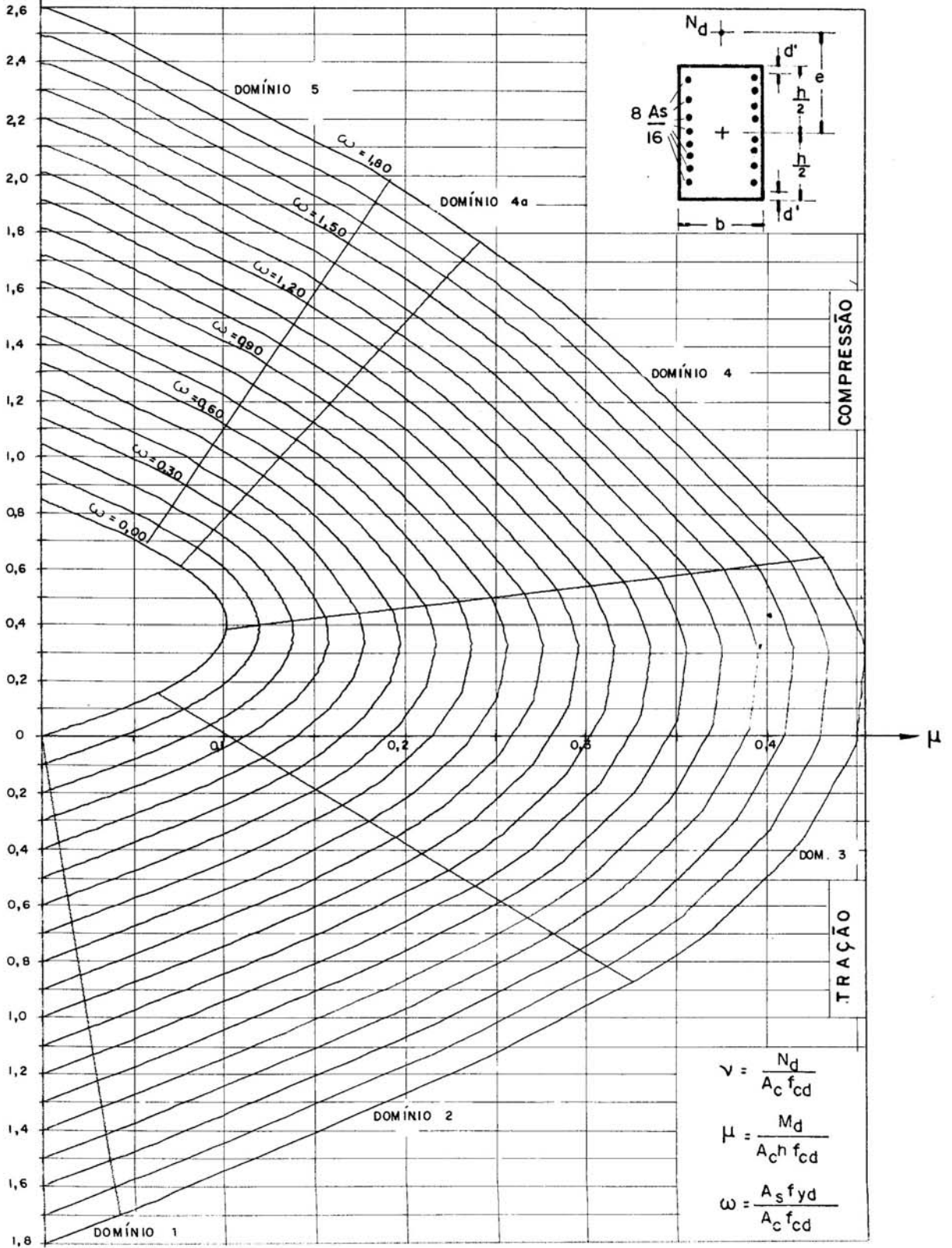


ÁBACO A-21

CA-50A

$\gamma_s = 1,15$

$d'/h = 0,10$

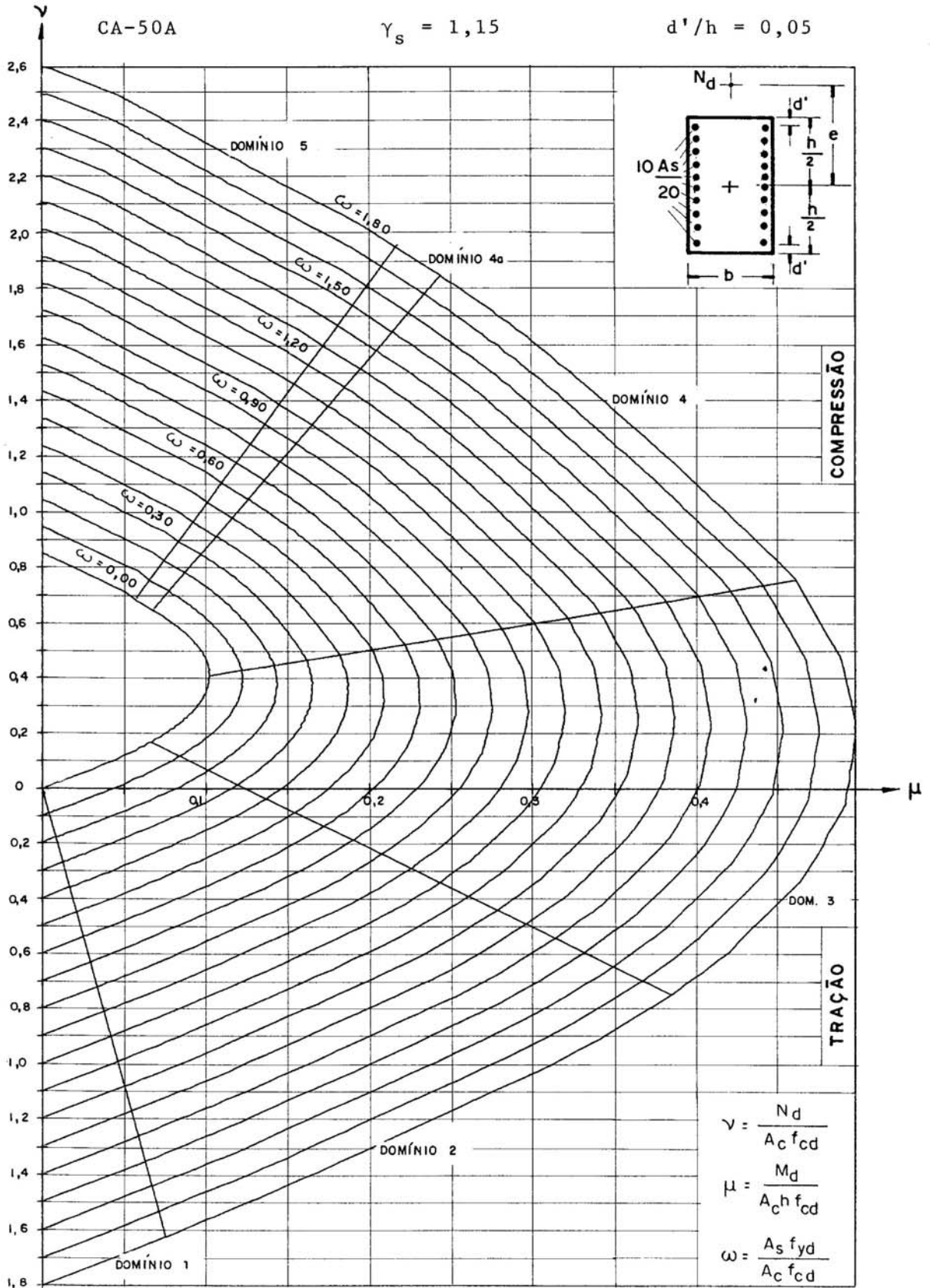


ÁBACO A-22

CA-50A

$\gamma_s = 1,15$

$d'/h = 0,05$

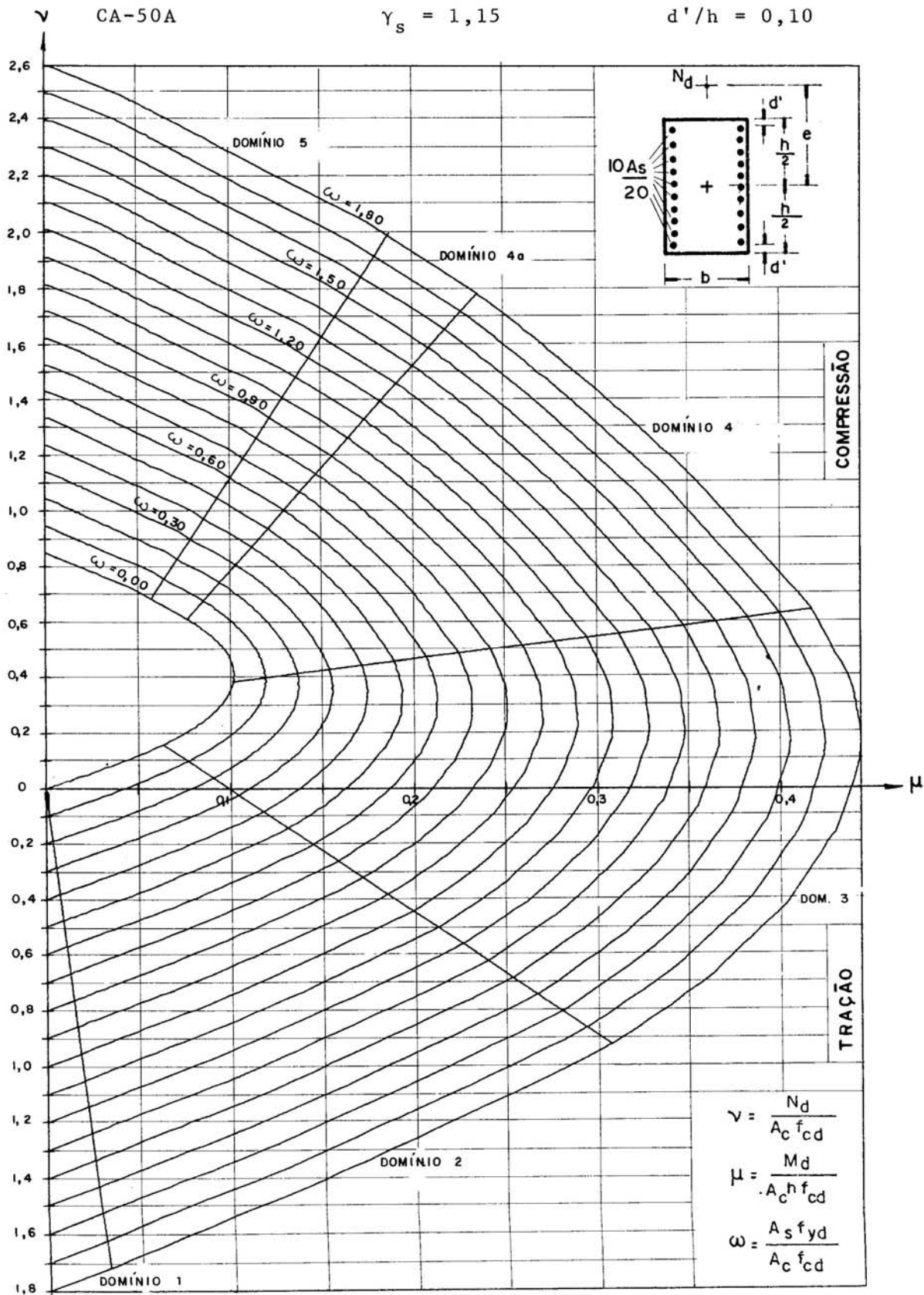


ÁBACO A-23

CA-50A

$\gamma_s = 1,15$

$d'/h = 0,10$



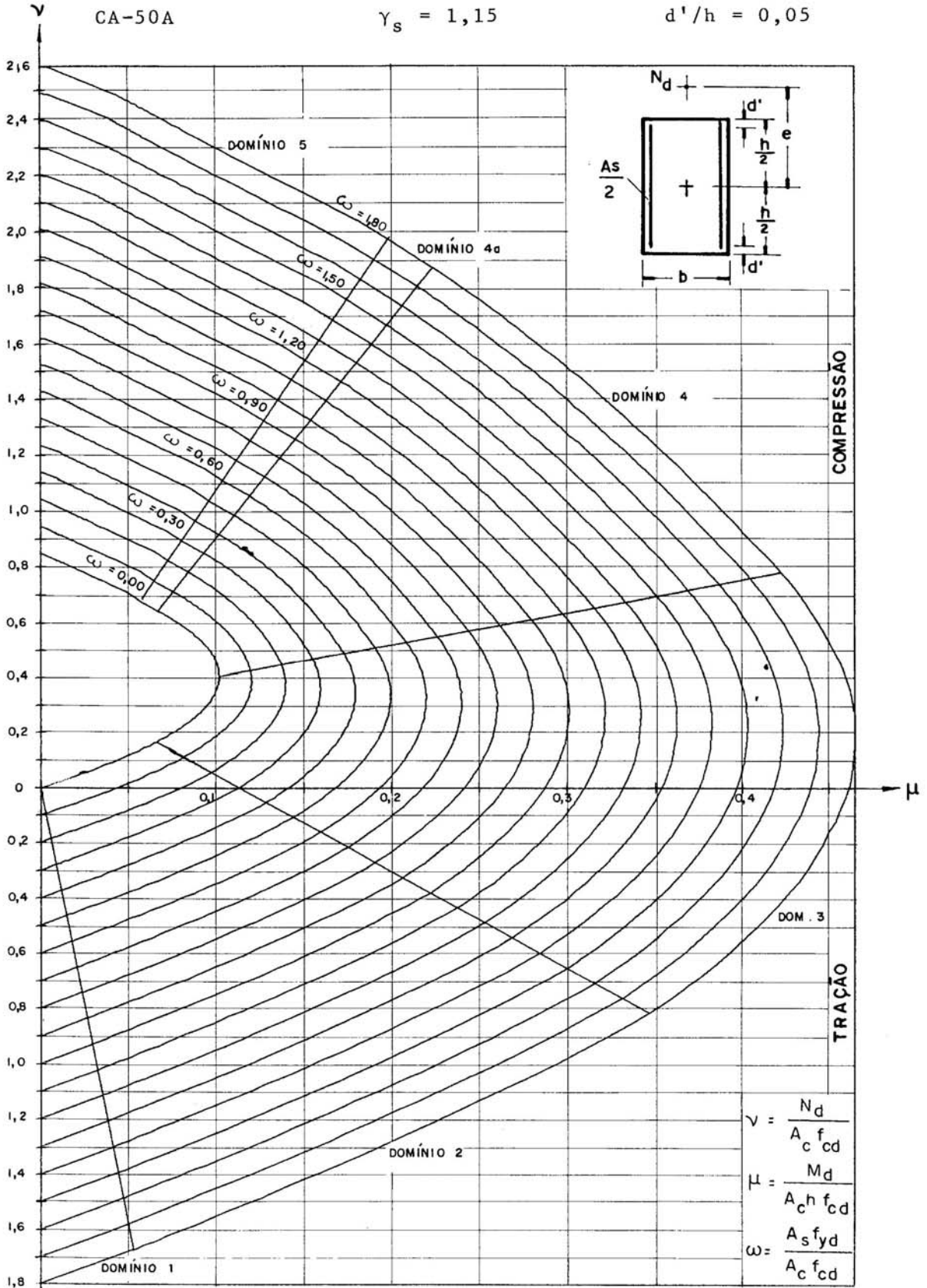


ÁBACO A-24

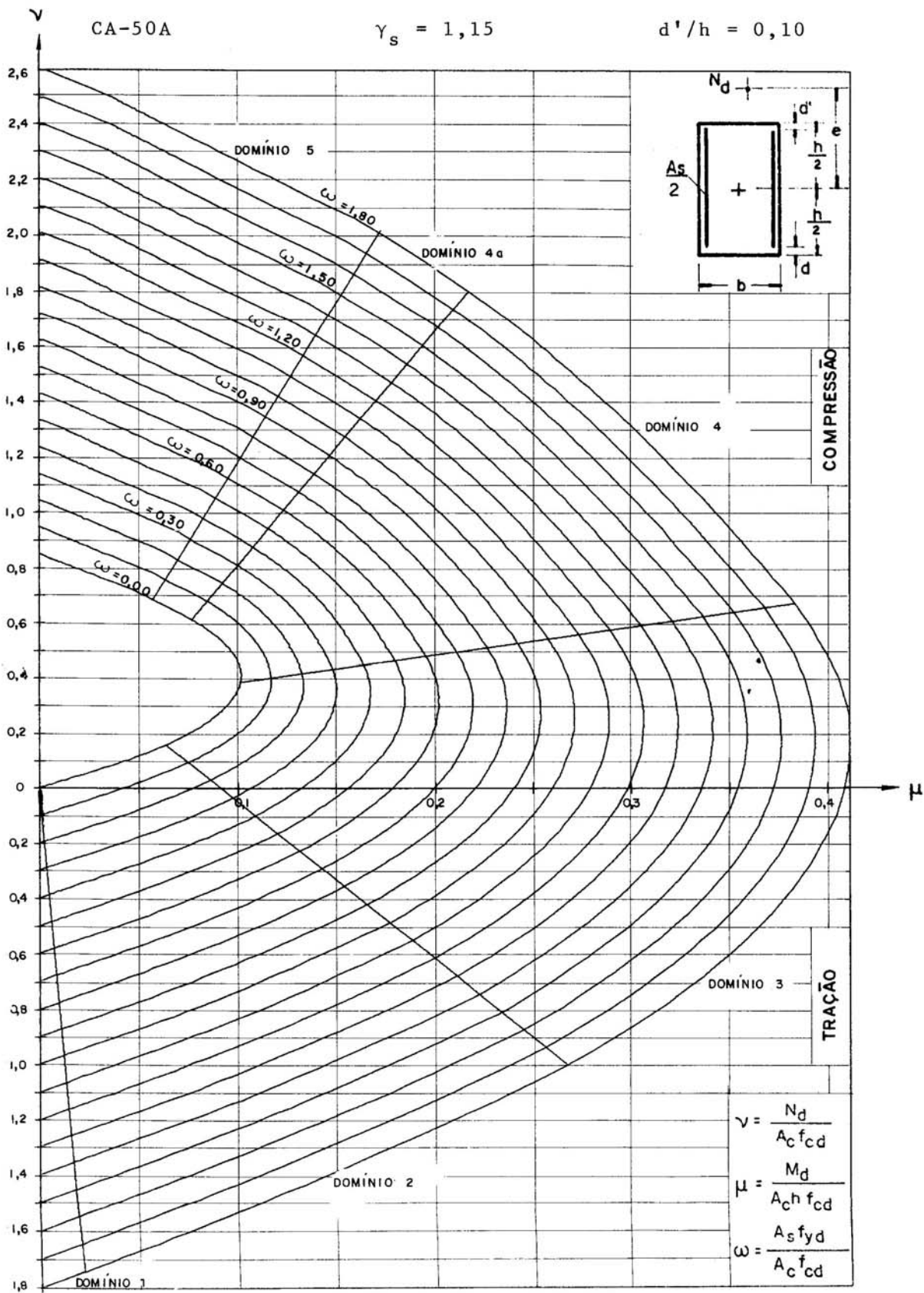
CA-50A

$\gamma_s = 1,15$

$d'/h = 0,05$



ÁBACO A-25

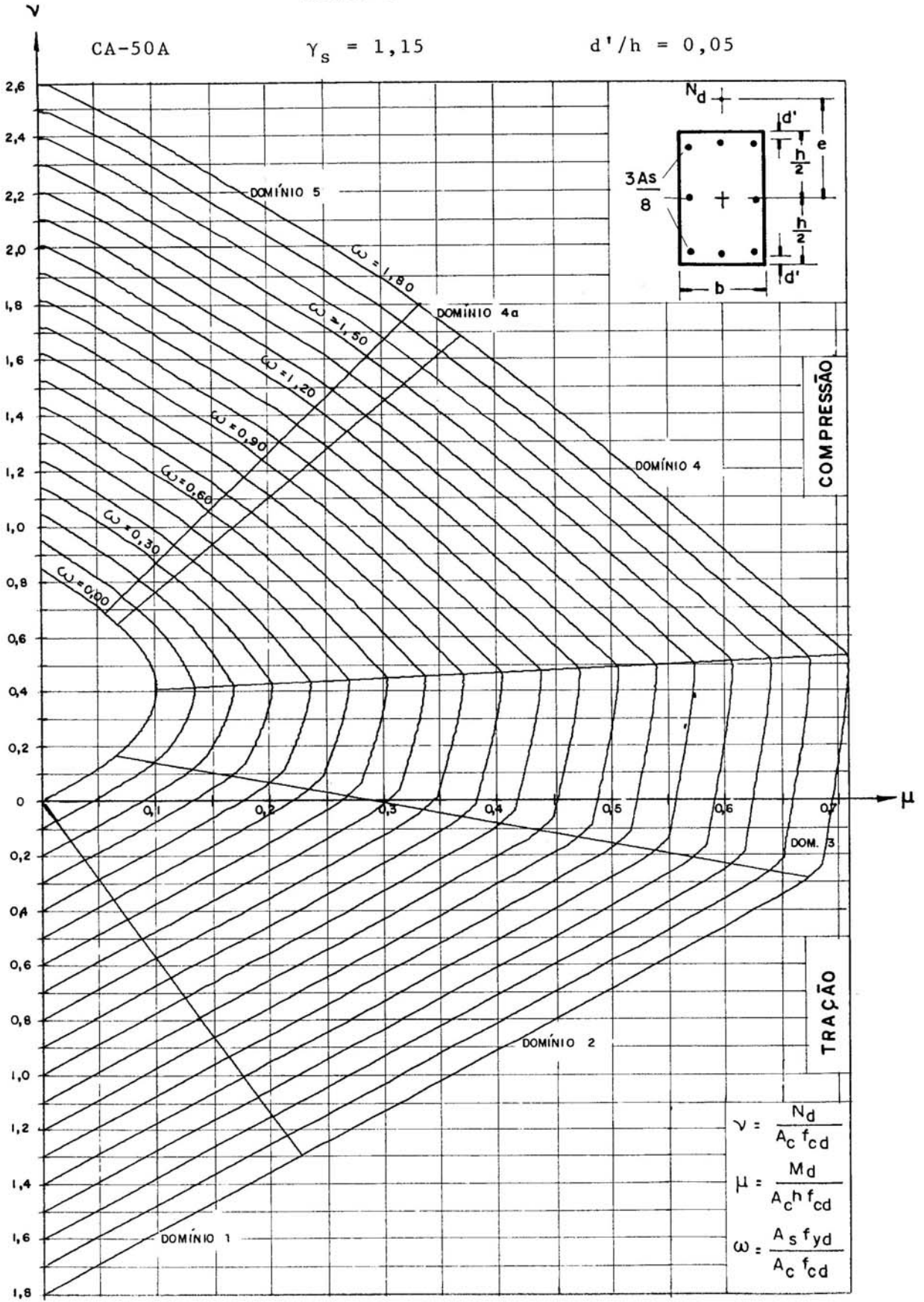


ÁBACO A-26

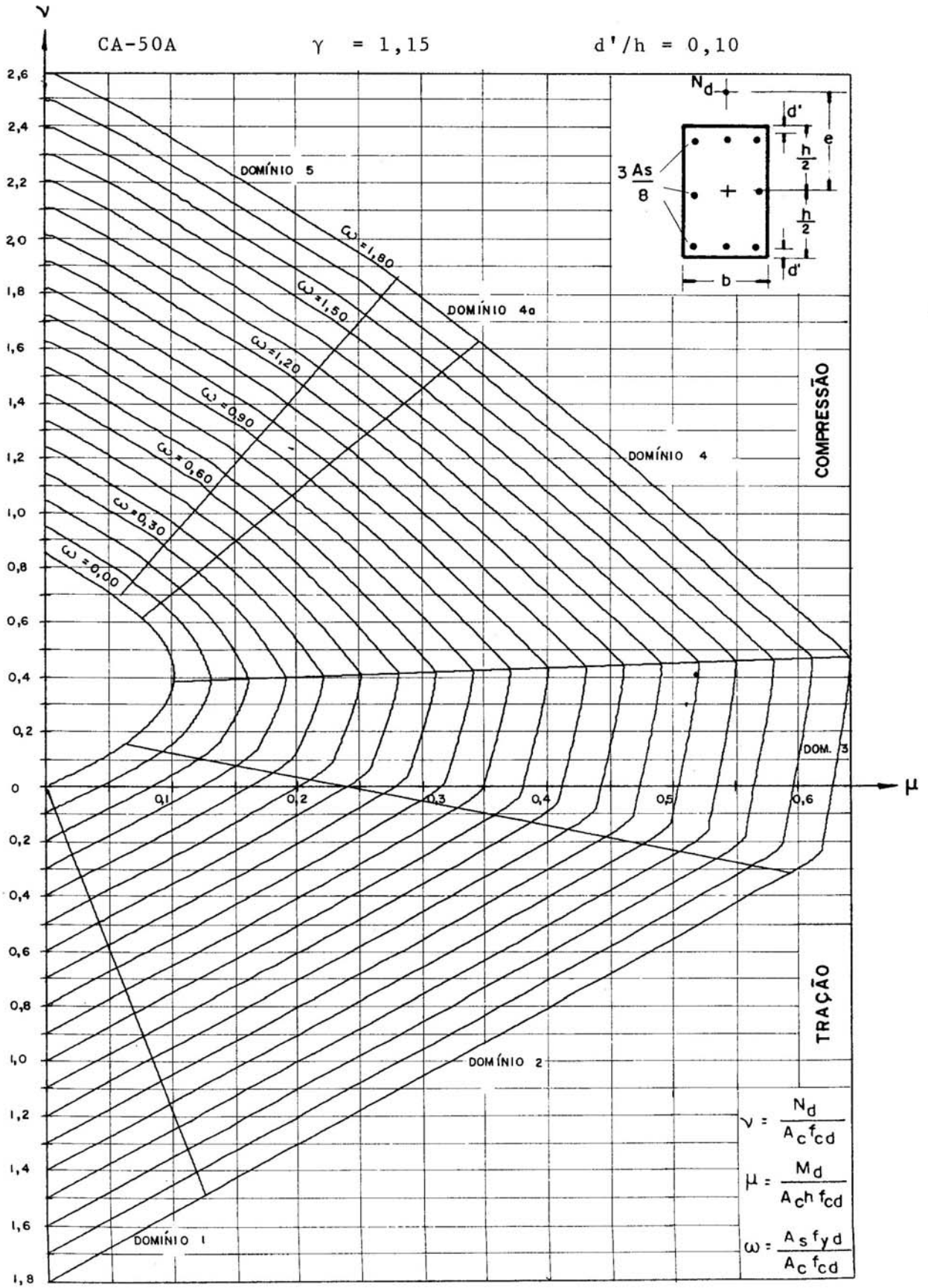
CA-50A

$\gamma_s = 1,15$

$d'/h = 0,05$



ÁBACO A-27

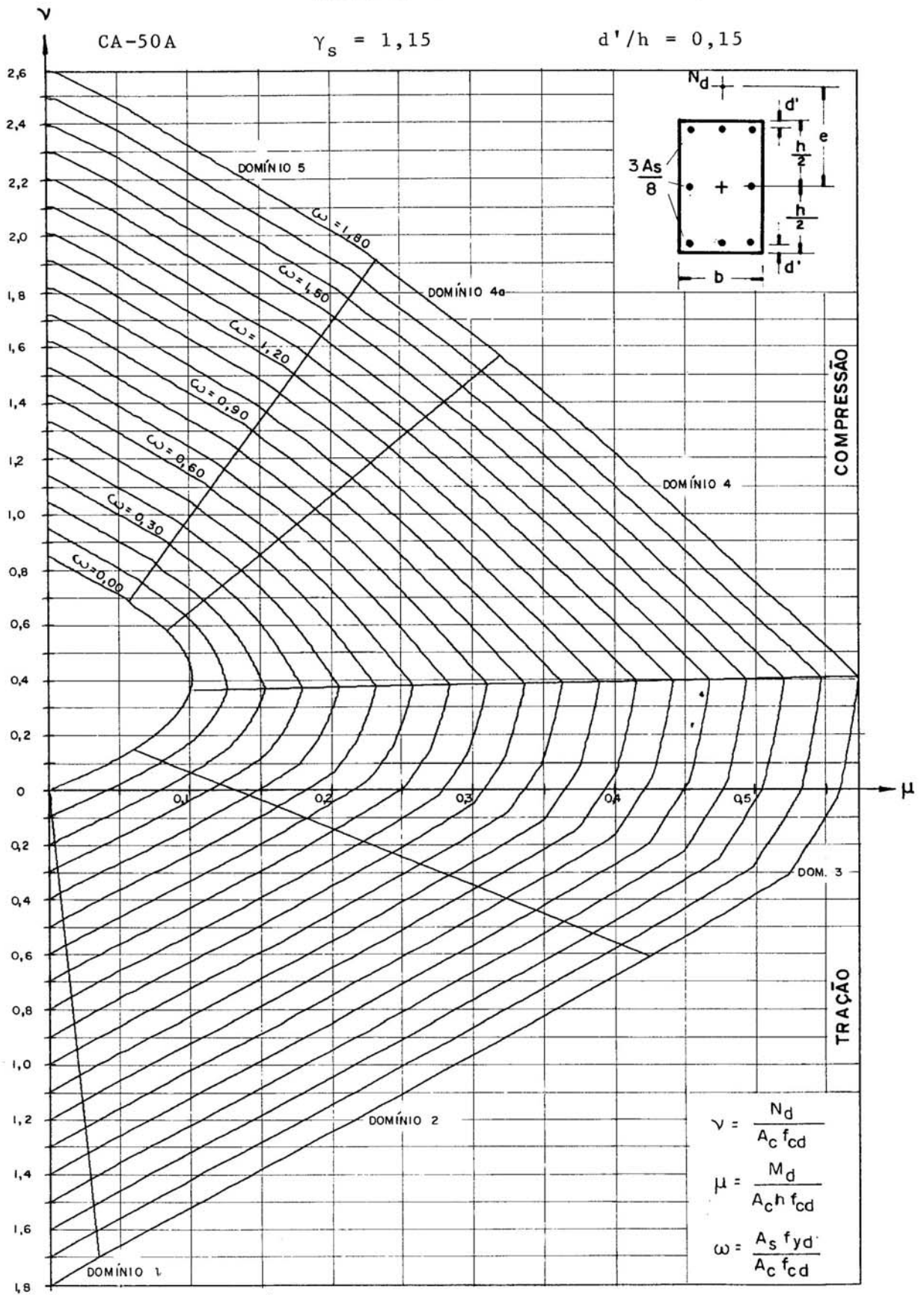


ÁBACO A-28

CA-50A

$\gamma_s = 1,15$

$d'/h = 0,15$



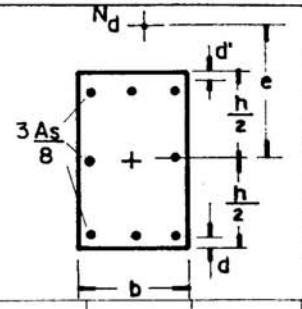
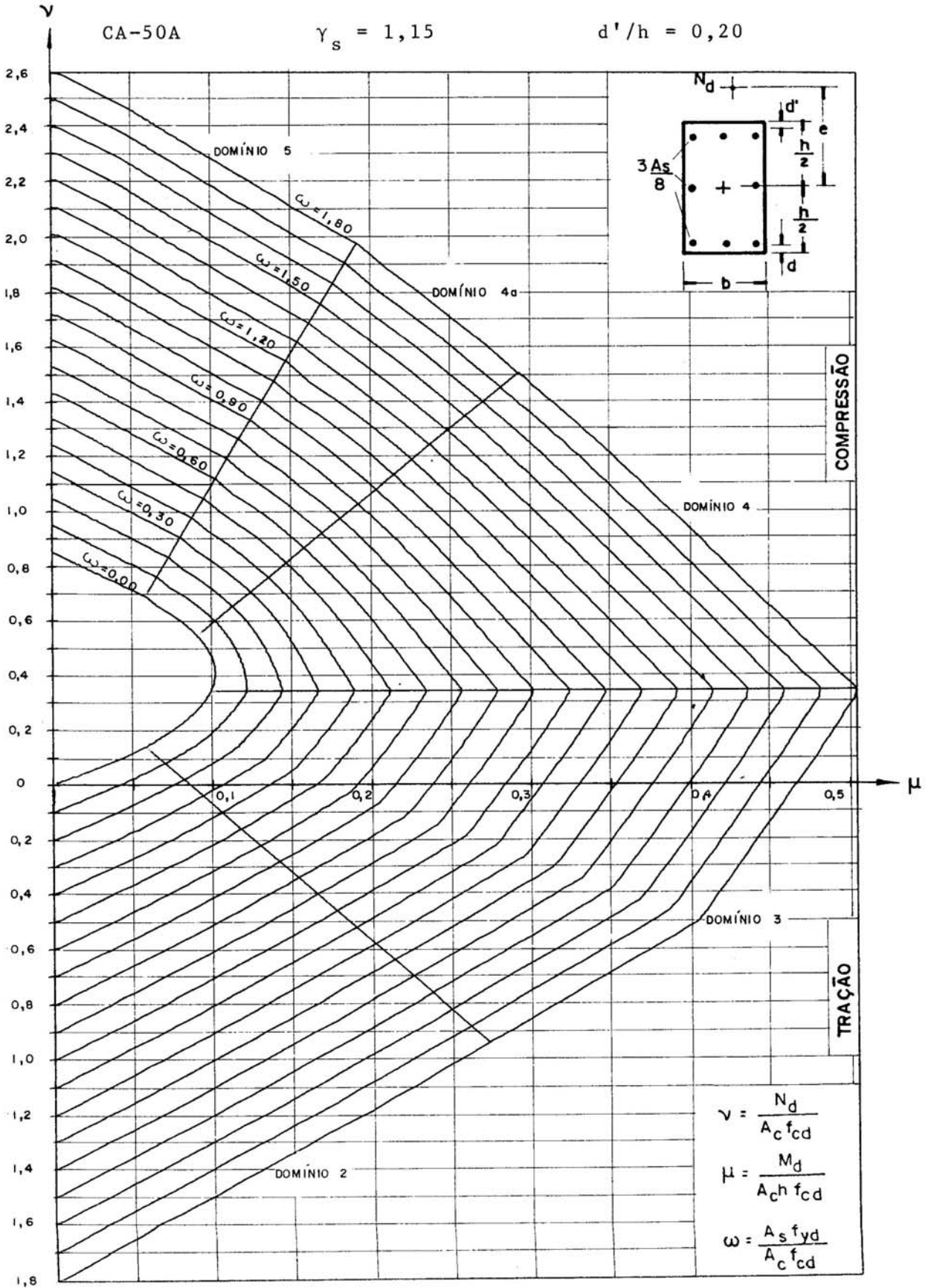


ÁBACO A-29

CA-50A

$\gamma_s = 1,15$

$d'/h = 0,20$



$$v = \frac{N_d}{A_c f_{cd}}$$

$$\mu = \frac{M_d}{A_c h f_{cd}}$$

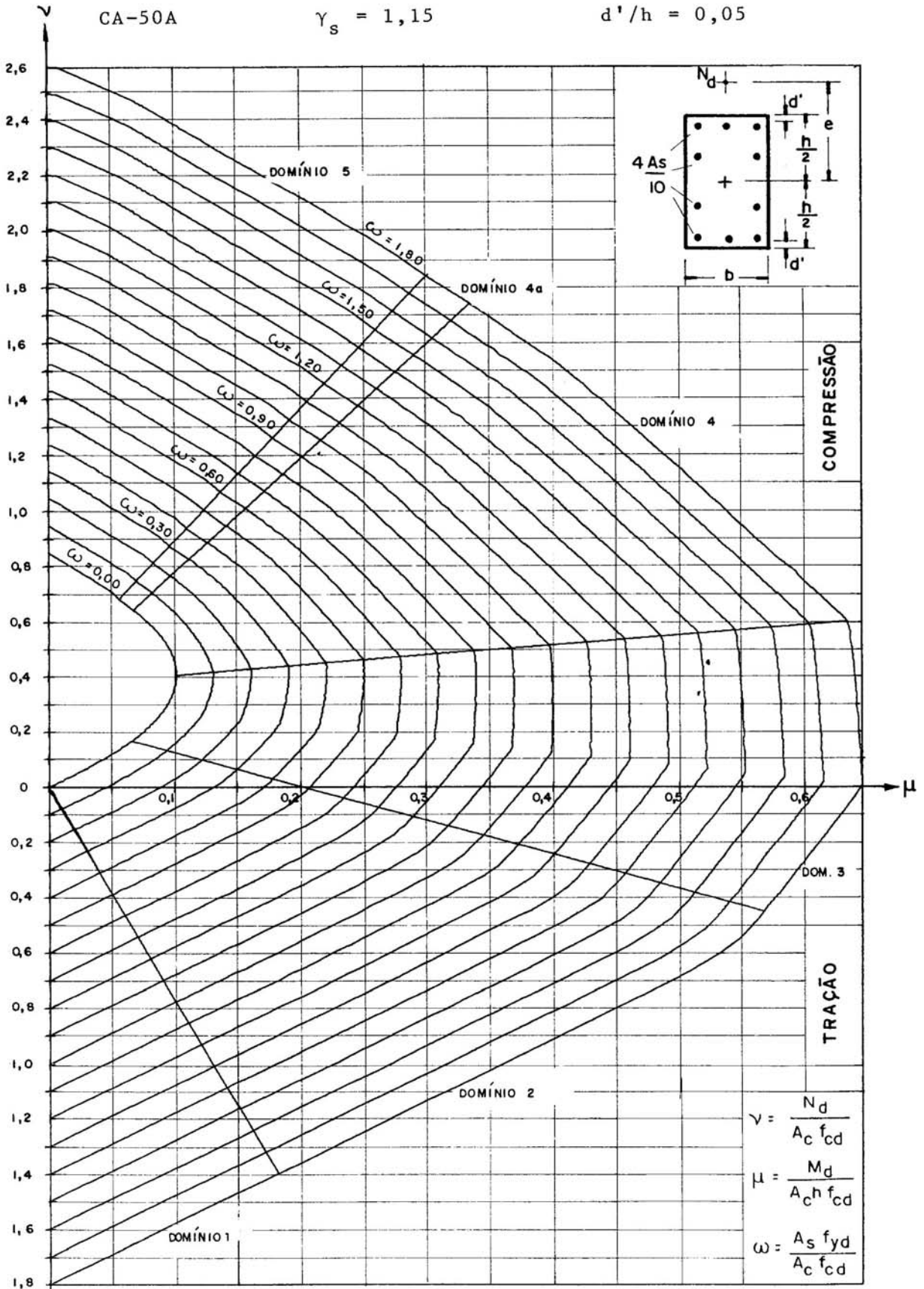
$$\omega = \frac{A_s f_{yd}}{A_c f_{cd}}$$

ÁBACO A-30

CA-50A

$\gamma_s = 1,15$

$d'/h = 0,05$



$$v = \frac{N_d}{A_c f_{cd}}$$

$$\mu = \frac{M_d}{A_c h f_{cd}}$$

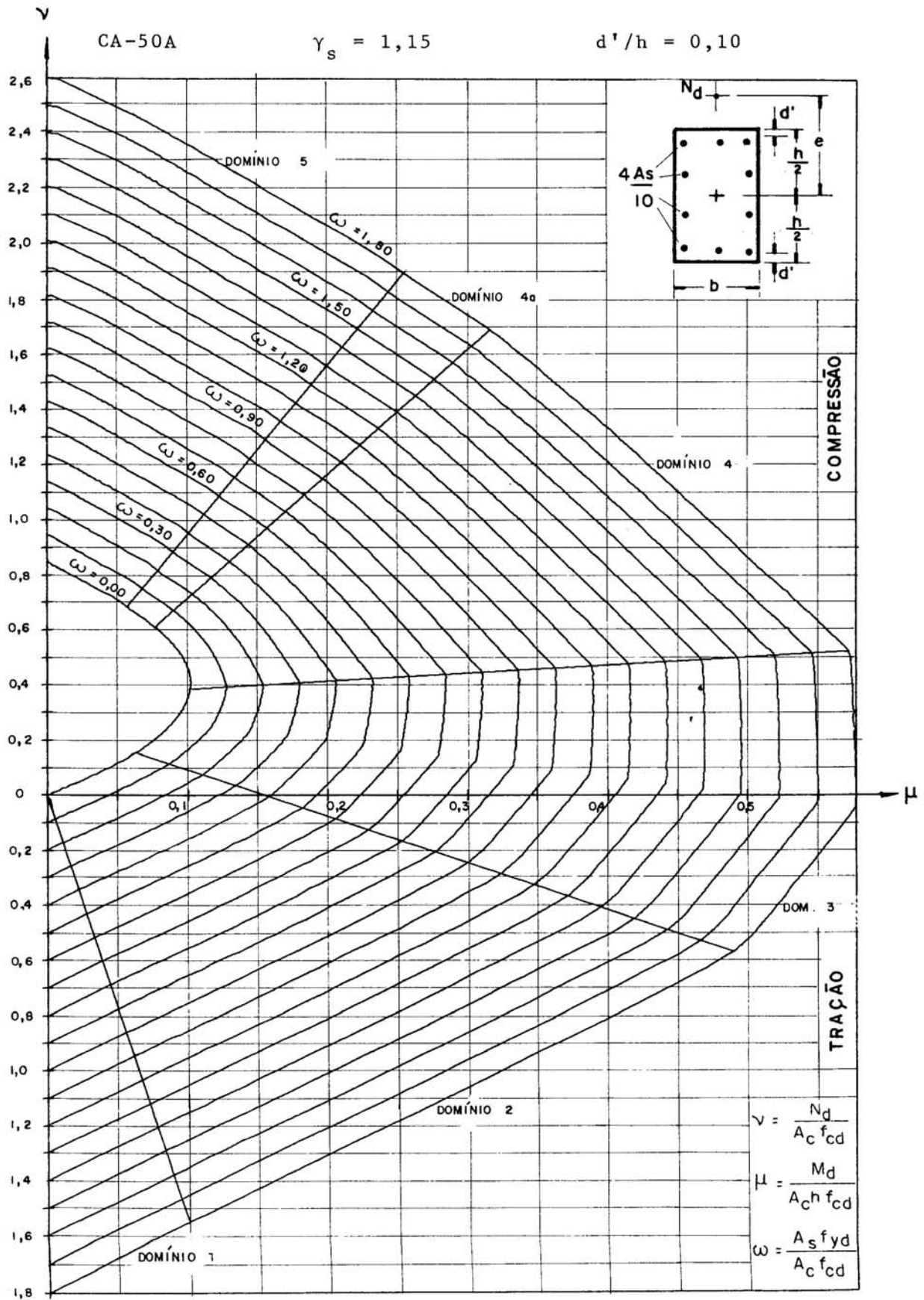
$$\omega = \frac{A_s f_{yd}}{A_c f_{cd}}$$

ÁBACO A-31

CA-50A

$\gamma_s = 1,15$

$d'/h = 0,10$



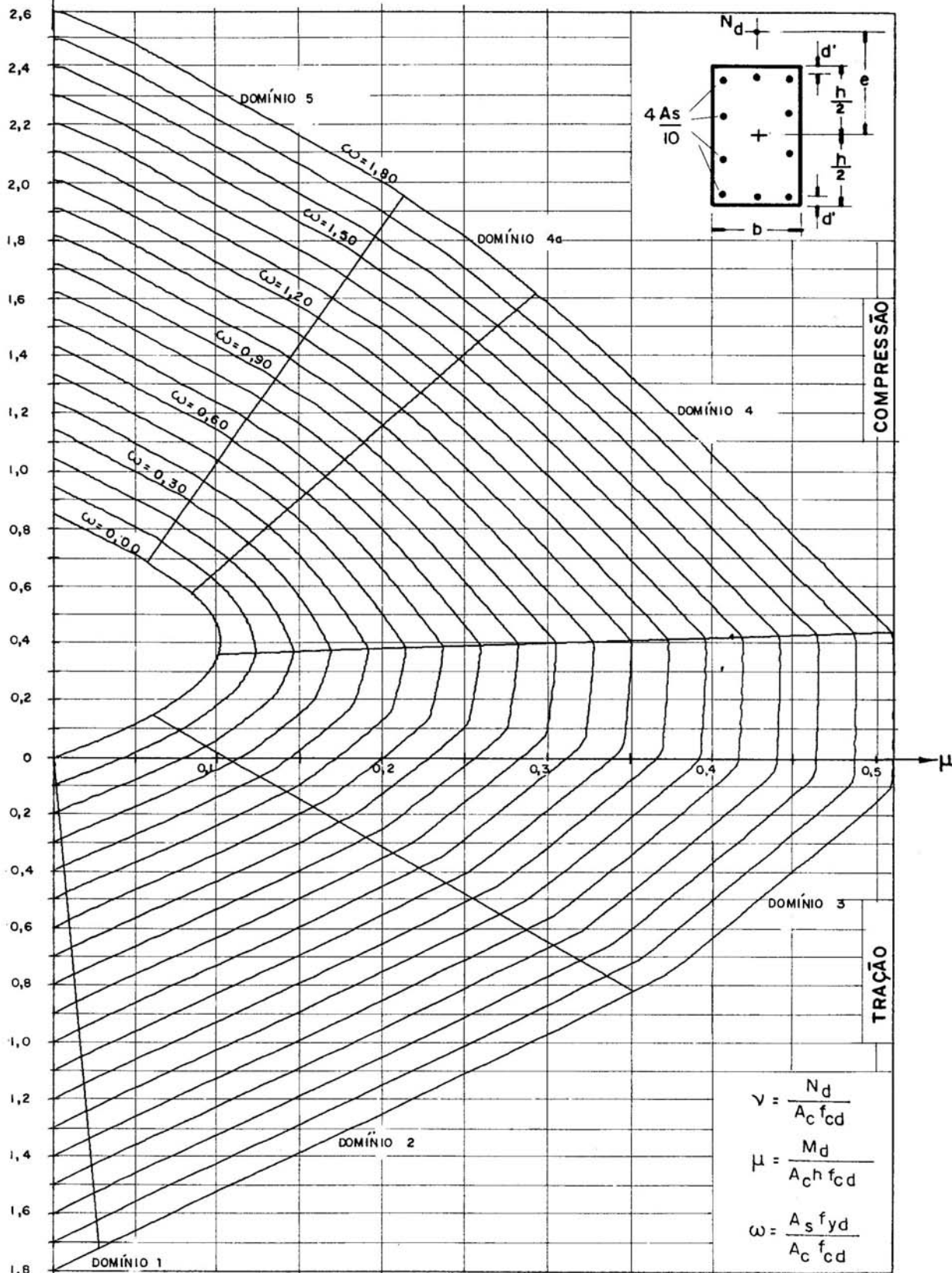


ÁBACO A-32

CA-50A

$\gamma_s = 1,15$

$d'/h = 0,15$

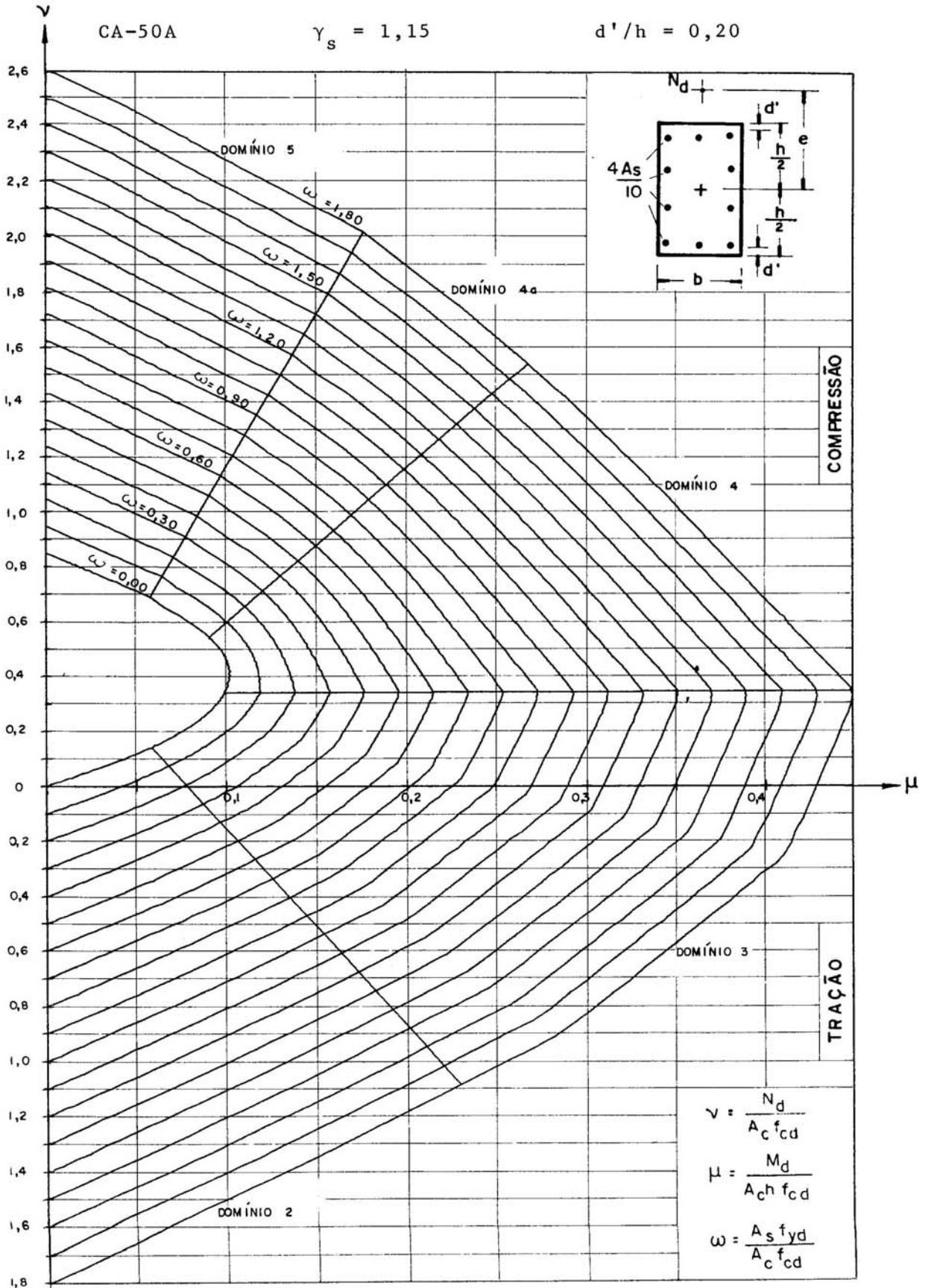


ÂBACO A-33

CA-50A

$\gamma_s = 1,15$

$d'/h = 0,20$

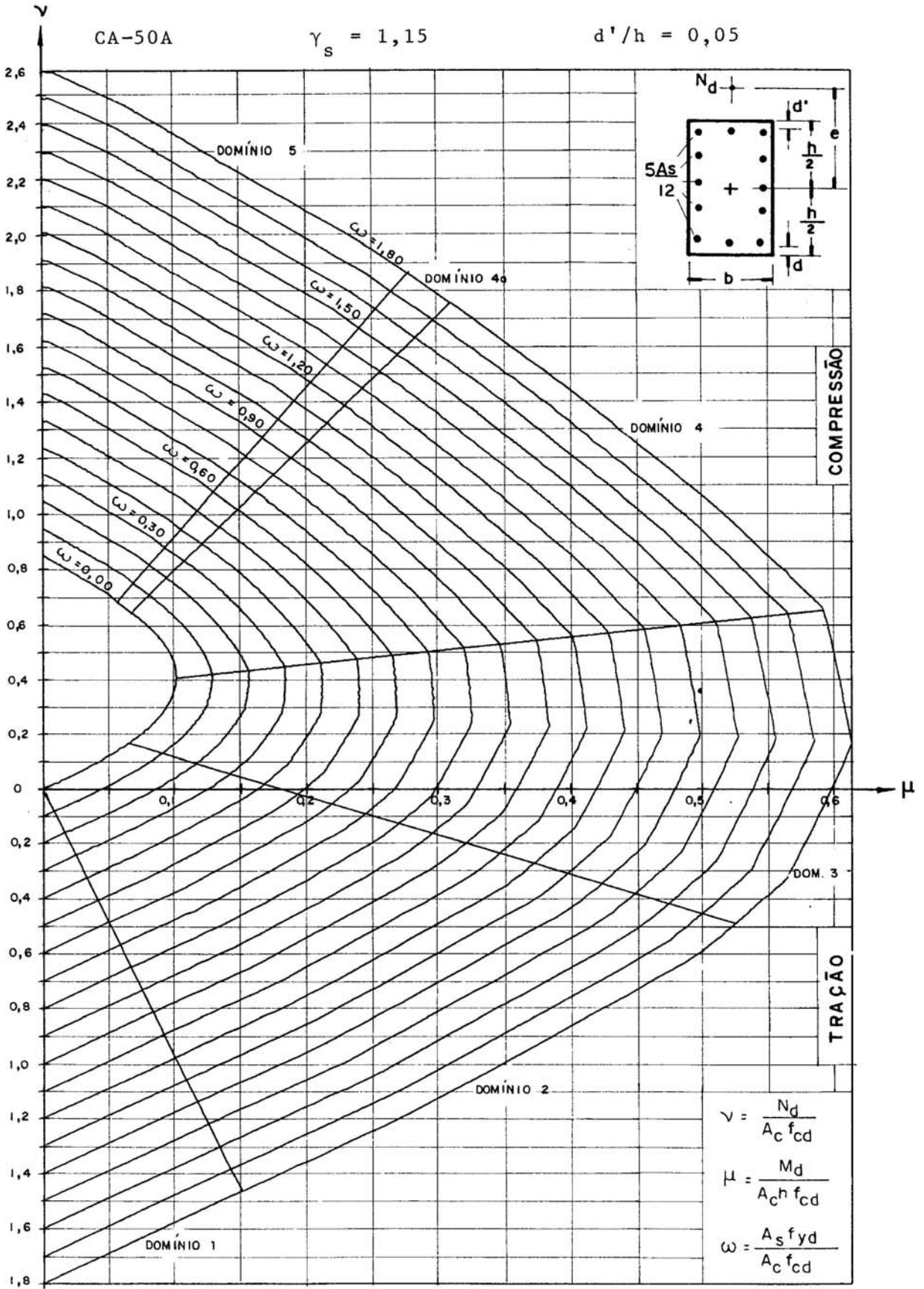


ÁBACO A-34

CA-50A

$\gamma_s = 1,15$

$d'/h = 0,05$

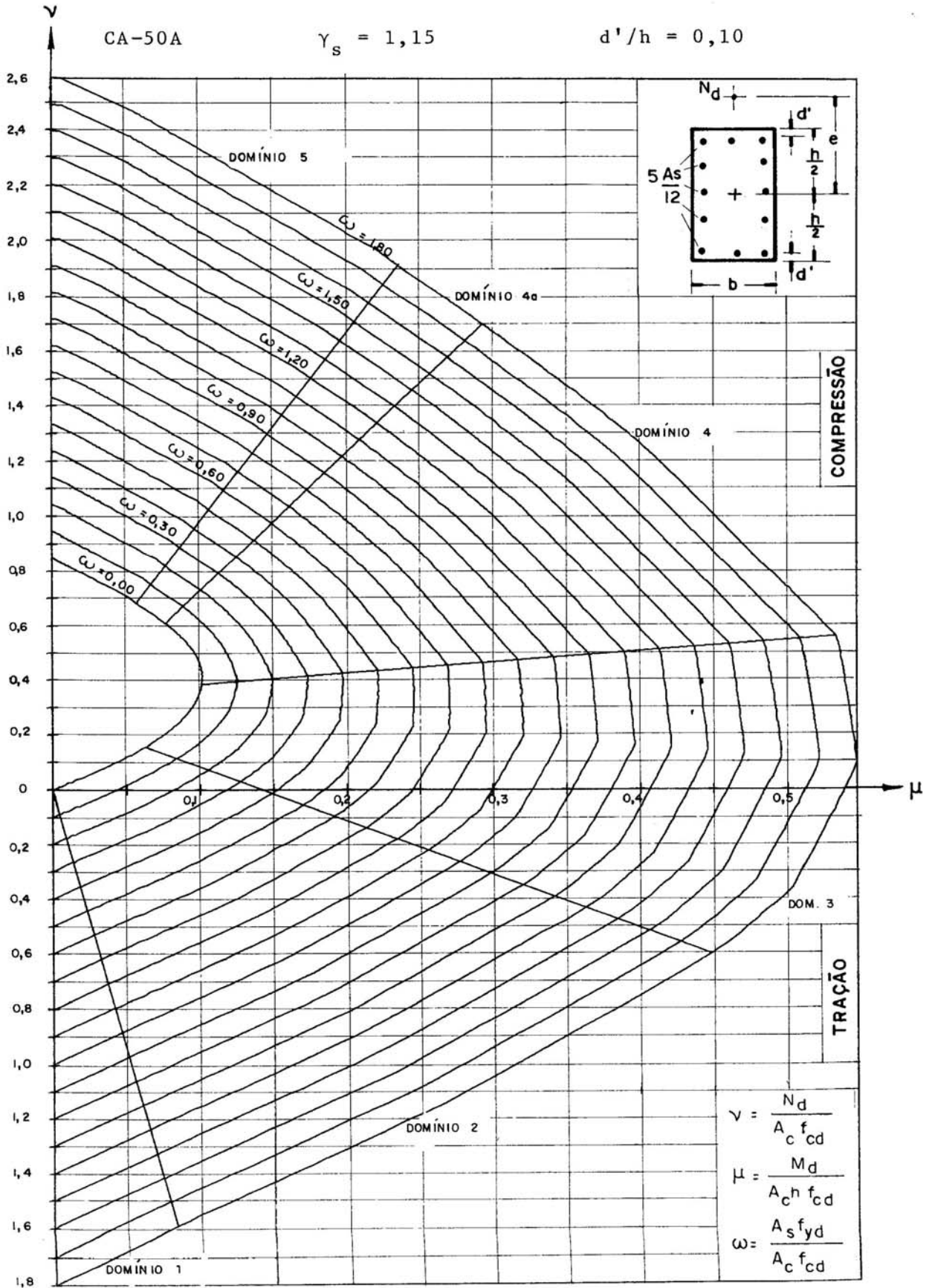


ÁBACO A-35

CA-50A

$\gamma_s = 1,15$

$d'/h = 0,10$

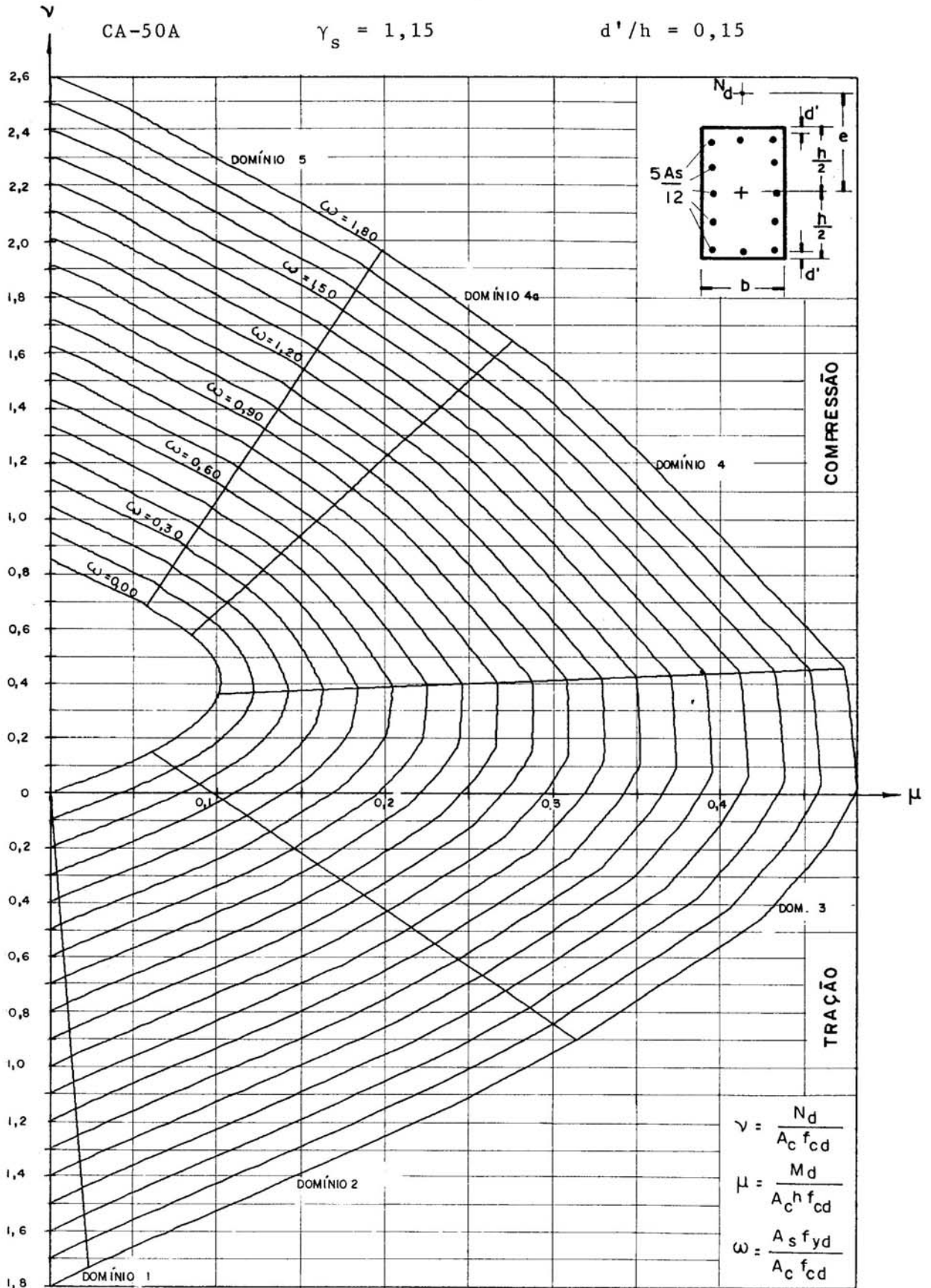


ÁBACO A-36

CA-50A

$\gamma_s = 1,15$

$d'/h = 0,15$



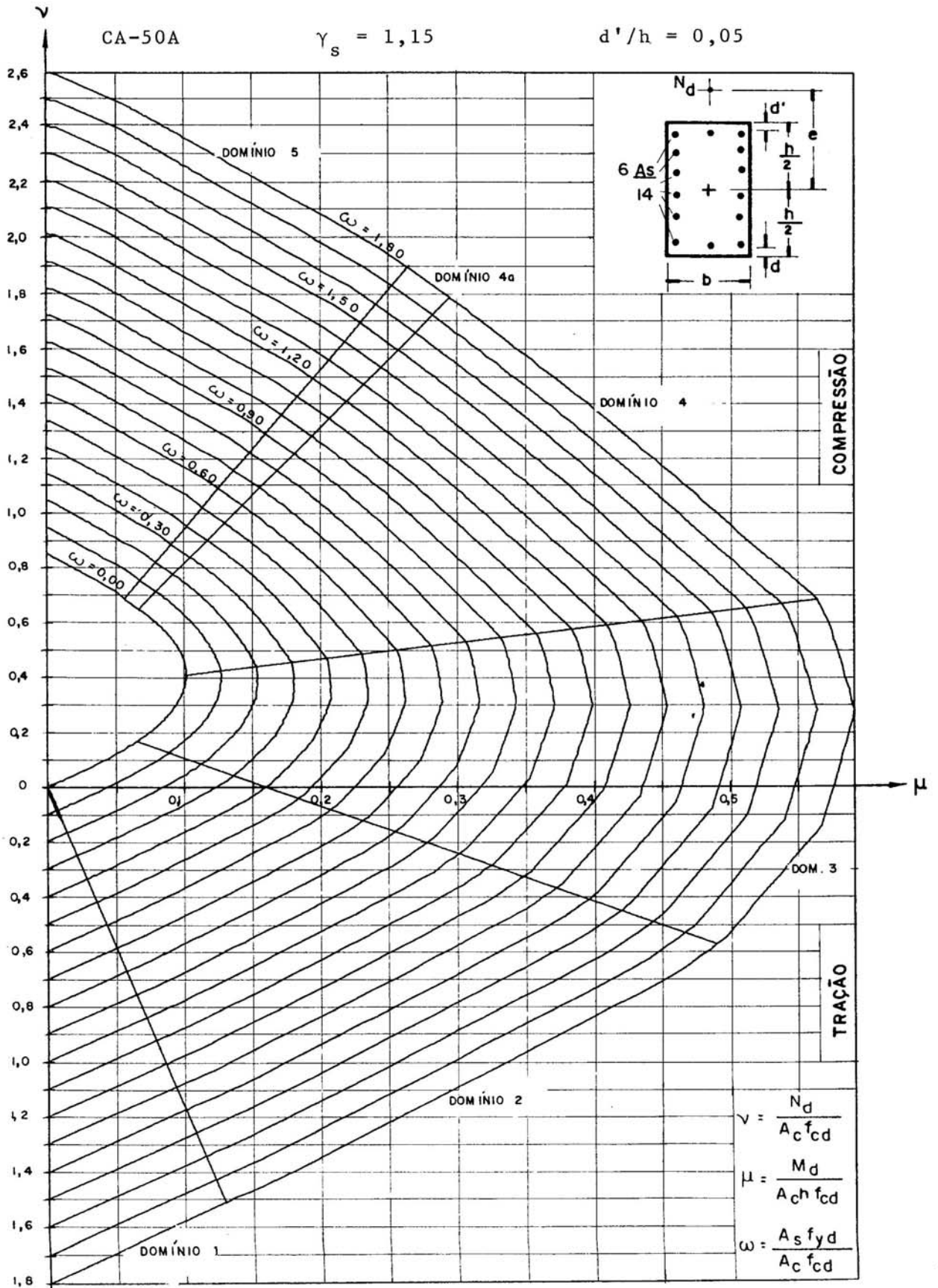


ÁBACO A-37

CA-50A

$\gamma_s = 1,15$

$d'/h = 0,05$

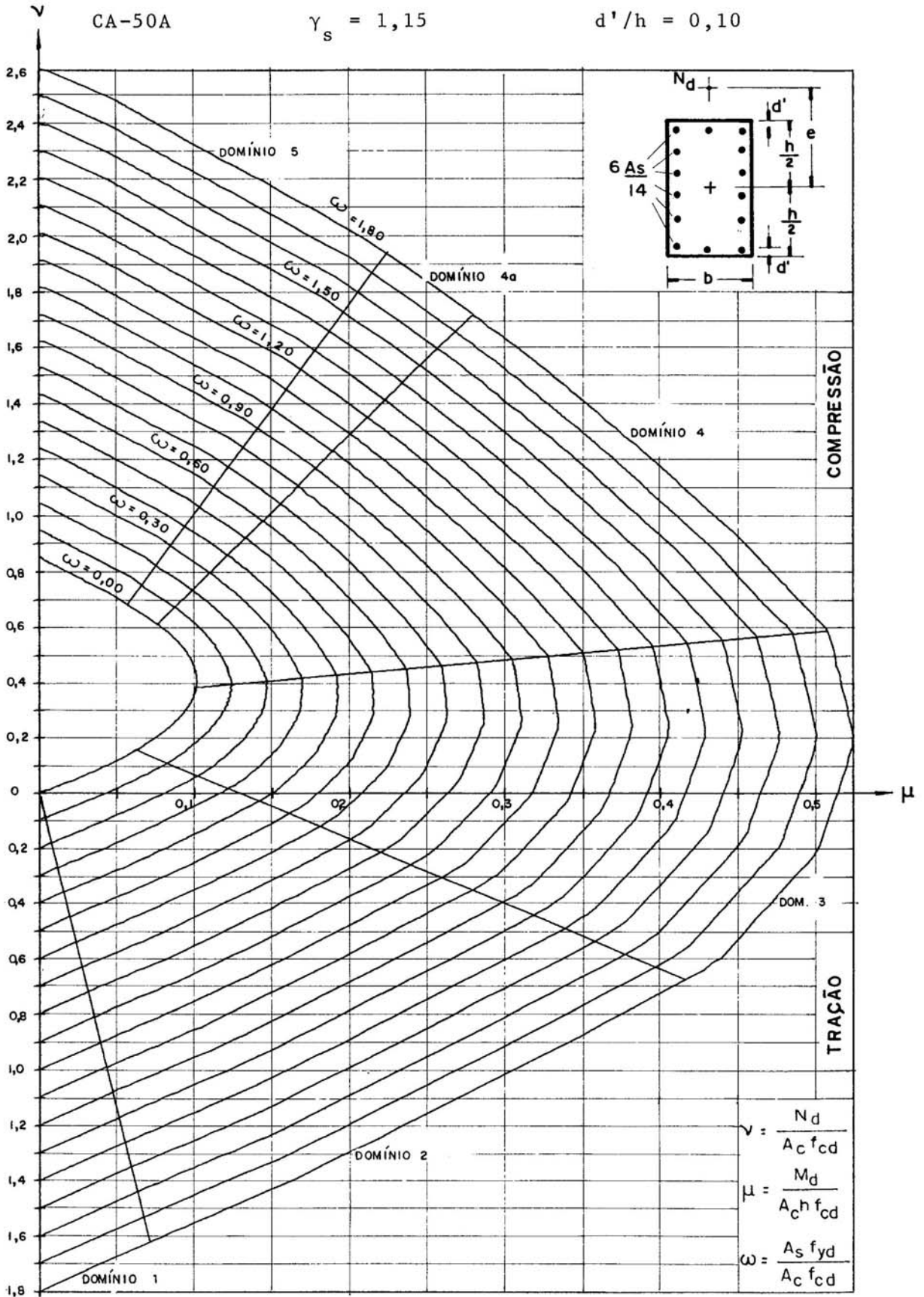


ÁBACO A-38

CA-50A

$\gamma_s = 1,15$

$d'/h = 0,10$

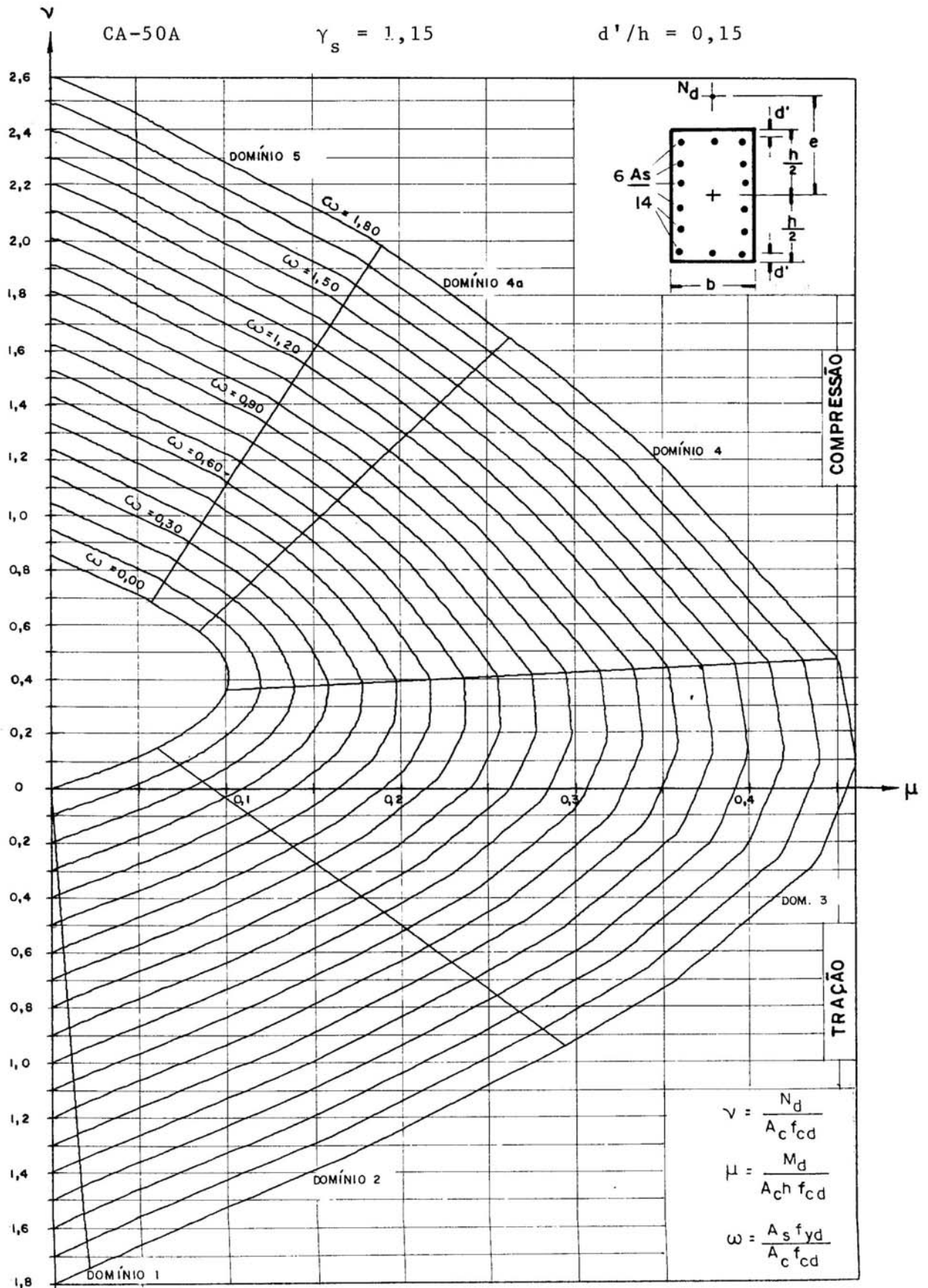


ÁBACO A-39

CA-50A

$\gamma_s = 1,15$

$d'/h = 0,15$



$$\gamma = \frac{N_d}{A_c f_{cd}}$$

$$\mu = \frac{M_d}{A_c h f_{cd}}$$

$$\omega = \frac{A_s f_{yd}}{A_c f_{cd}}$$

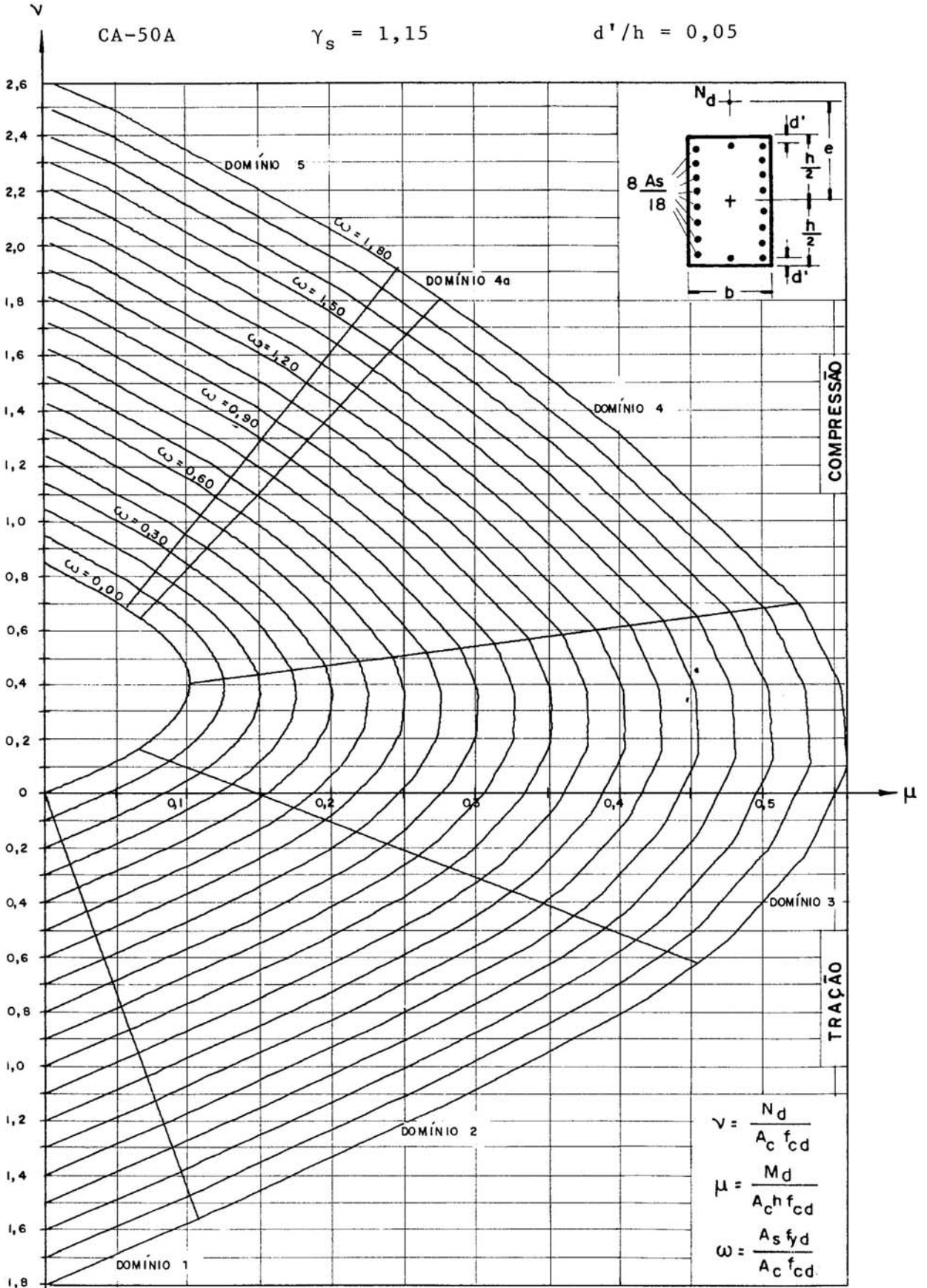


ÁBACO A-40

CA-50A

$\gamma_s = 1,15$

$d'/h = 0,05$

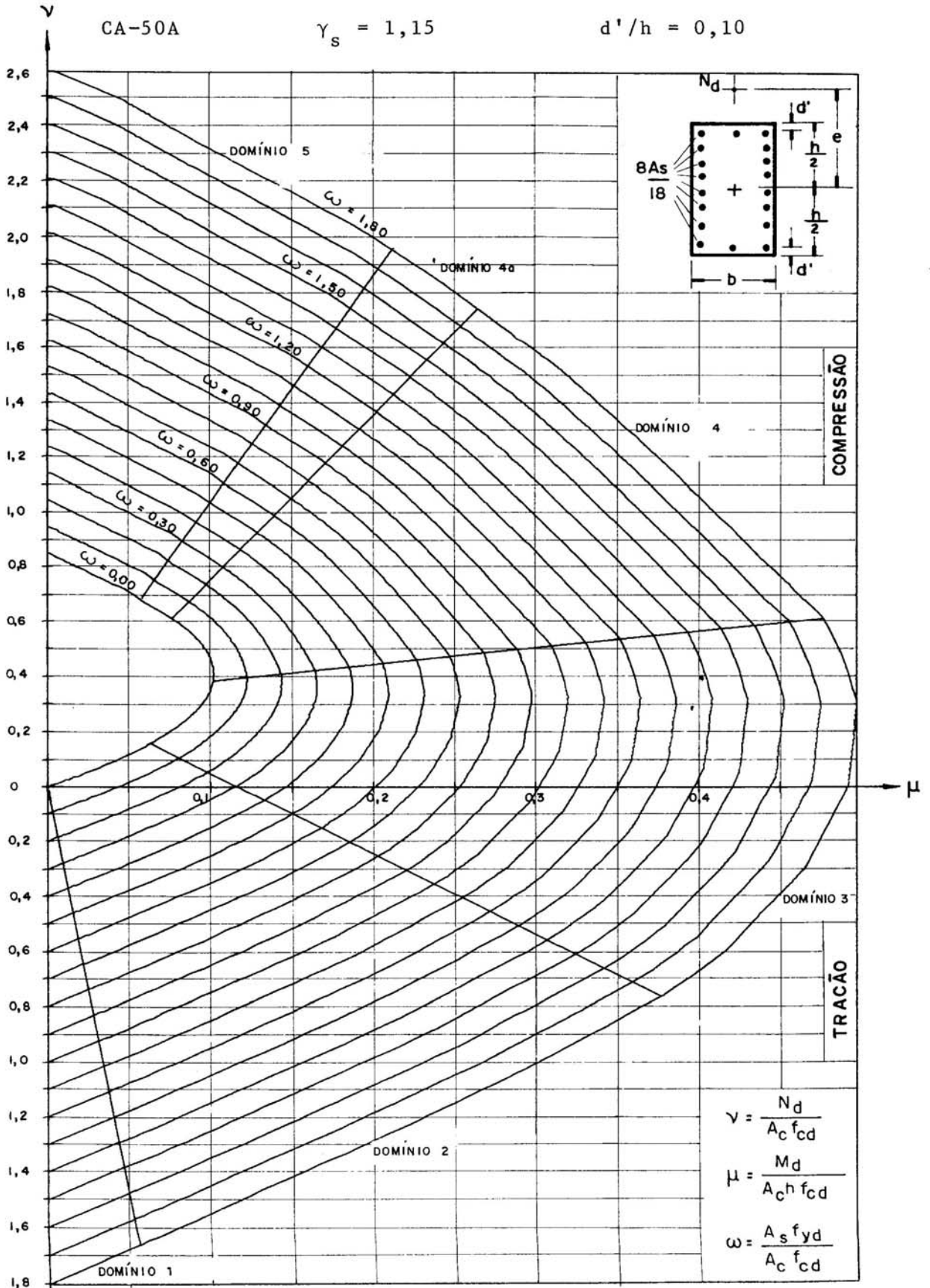


ÁBACO A-41

CA-50A

$\gamma_s = 1,15$

$d'/h = 0,10$

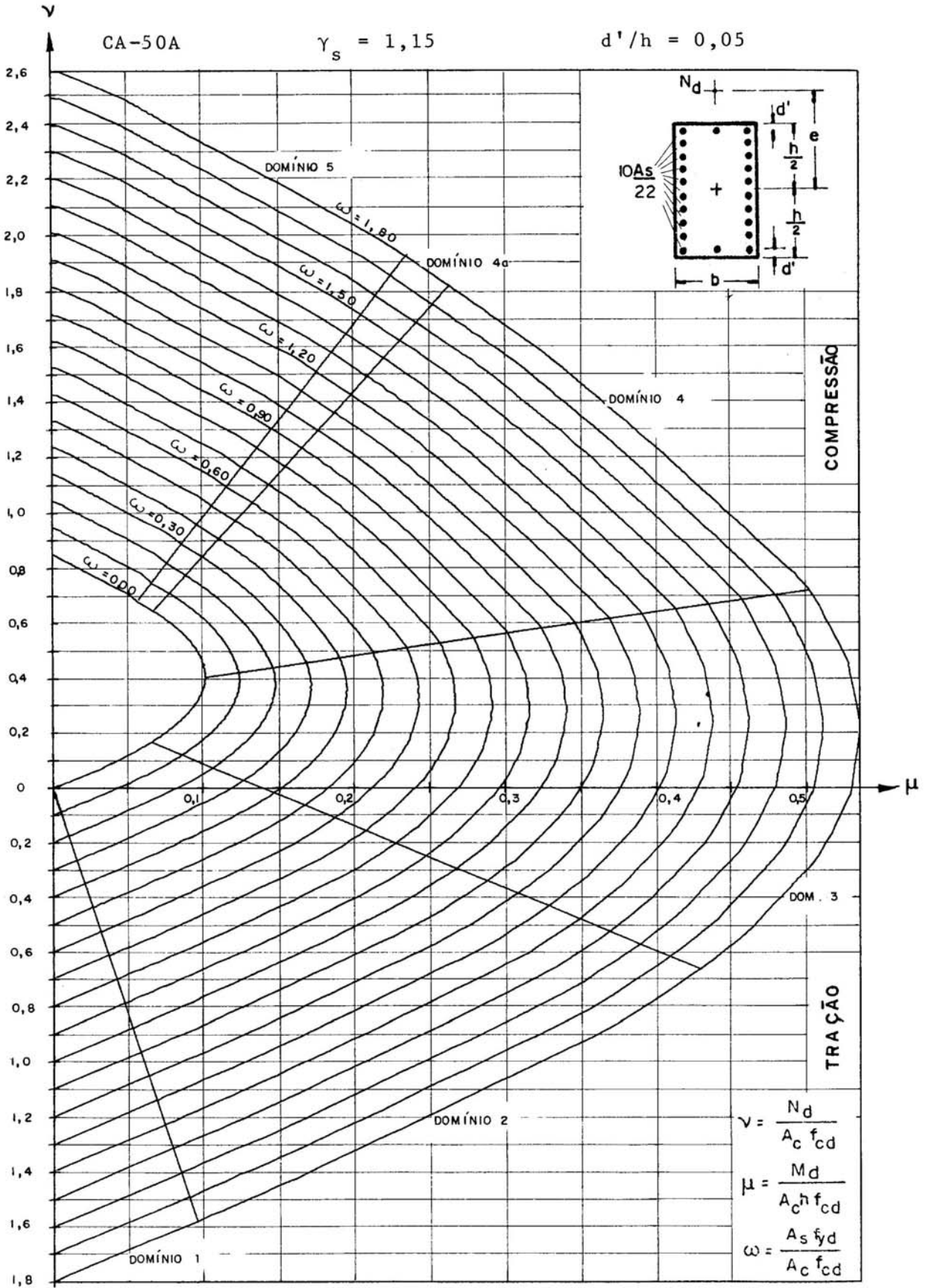


ÁBACO A-42

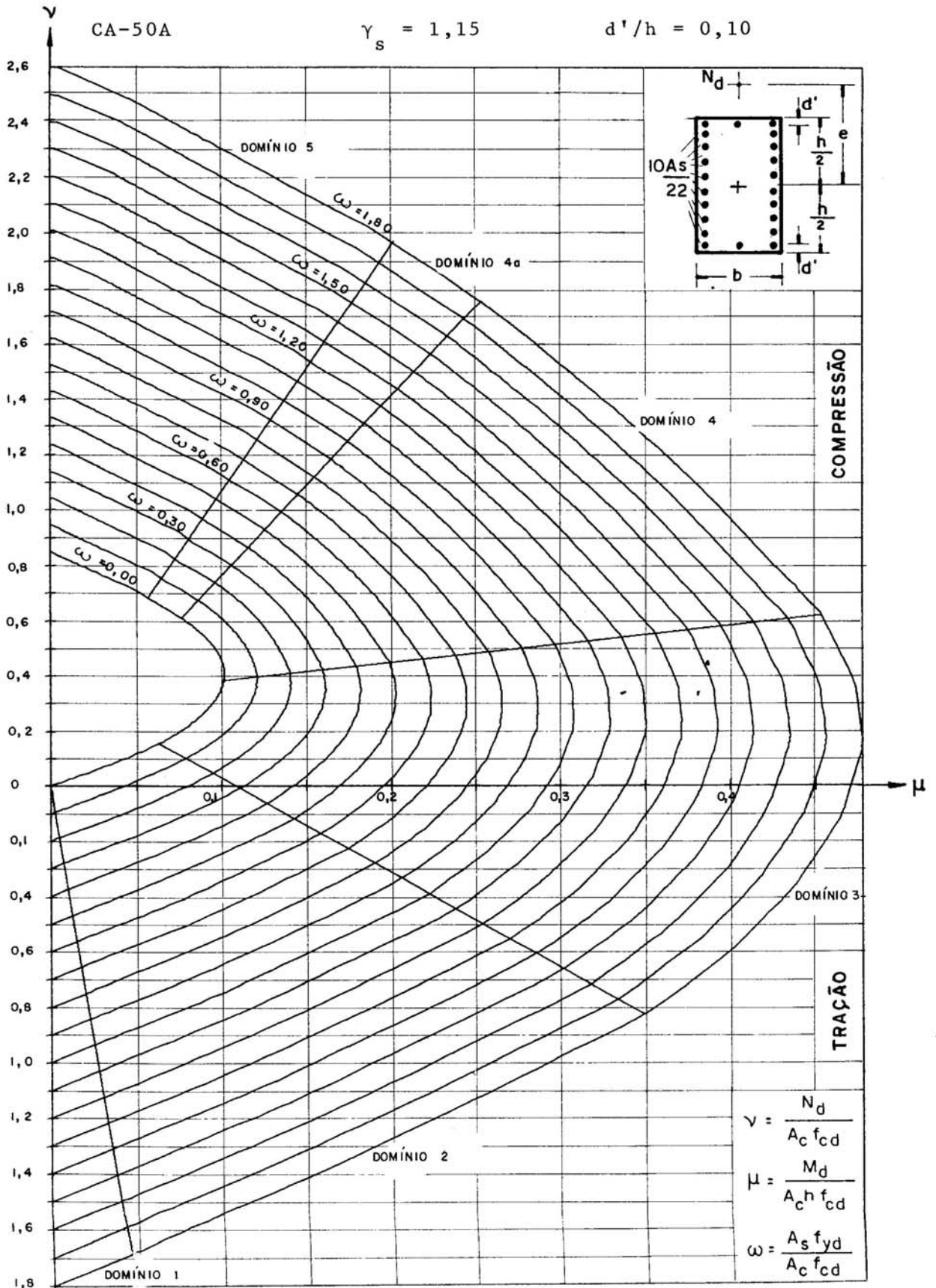
CA-50A

$\gamma_s = 1,15$

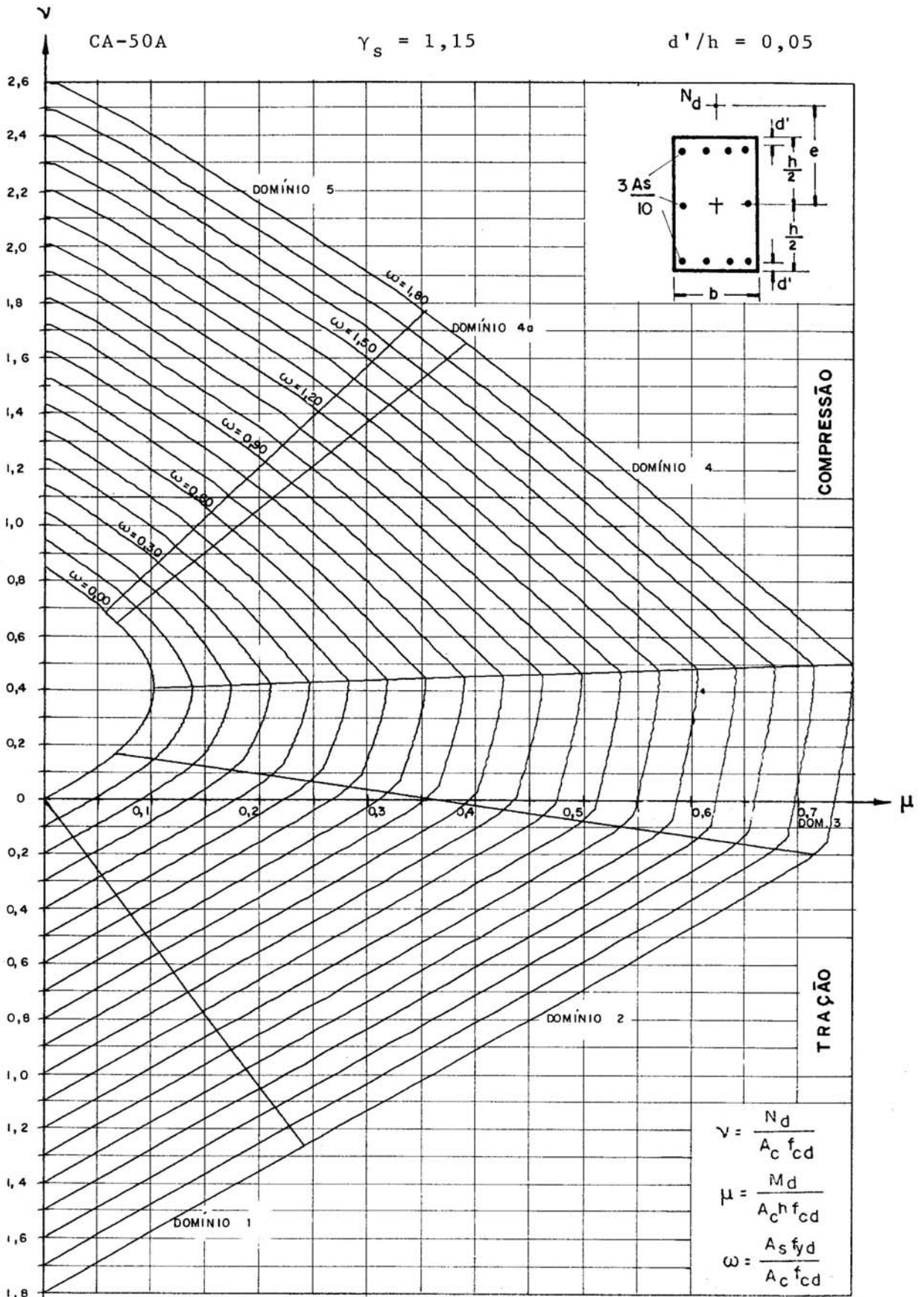
$d'/h = 0,05$



ÁBACO A-43



ÁBACO A-44



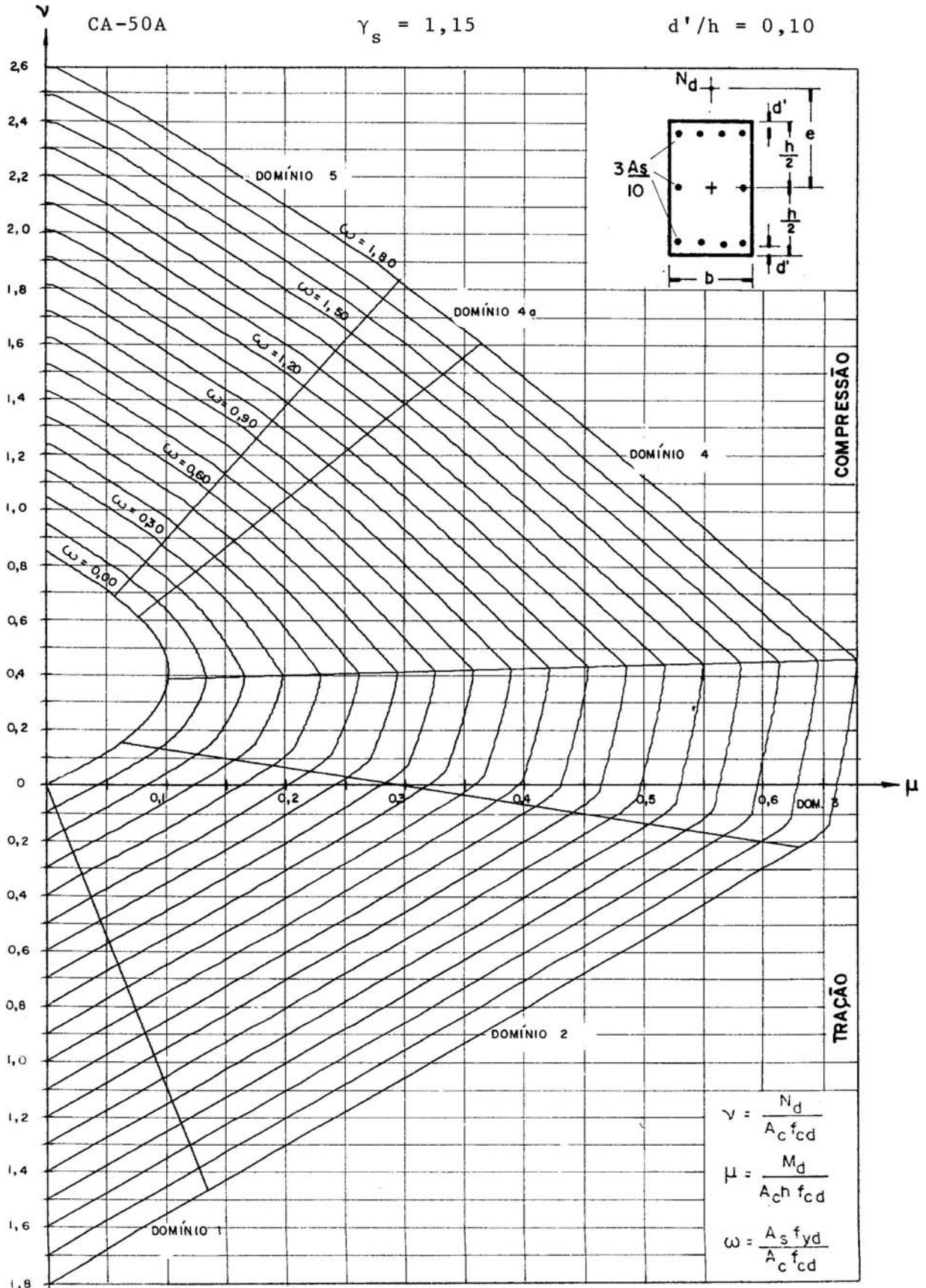


ÁBACO A-45

CA-50A

$\gamma_s = 1,15$

$d'/h = 0,10$

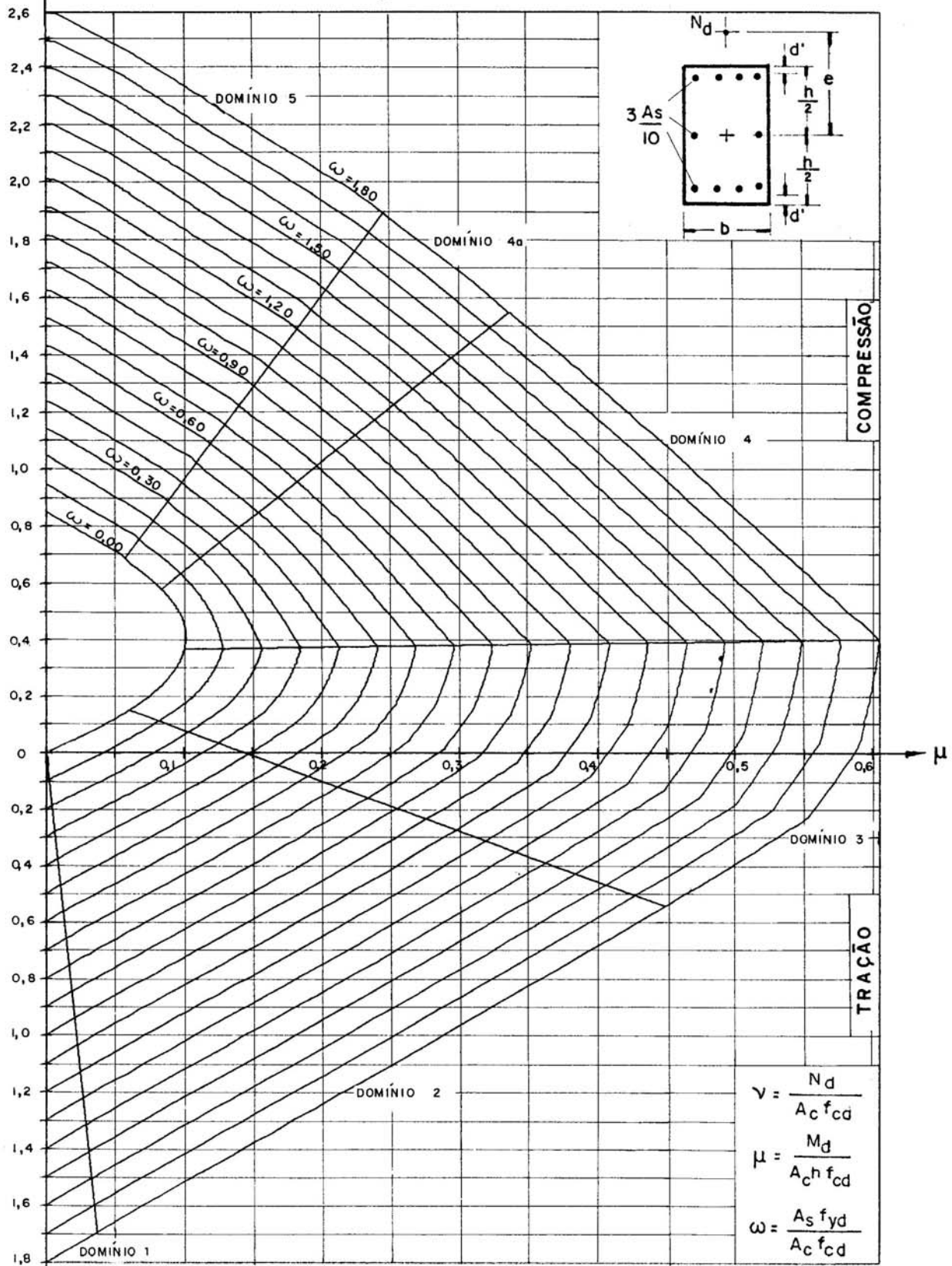


ÁBACO A-46

CA-50A

$\gamma_s = 1,15$

$d'/h = 0,15$



$$v = \frac{N_d}{A_c f_{cd}}$$

$$\mu = \frac{M_d}{A_c h f_{cd}}$$

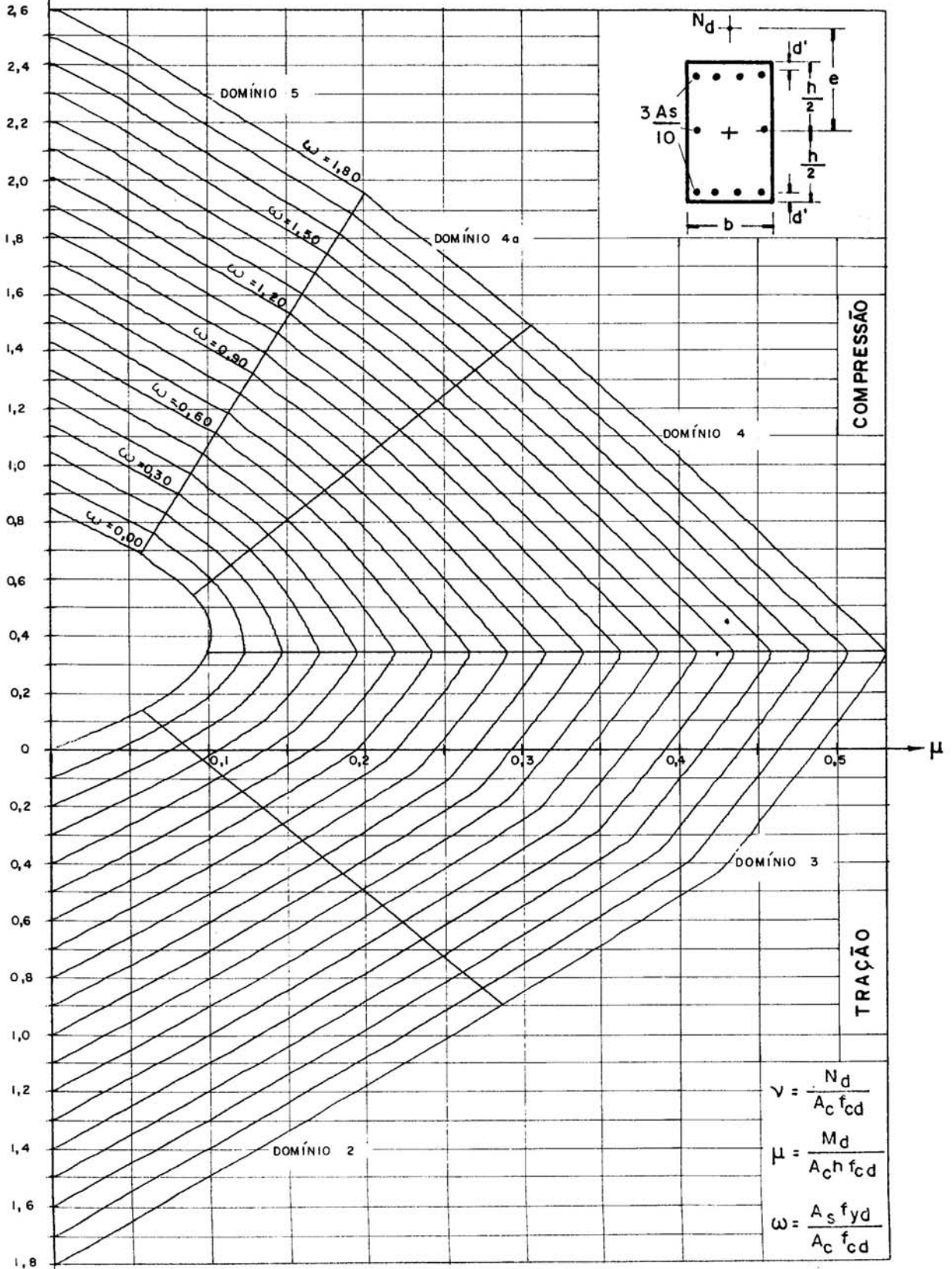
$$\omega = \frac{A_s f_{yd}}{A_c f_{cd}}$$

ÁBACO A-47

CA-50A

$\gamma_s = 1,15$

$d'/h = 0,20$



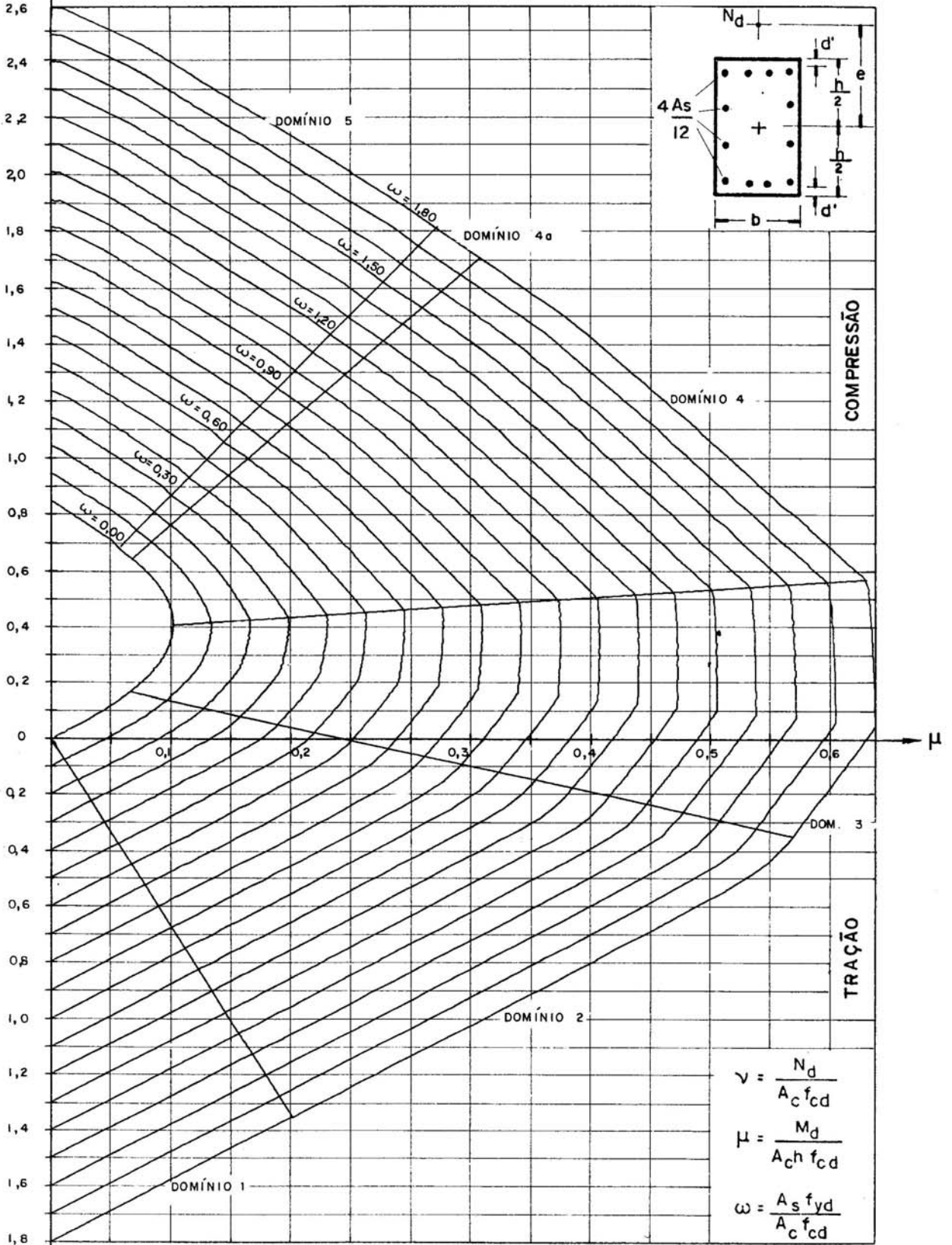


ÁBACO A-48

CA-50A

$\gamma_s = 1,15$

$d'/h = 0,05$

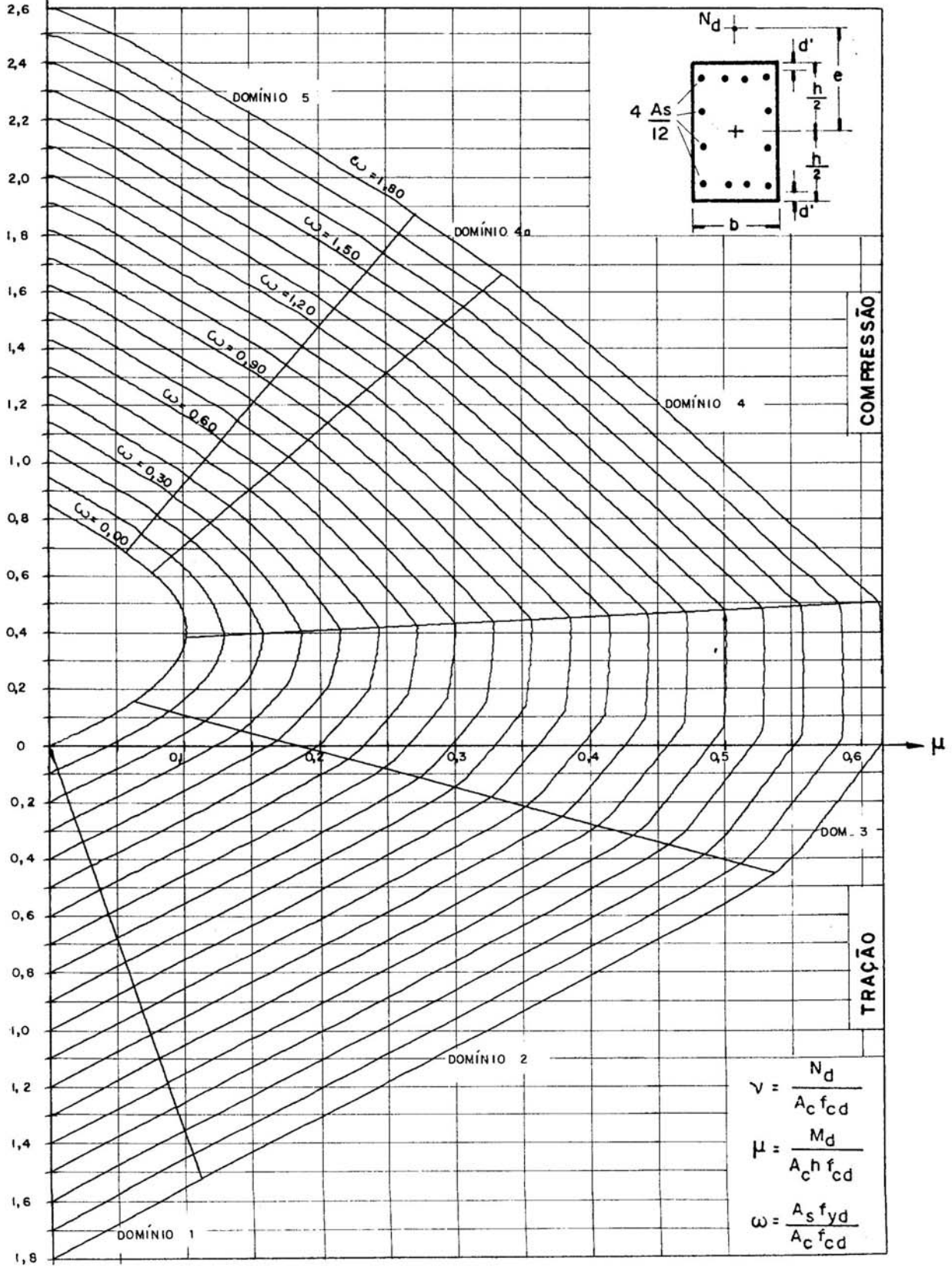


ÁBACO A-49

CA-50A

$\gamma_s = 1,15$

$d'/h = 0,10$



$$v = \frac{N_d}{A_c f_{cd}}$$

$$\mu = \frac{M_d}{A_c h f_{cd}}$$

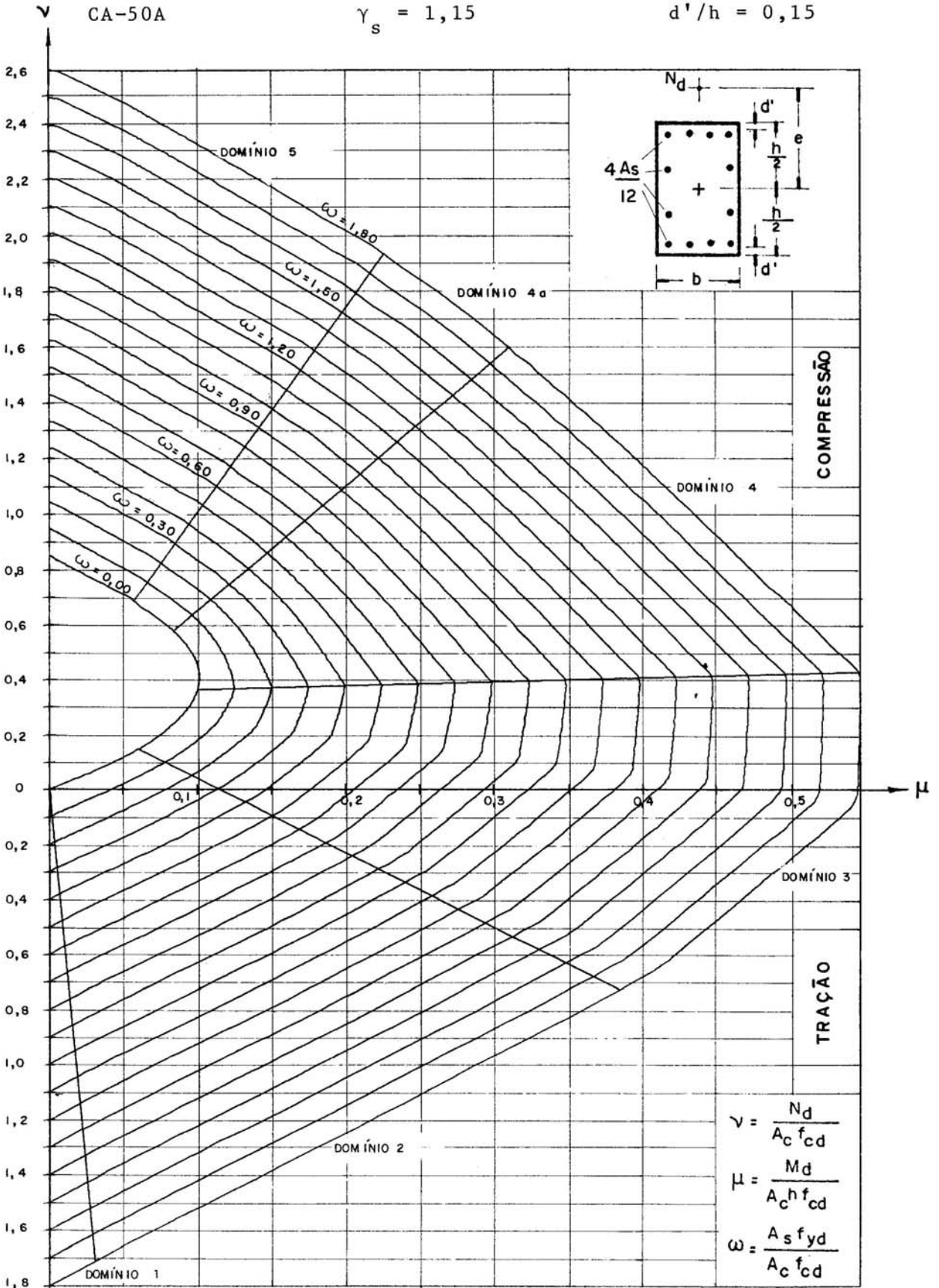
$$\omega = \frac{A_s f_{yd}}{A_c f_{cd}}$$

ÁBACO A-50

CA-50A

$\gamma_s = 1,15$

$d'/h = 0,15$

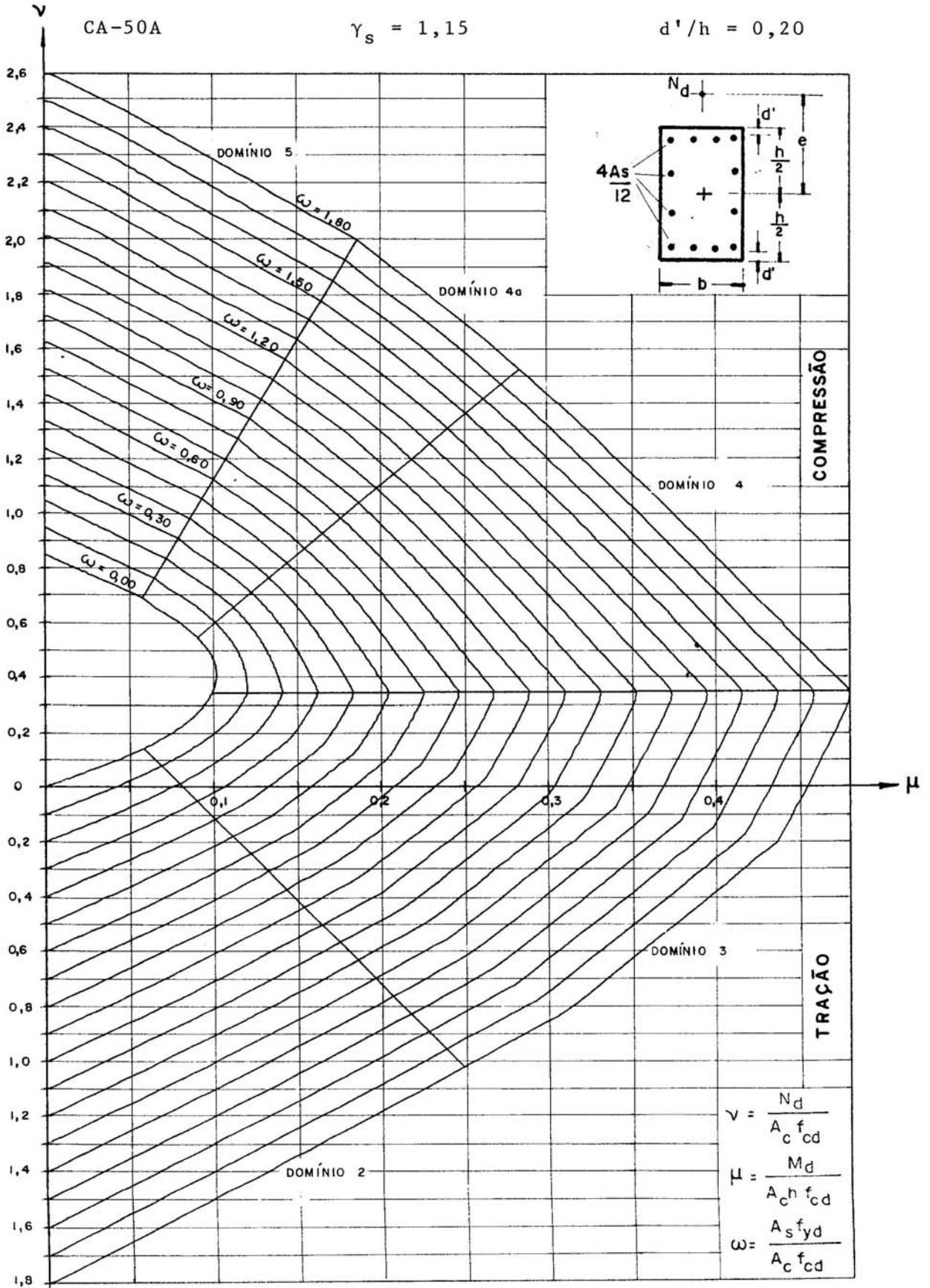


ÁBACO A-51

CA-50A

$\gamma_s = 1,15$

$d'/h = 0,20$

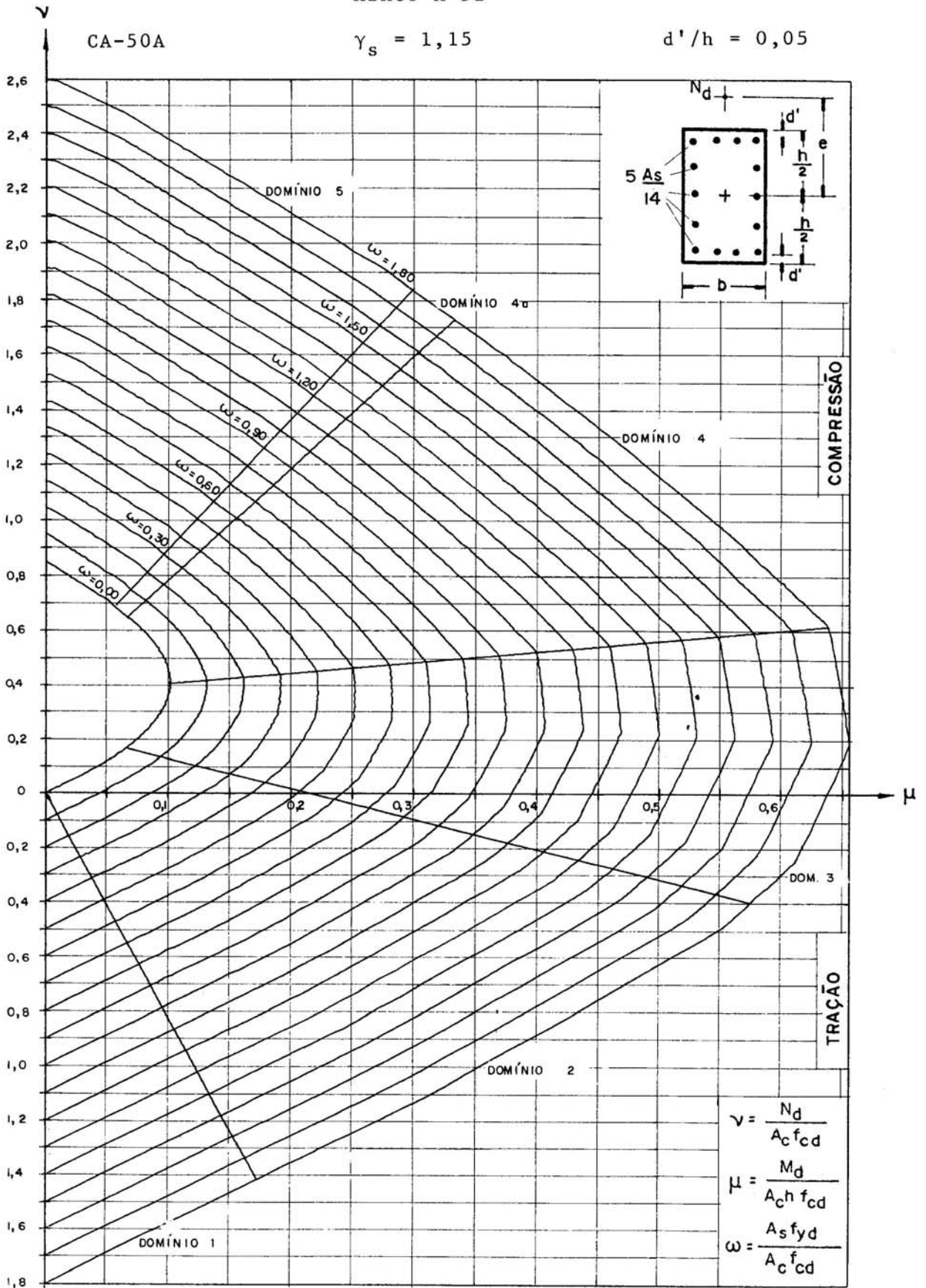


ÁBACO A-52

CA-50A

$\gamma_s = 1,15$

$d'/h = 0,05$



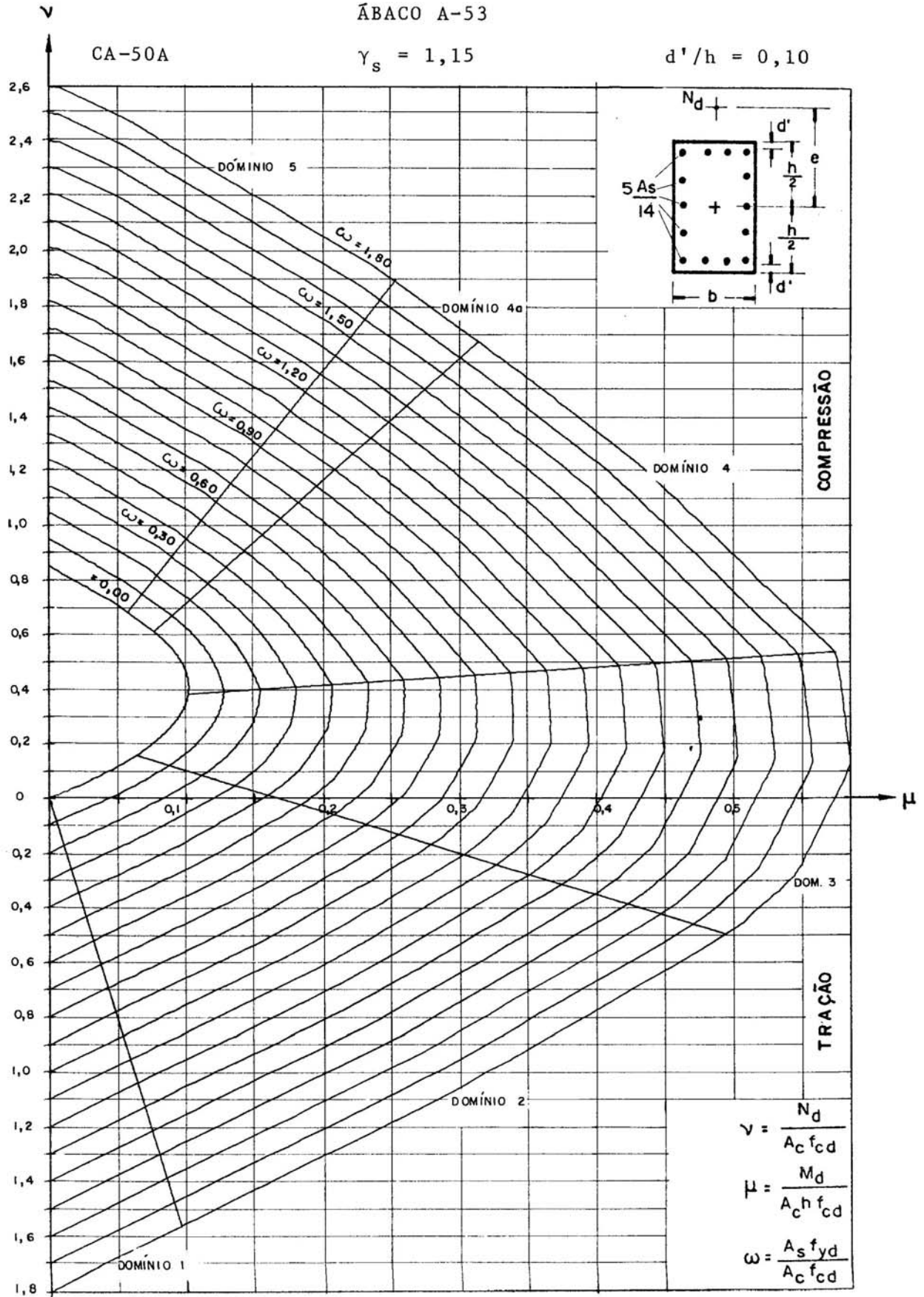


ÁBACO A-53

CA-50A

$\gamma_s = 1,15$

$d'/h = 0,10$

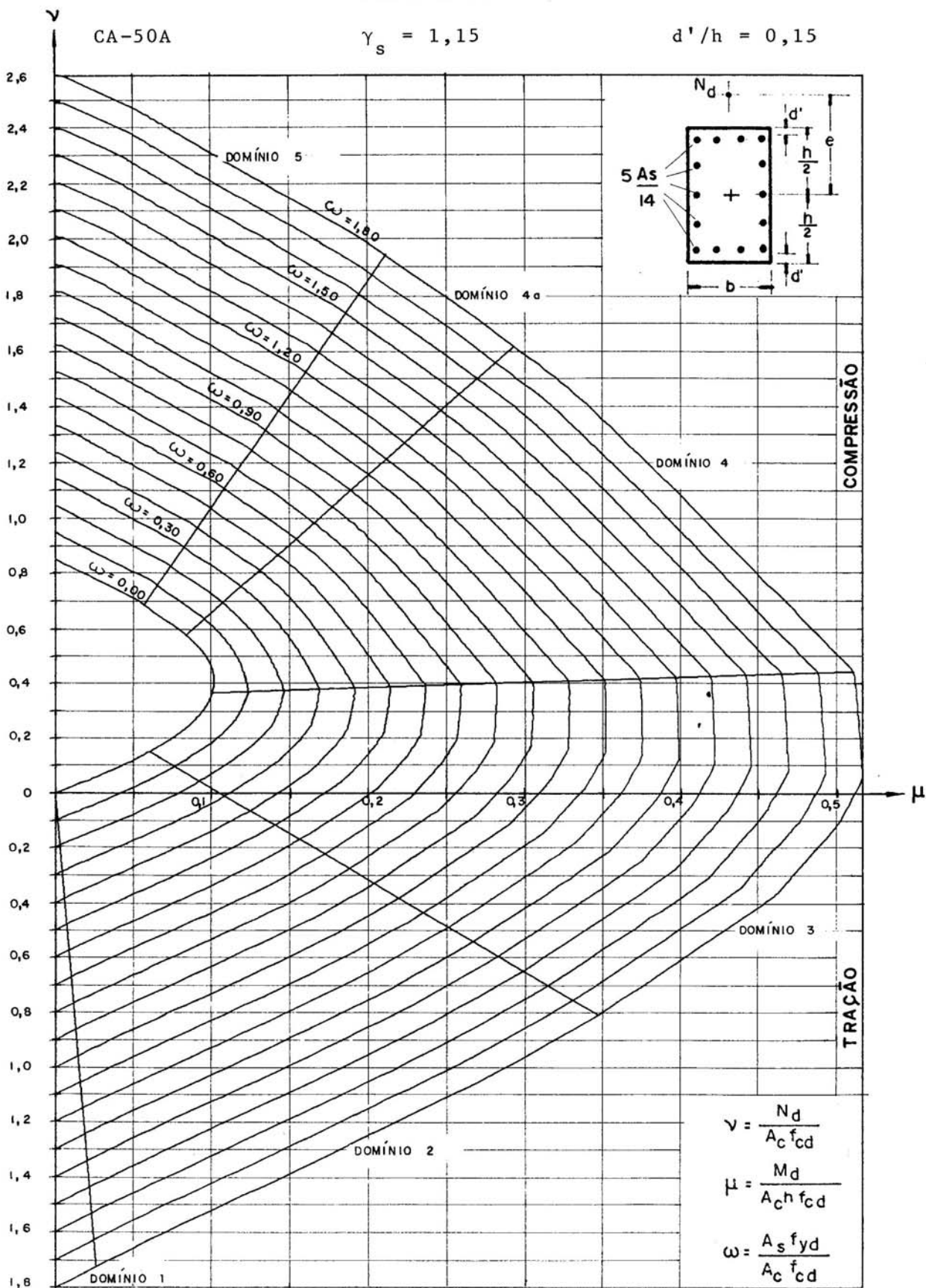


ÁBACO A-54

CA-50A

$\gamma_s = 1,15$

$d'/h = 0,15$

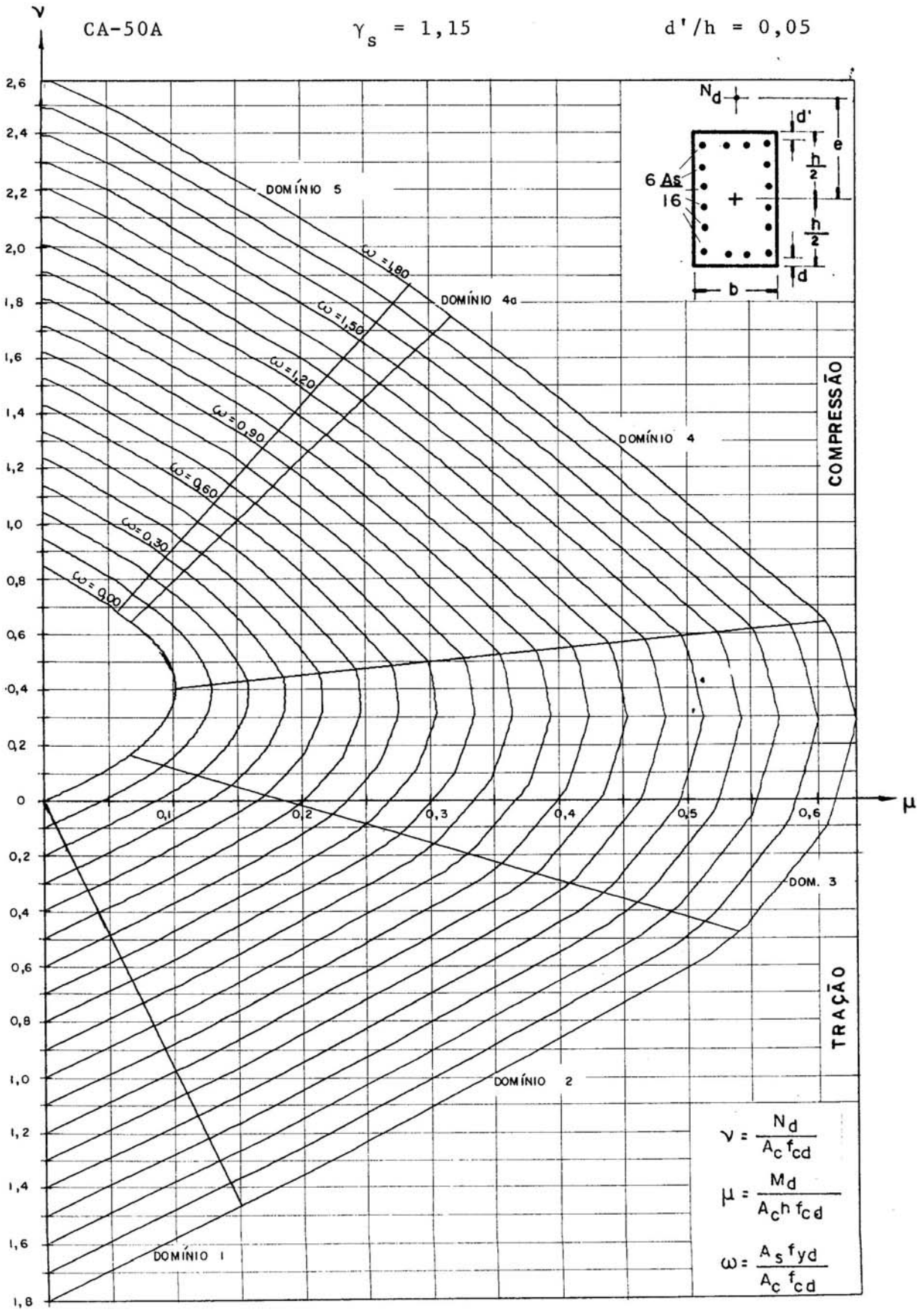


ÁBACO A-55

CA-50A

$\gamma_s = 1,15$

$d'/h = 0,05$



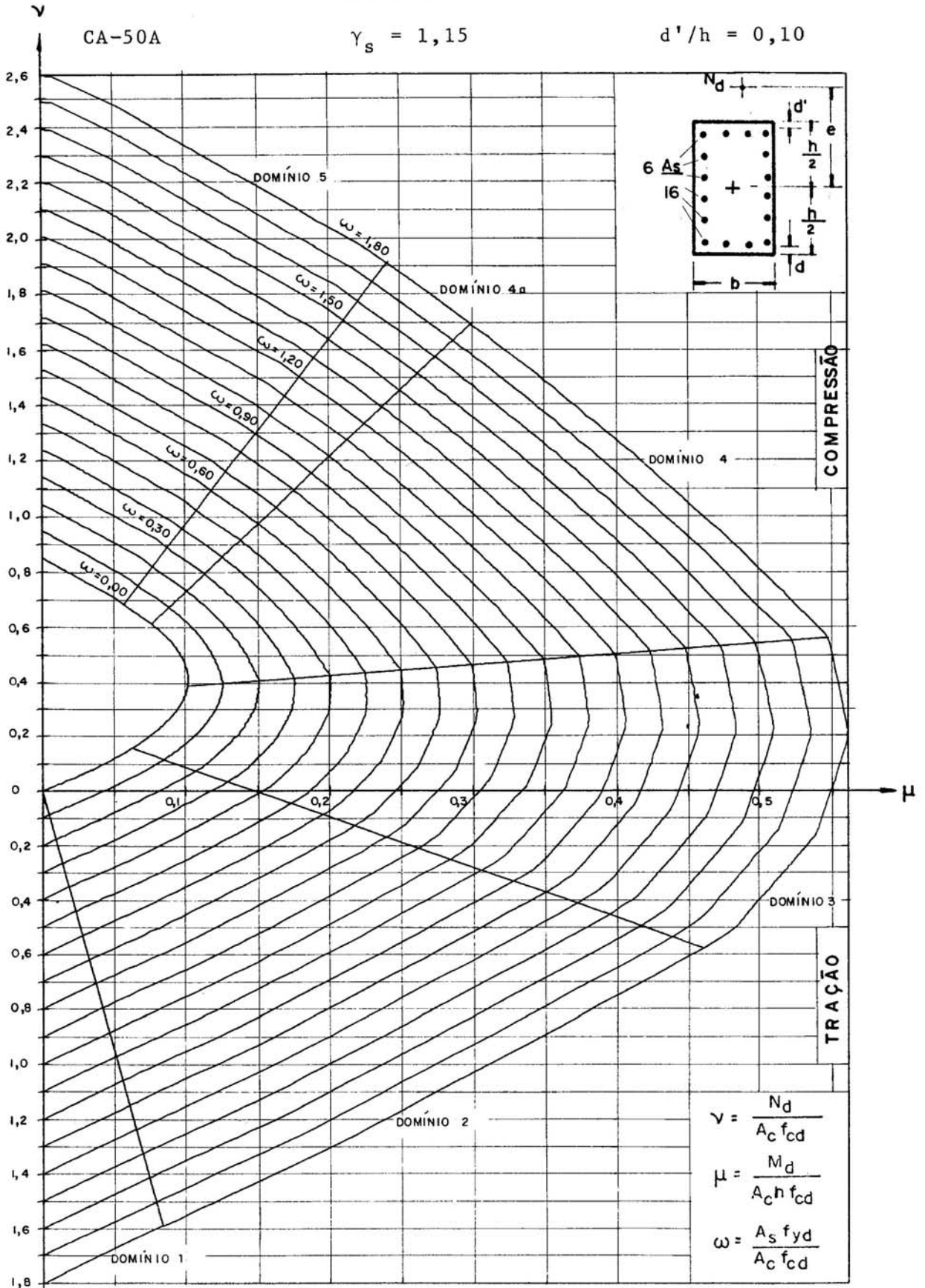


ÁBACO A-56

CA-50A

$\gamma_s = 1,15$

$d'/h = 0,10$

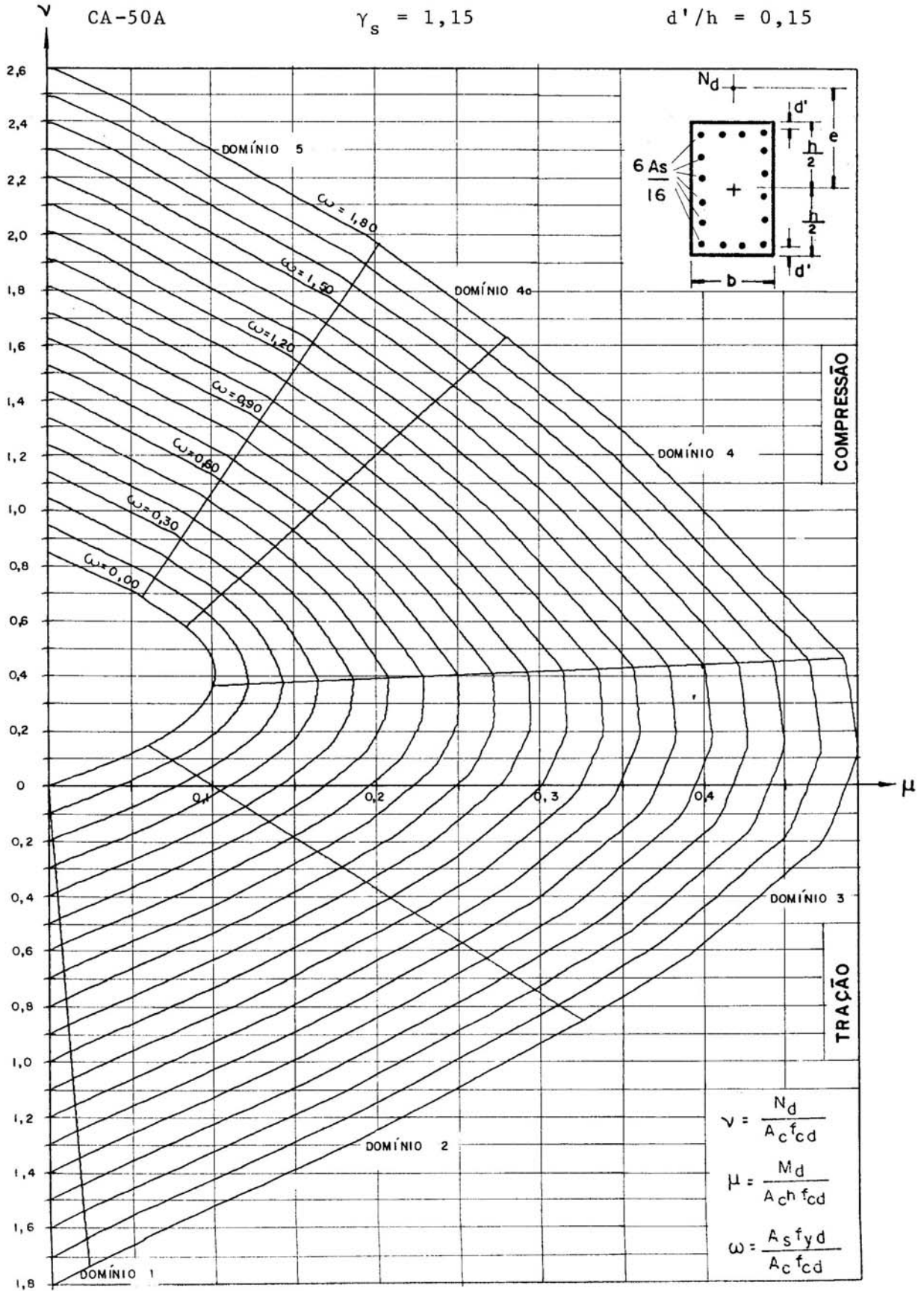


ÁBACO A-57

CA-50A

$\gamma_s = 1,15$

$d'/h = 0,15$

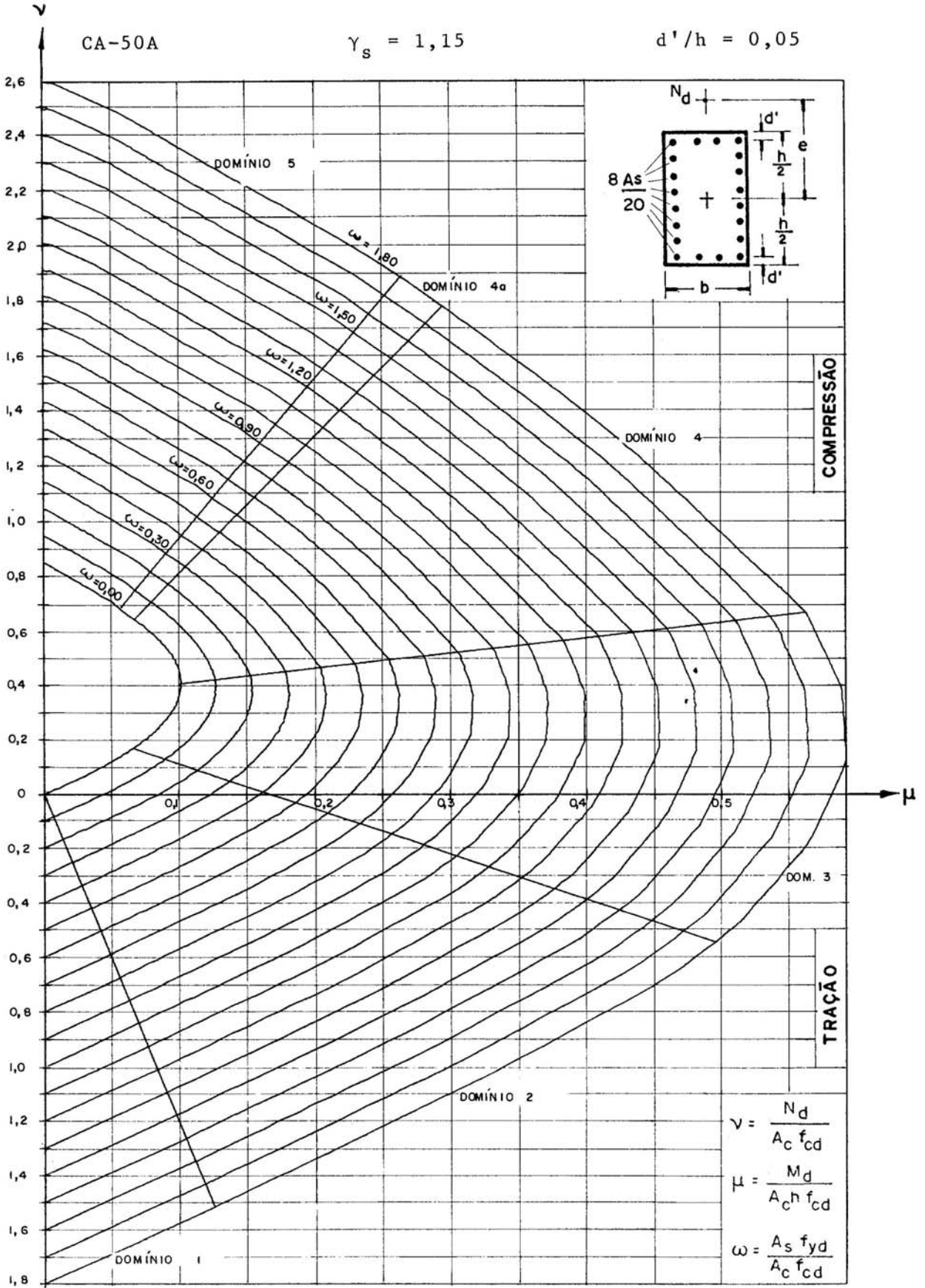


ÁBACO A-58

CA-50A

$\gamma_s = 1,15$

$d'/h = 0,05$



$$\nu = \frac{N_d}{A_c f_{cd}}$$

$$\mu = \frac{M_d}{A_c h f_{cd}}$$

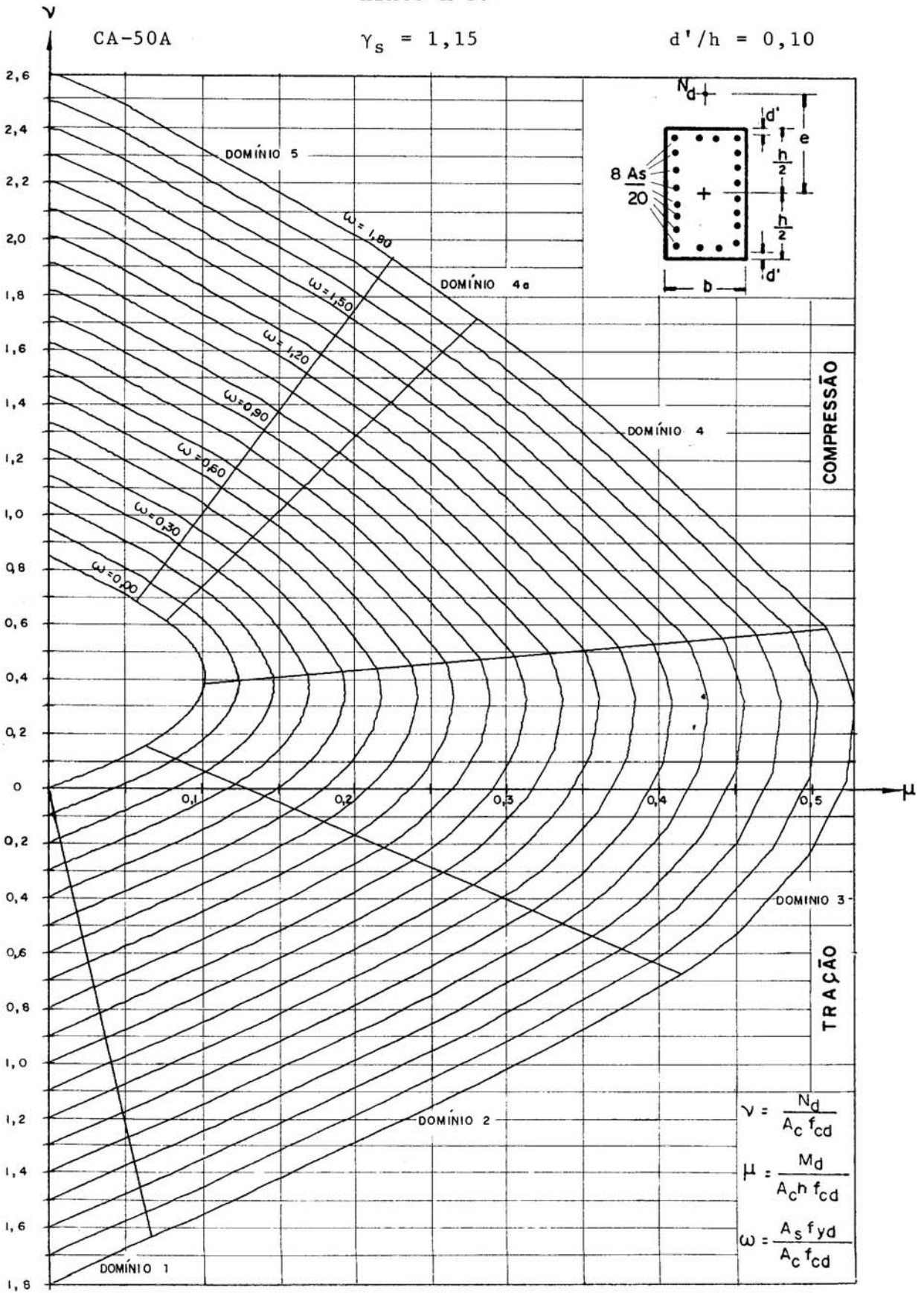
$$\omega = \frac{A_s f_{yd}}{A_c f_{cd}}$$

ÁBACO A-59

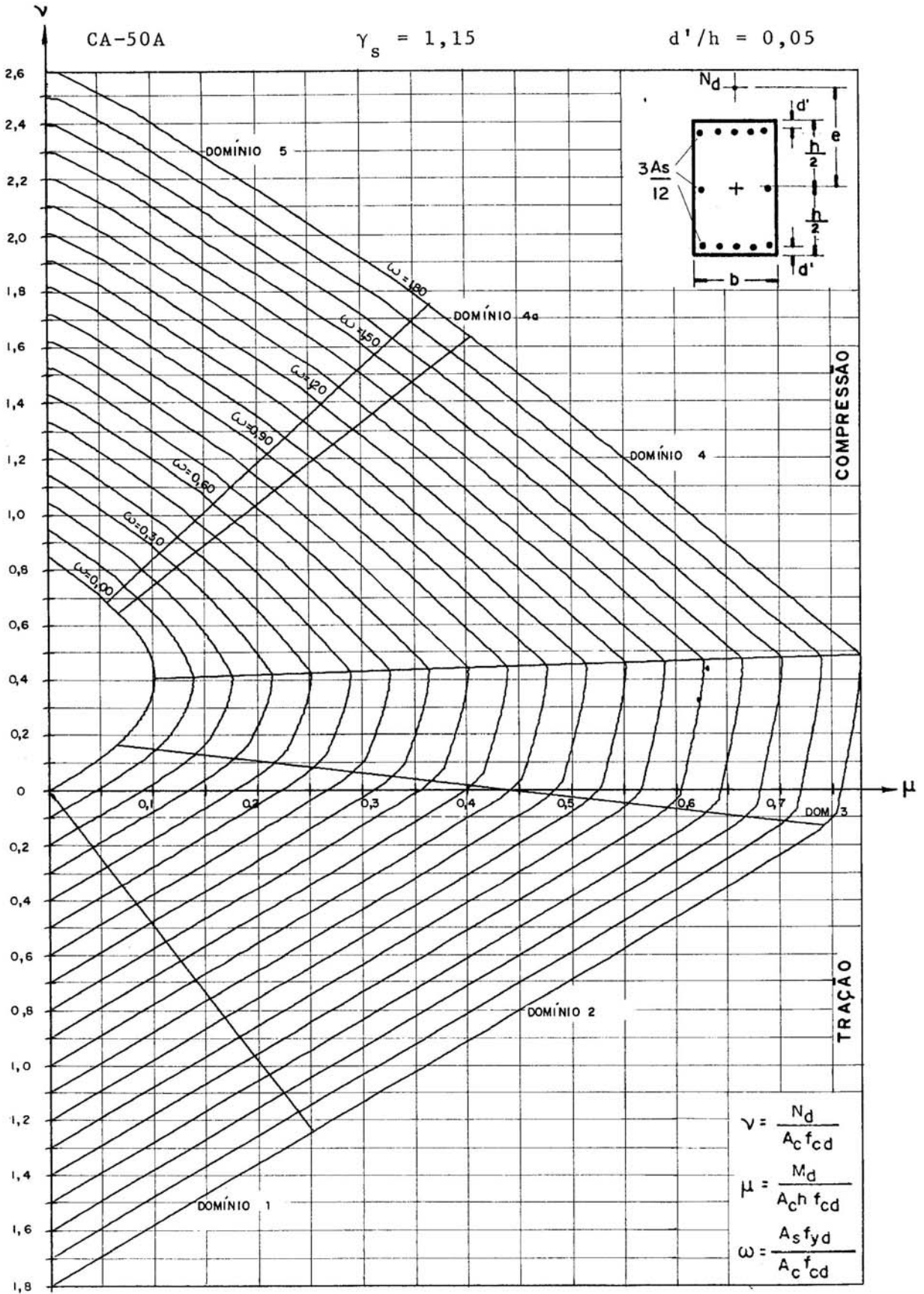
CA-50A

$\gamma_s = 1,15$

$d'/h = 0,10$



ÁBACO A-60



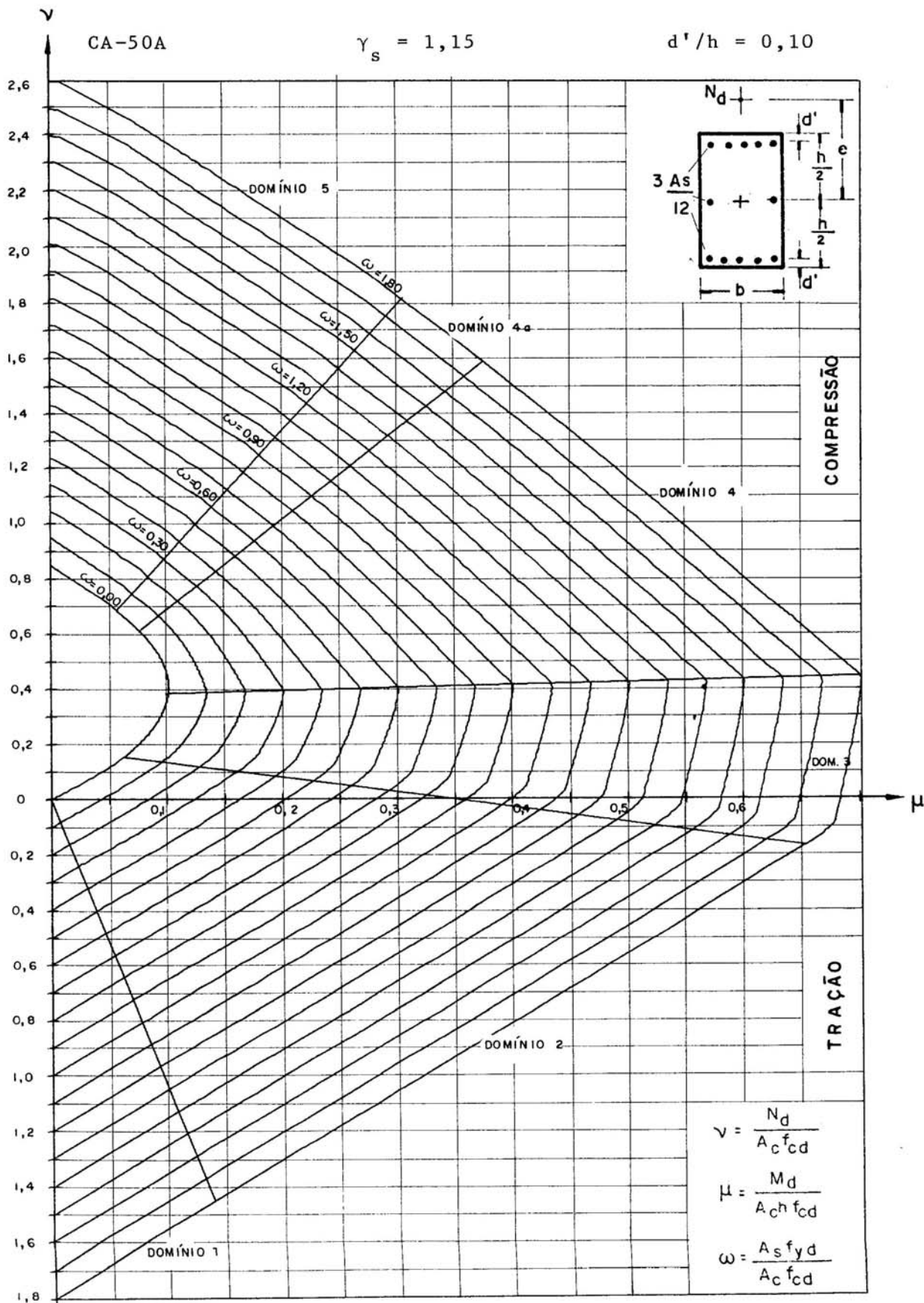


ÁBACO A-61

CA-50A

$\gamma_s = 1,15$

$d'/h = 0,10$

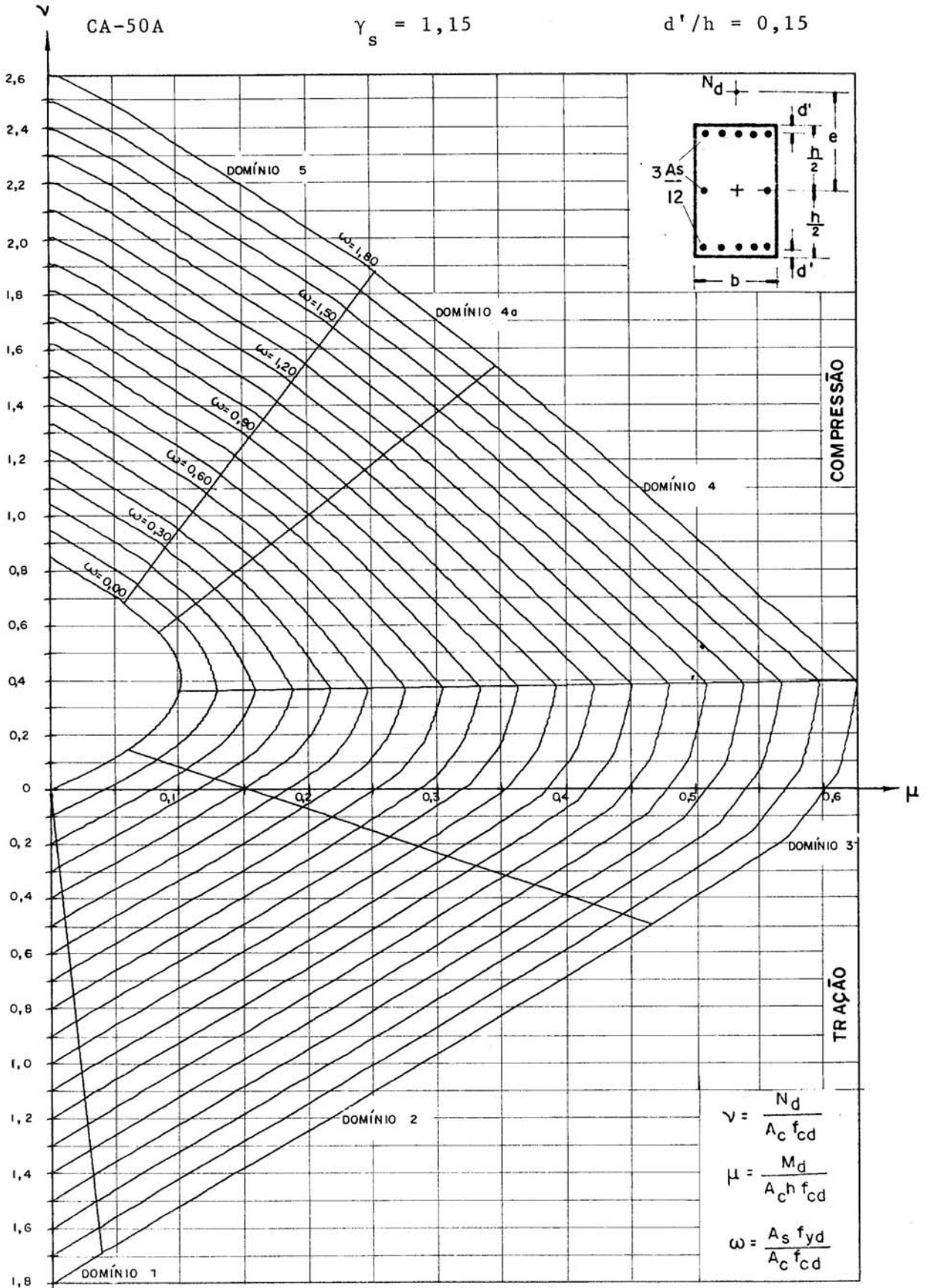


$$\gamma = \frac{N_d}{A_c f_{cd}}$$

$$\mu = \frac{M_d}{A_c h f_{cd}}$$

$$\omega = \frac{A_s f_{yd}}{A_c f_{cd}}$$

ÁBACO A-62

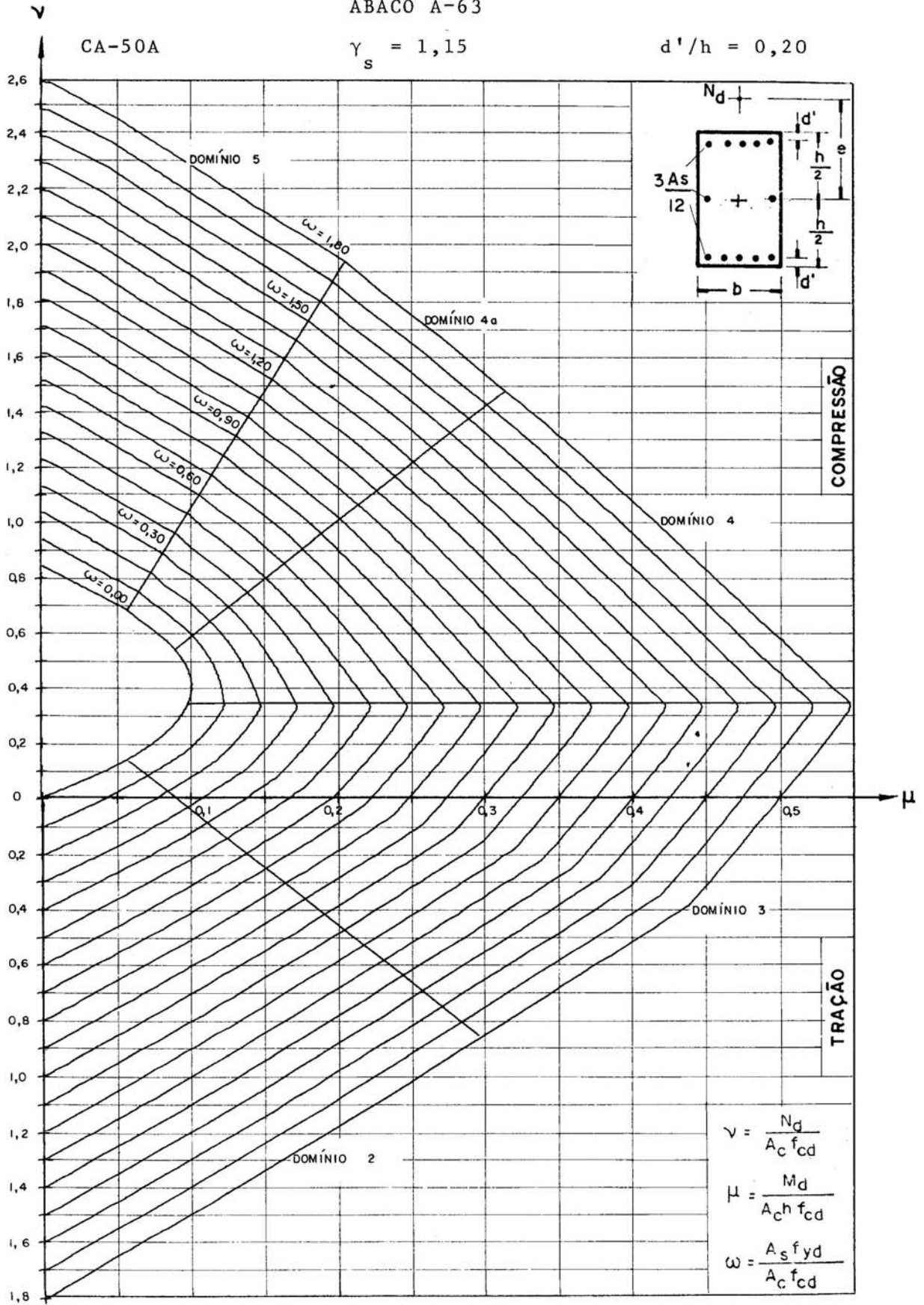


ÁBACO A-63

CA-50A

$\gamma_s = 1,15$

$d'/h = 0,20$



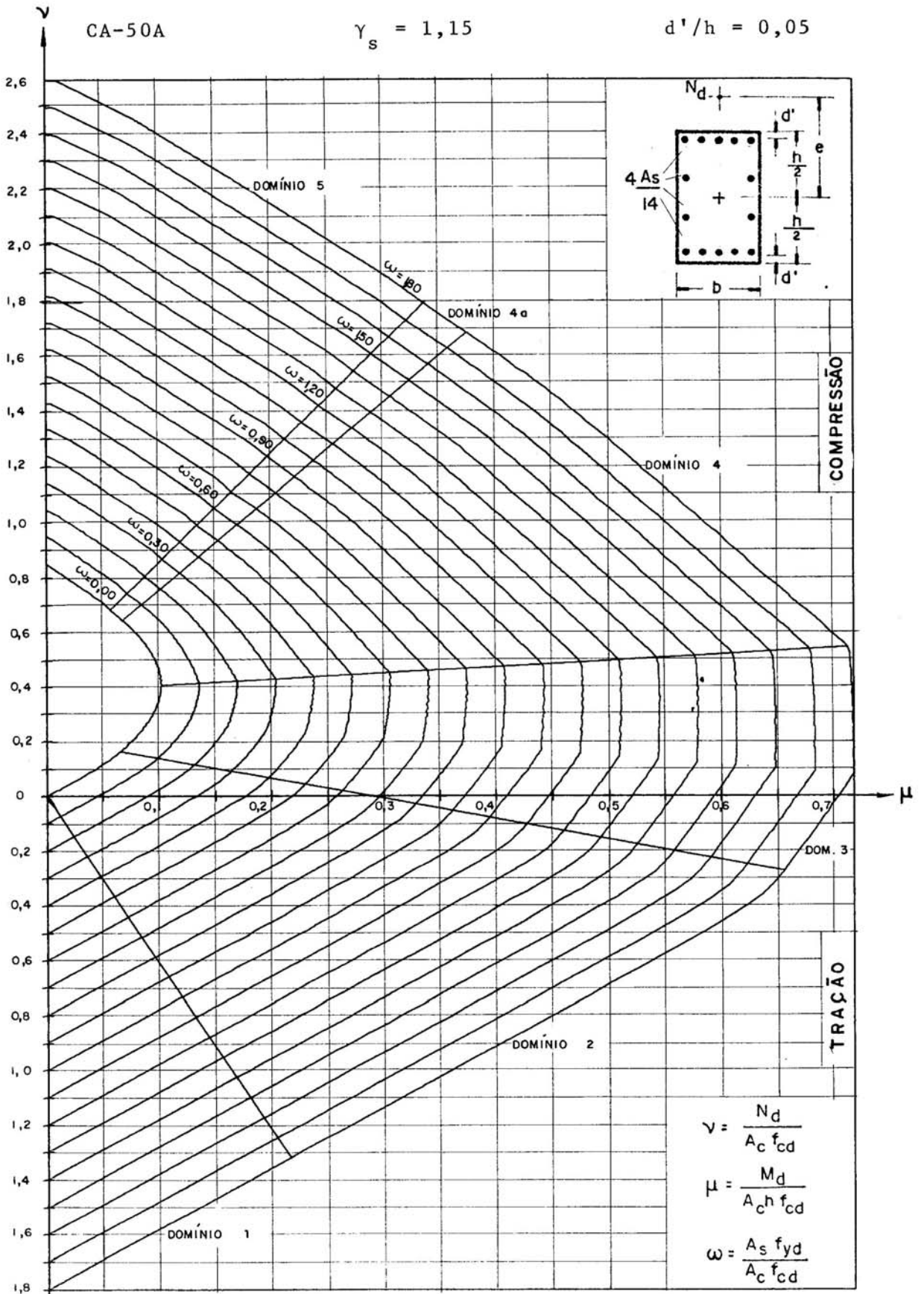


ÁBACO A-64

CA-50A

$\gamma_s = 1,15$

$d'/h = 0,05$

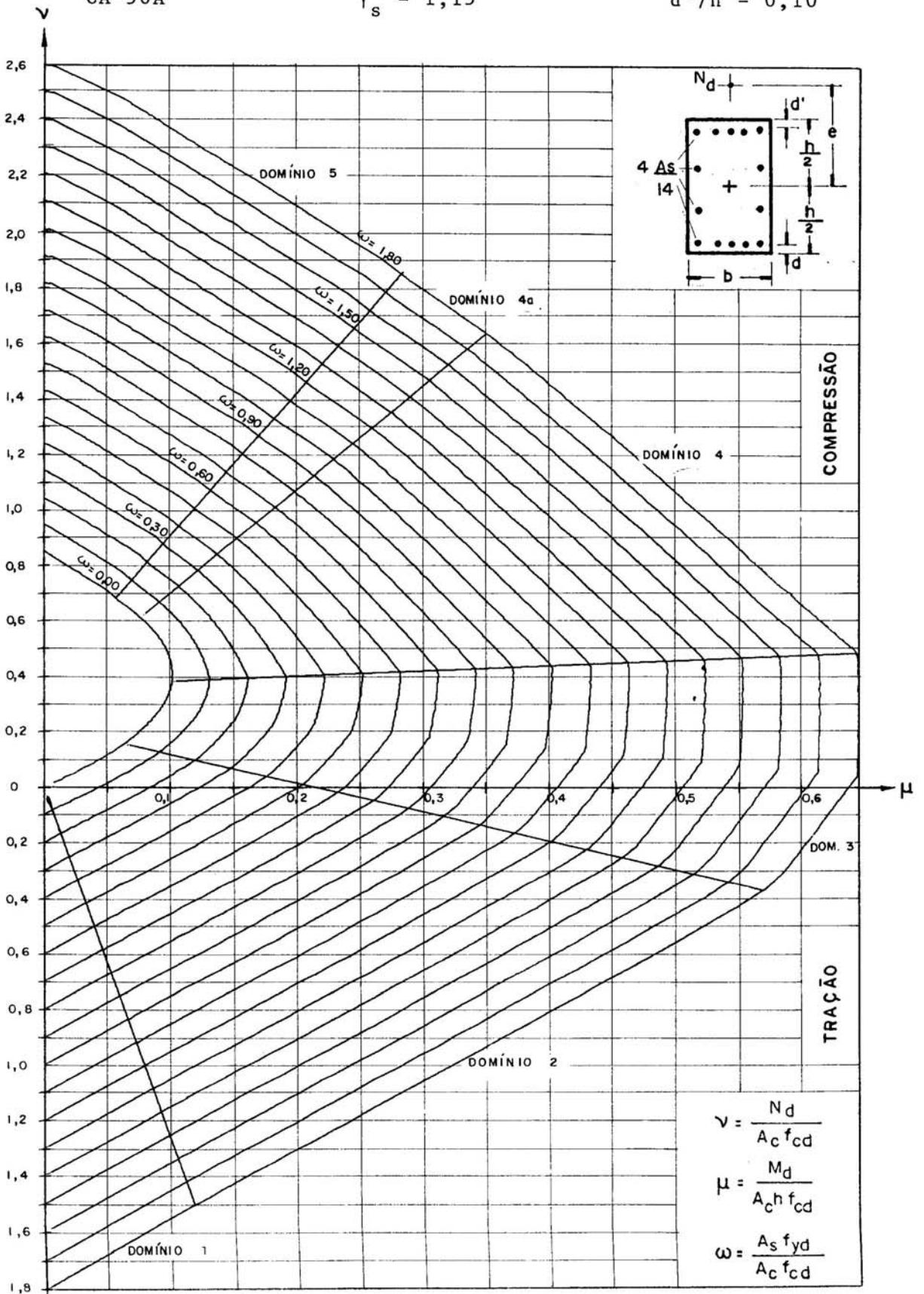


ÁBACO A-65

CA-50A

$\gamma_s = 1,15$

$d'/h = 0,10$

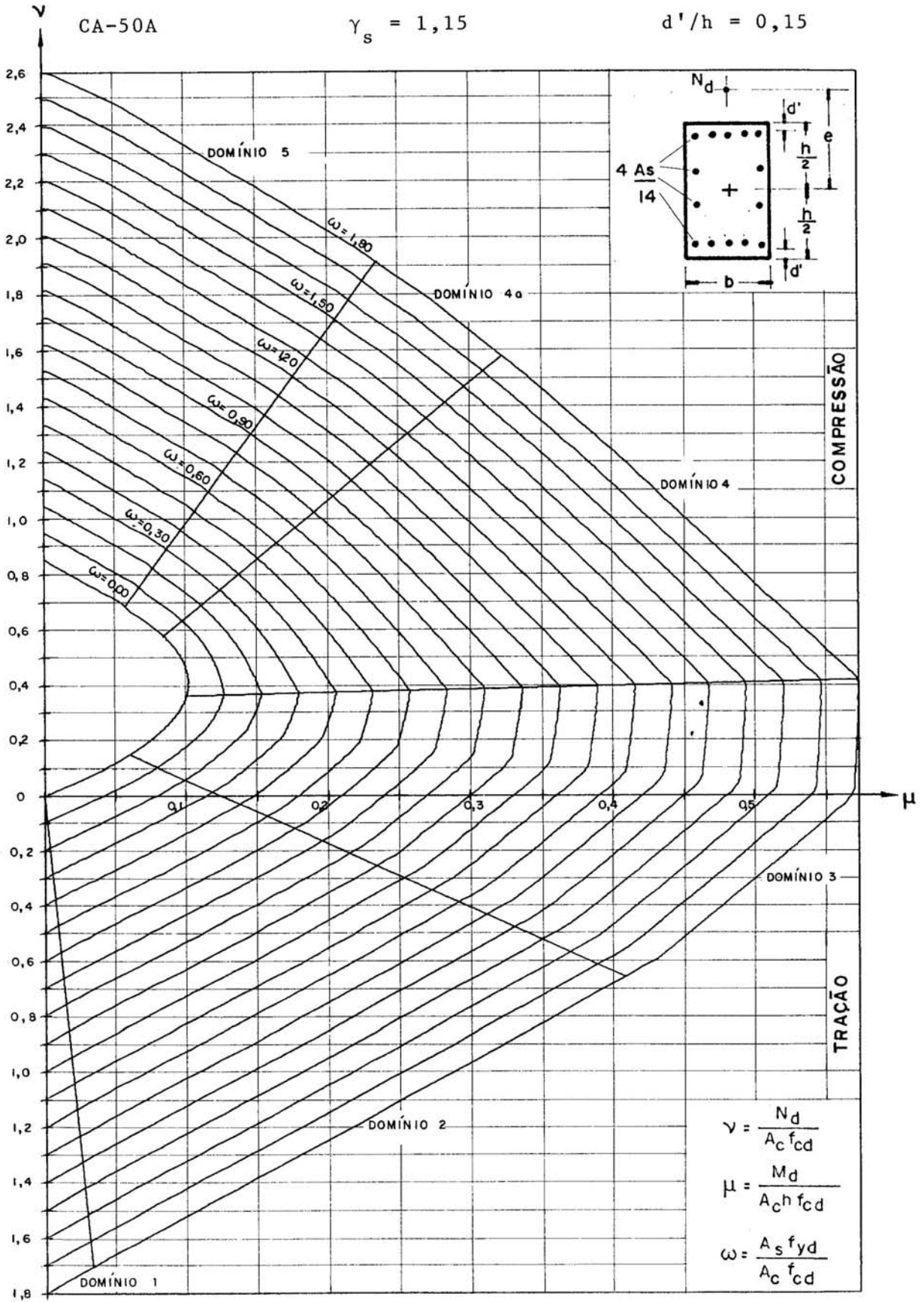


ÁBACO A-66

CA-50A

$\gamma_s = 1,15$

$d'/h = 0,15$

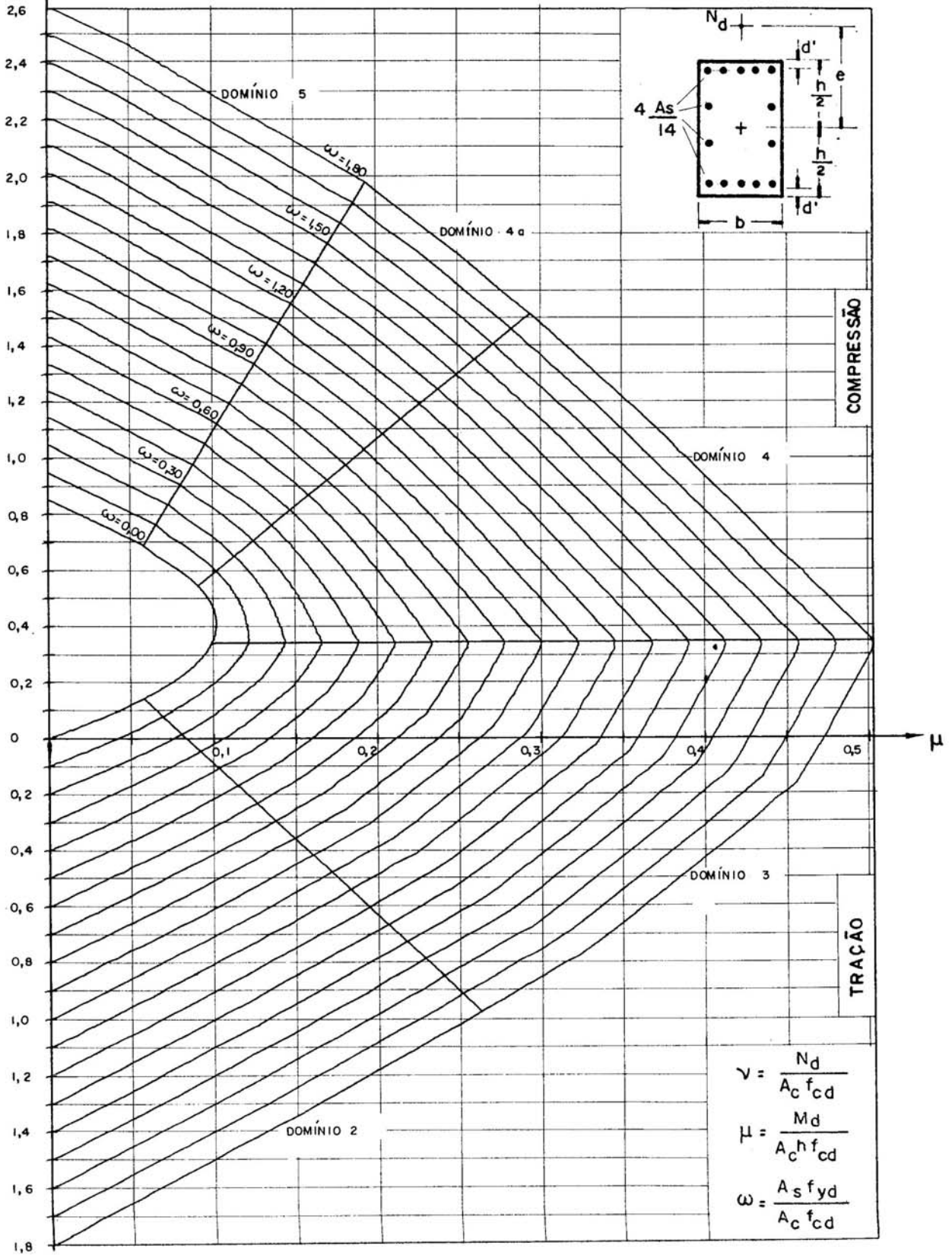


ÁBACO A-67

CA-50A

$\gamma_s = 1,15$

$d'/h = 0,20$

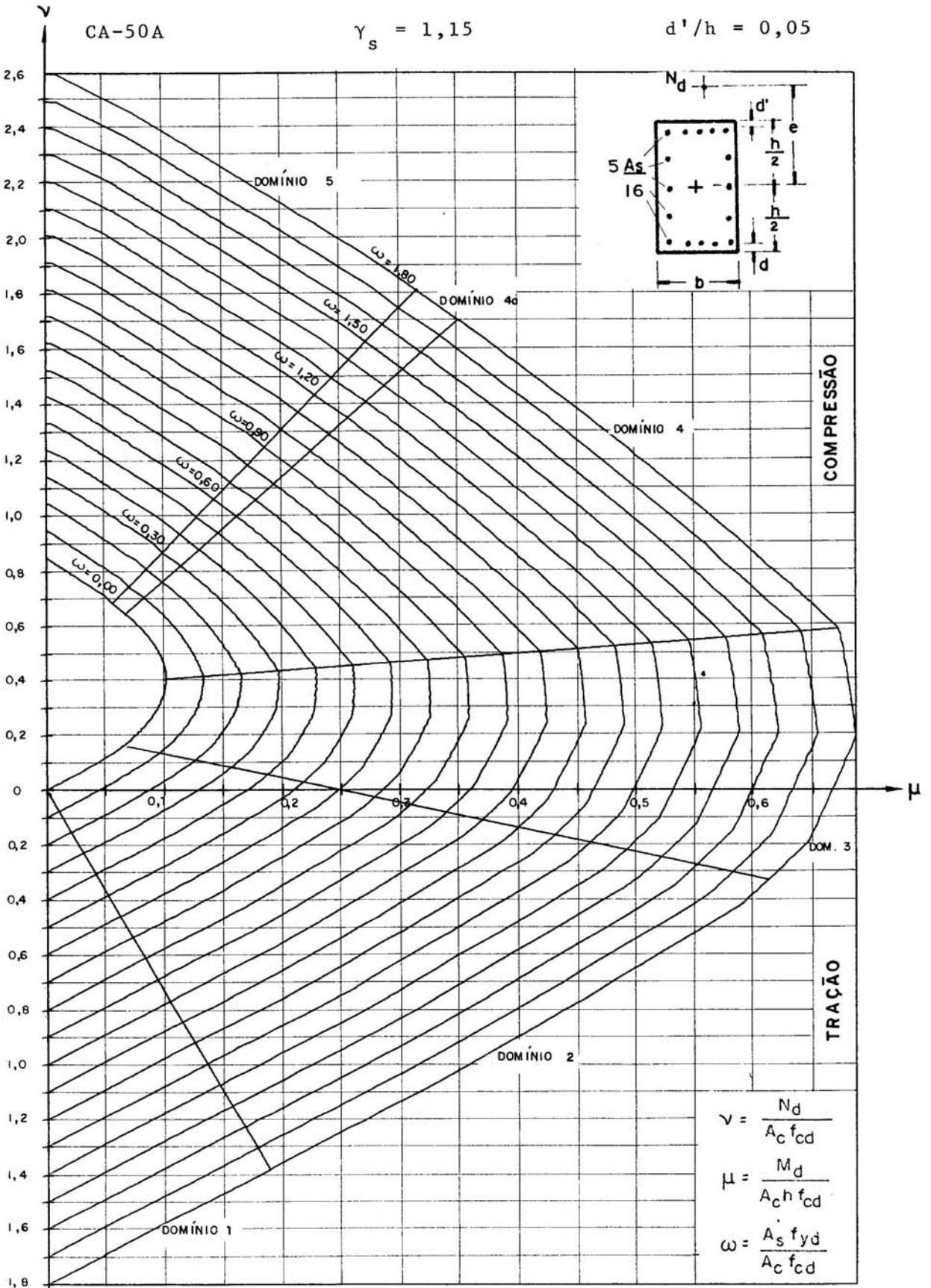


$$\nu = \frac{N_d}{A_c f_{cd}}$$

$$\mu = \frac{M_d}{A_c h f_{cd}}$$

$$\omega = \frac{A_s f_{yd}}{A_c f_{cd}}$$

ÁBACO A-68



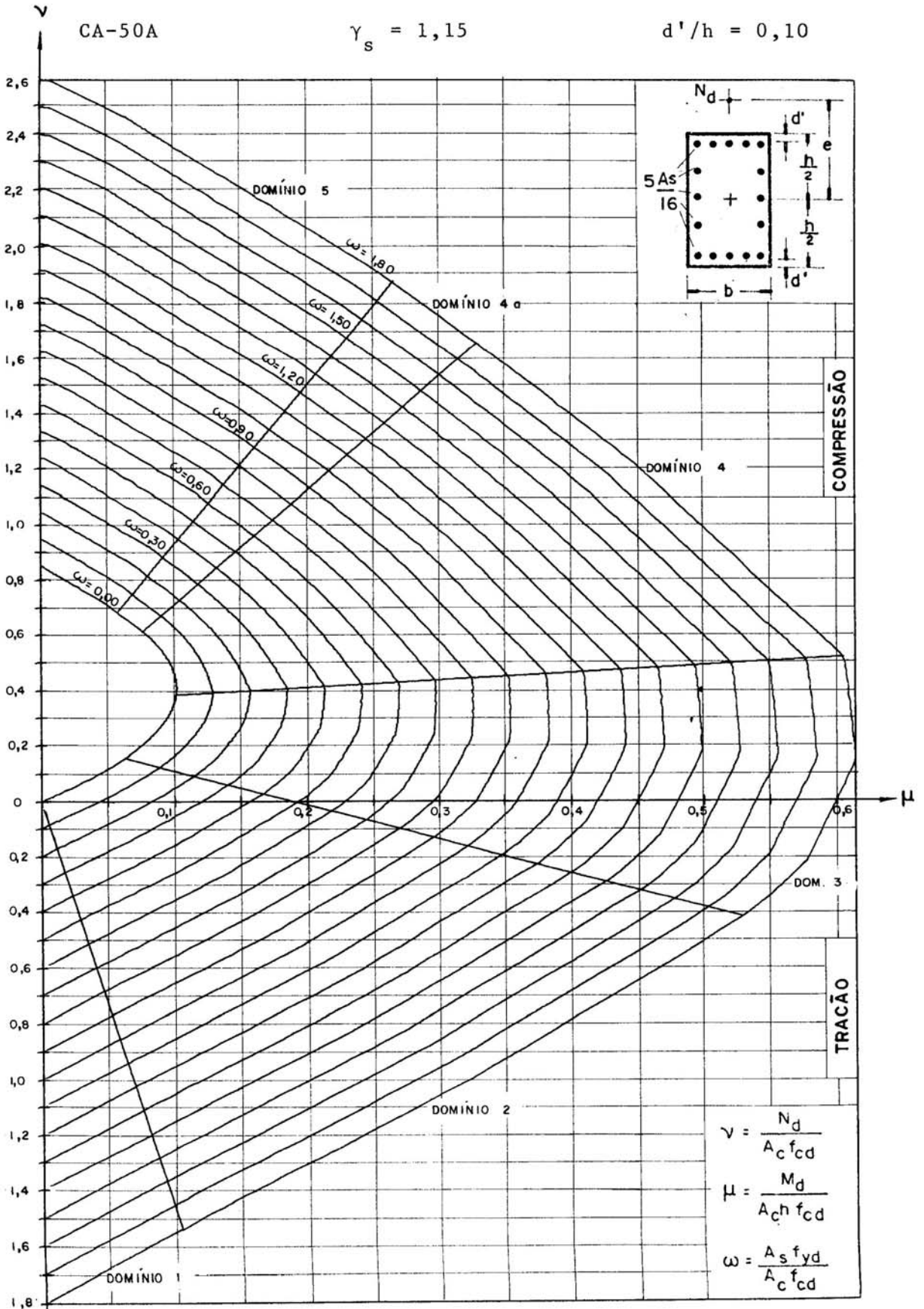


ÁBACO A-69

CA-50A

$\gamma_s = 1,15$

$d'/h = 0,10$

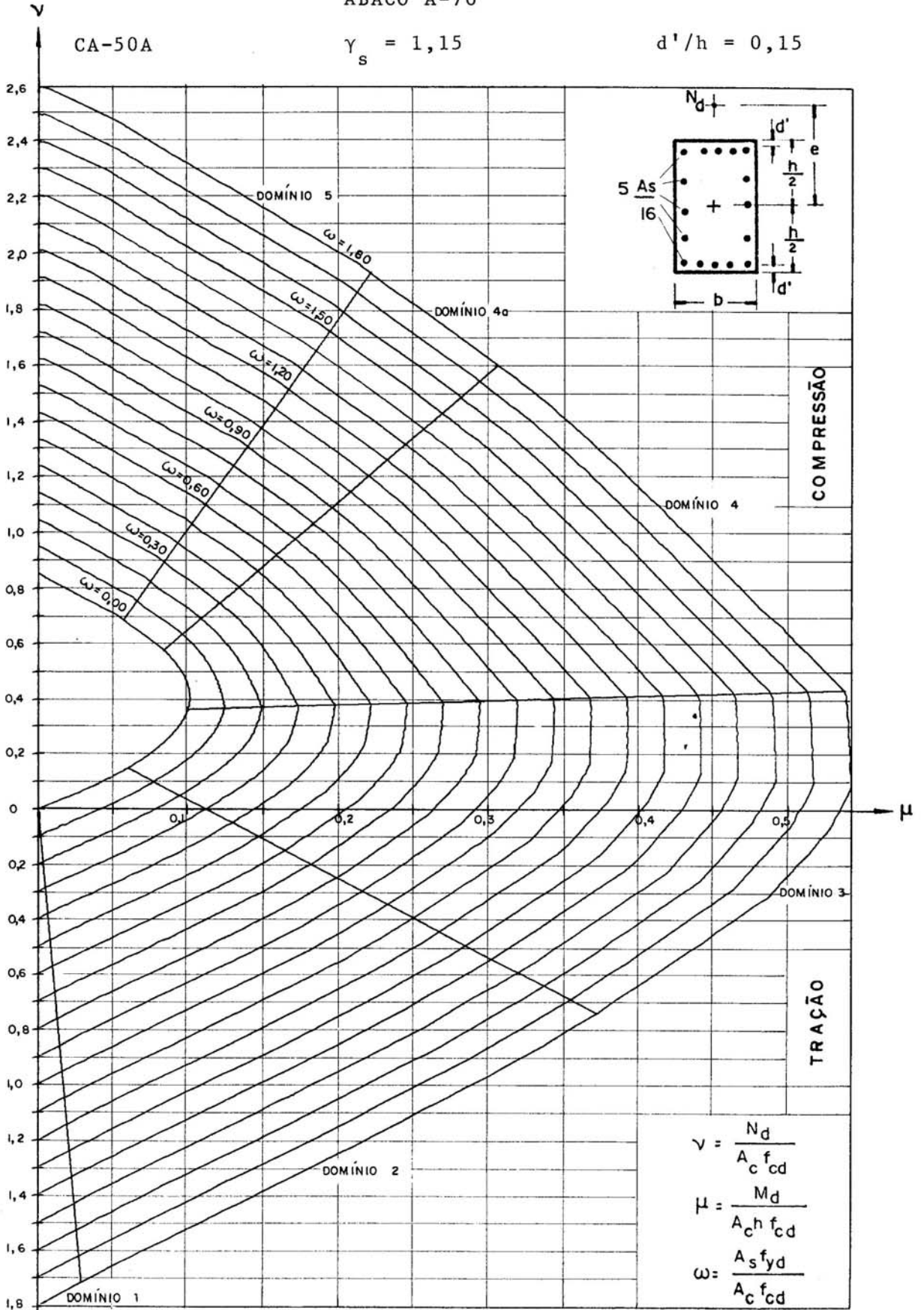


ÁBACO A-70

CA-50A

$\gamma_s = 1,15$

$d'/h = 0,15$



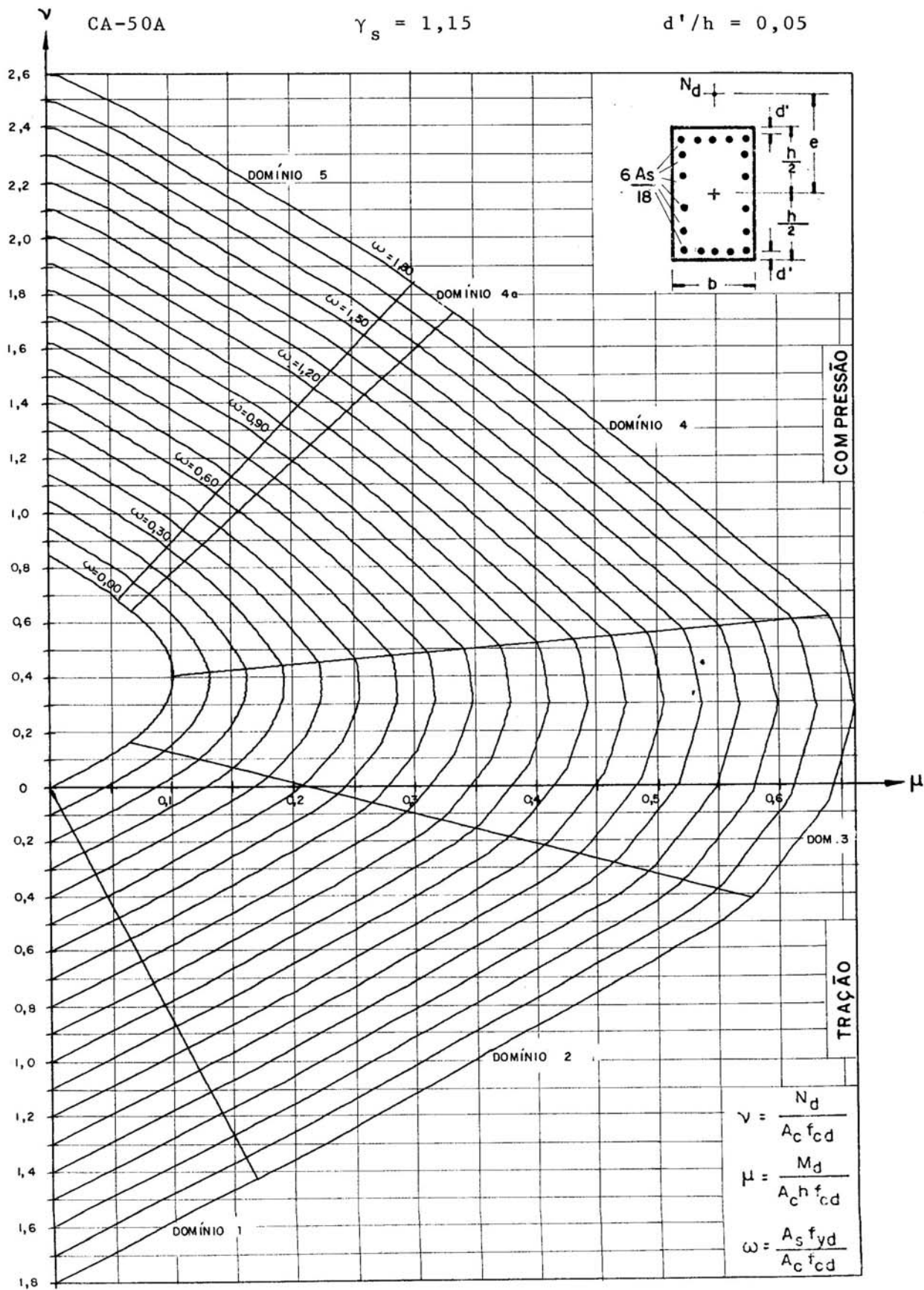


ÁBACO A-71

CA-50A

$\gamma_s = 1,15$

$d'/h = 0,05$

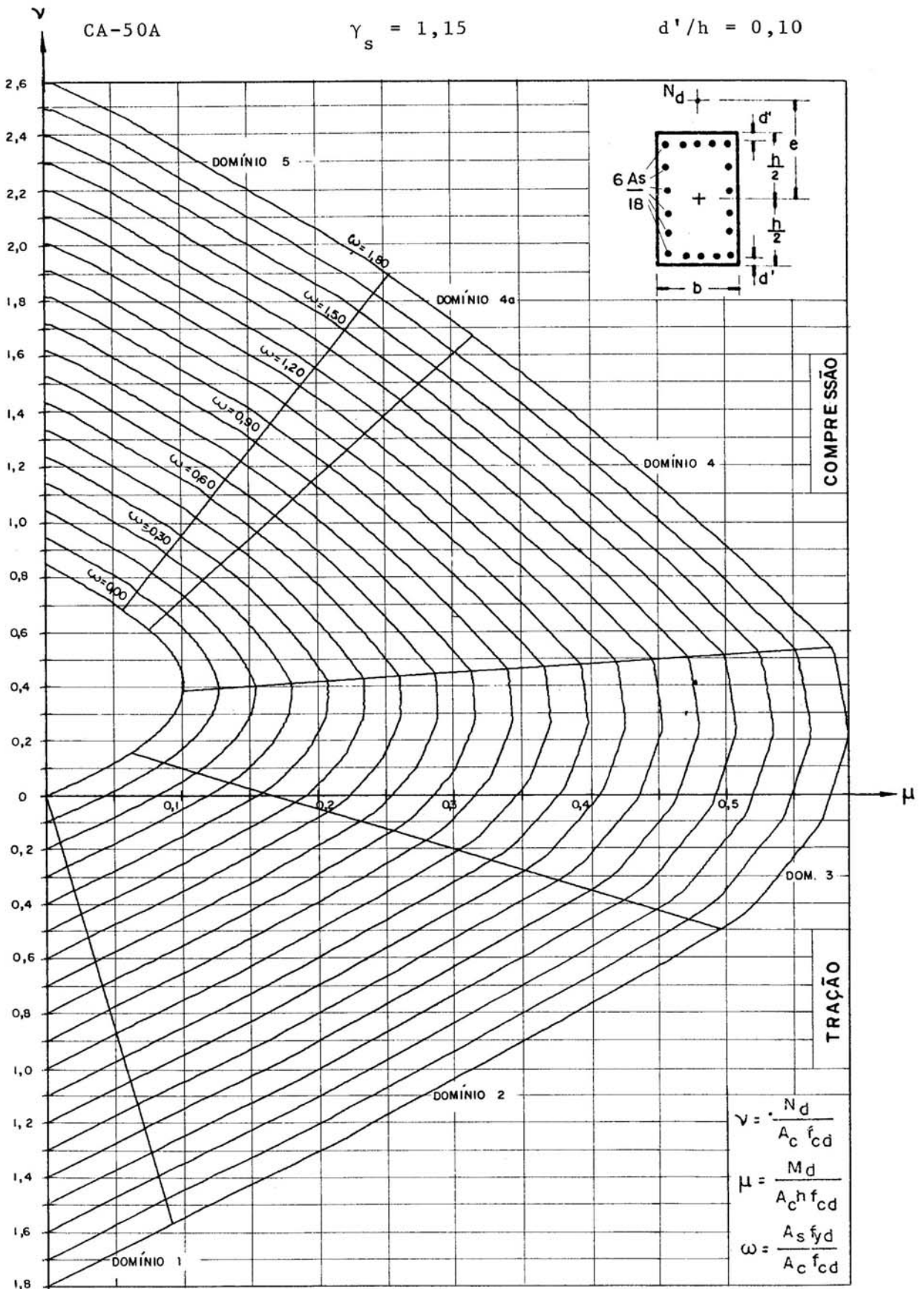


ÁBACO A-72

CA-50A

$\gamma_s = 1,15$

$d'/h = 0,10$

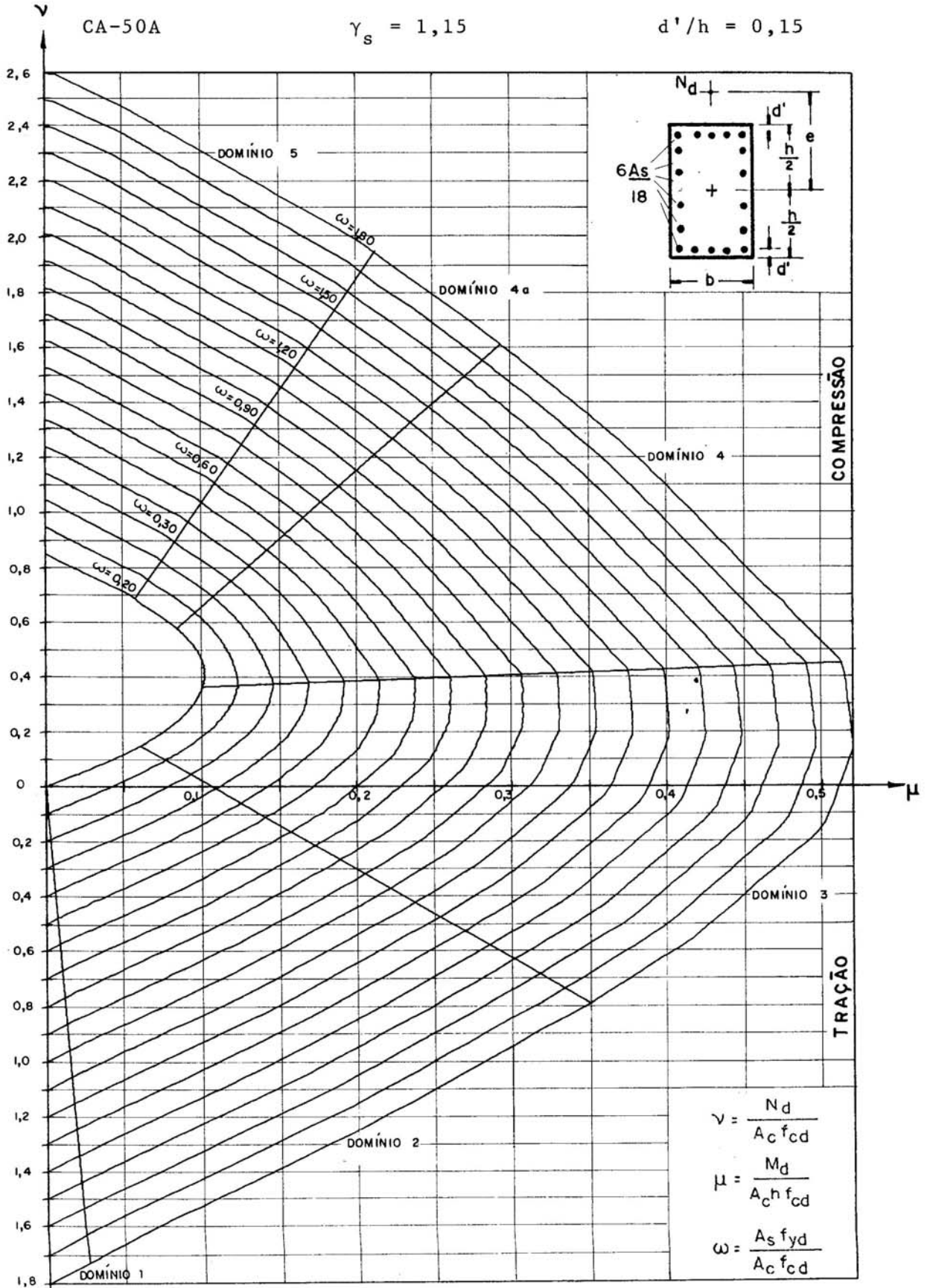


ÁBACO A-73

CA-50A

$\gamma_s = 1,15$

$d'/h = 0,15$

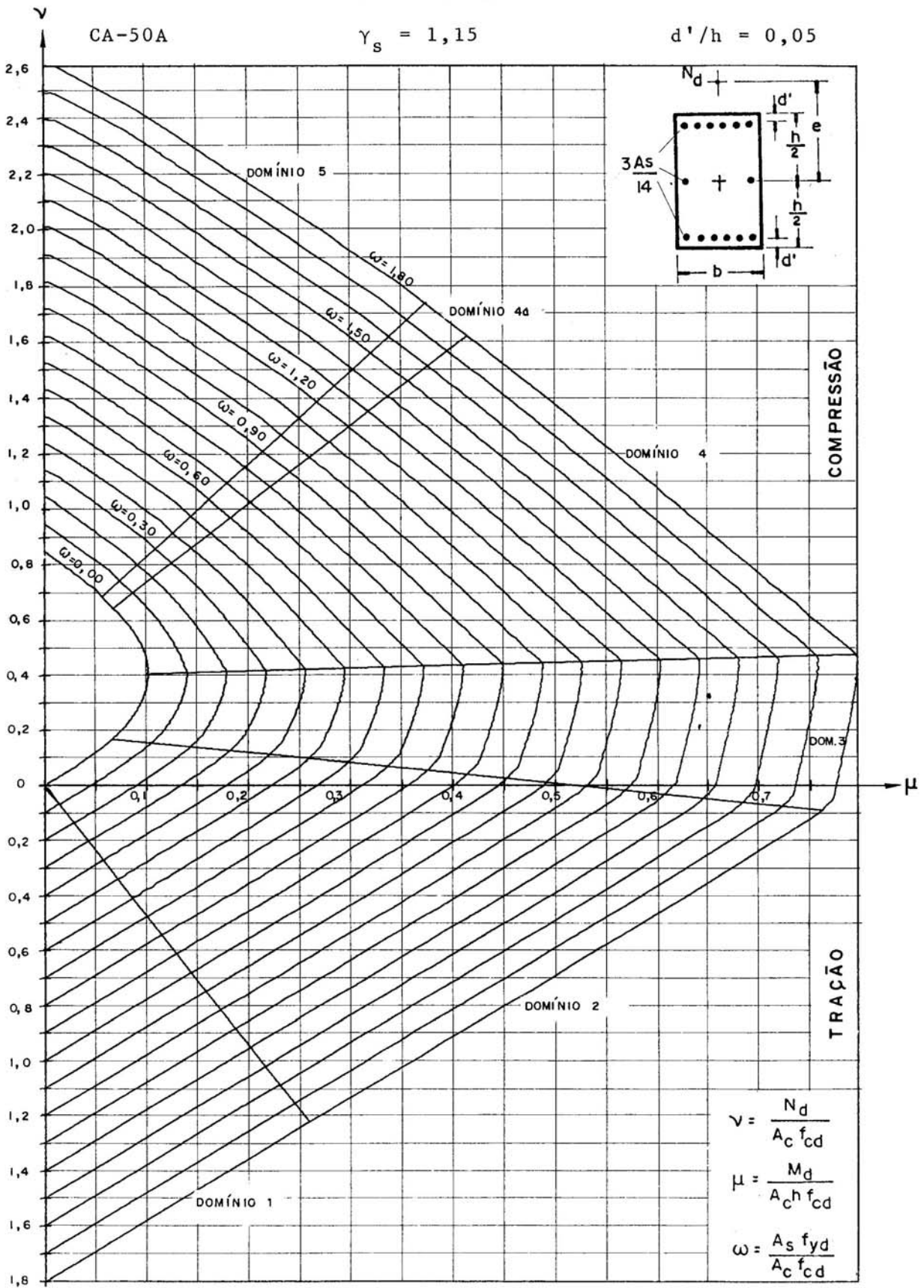


ÁBACO A-74

CA-50A

$\gamma_s = 1,15$

$d'/h = 0,05$



$$v = \frac{N_d}{A_c f_{cd}}$$

$$\mu = \frac{M_d}{A_c h f_{cd}}$$

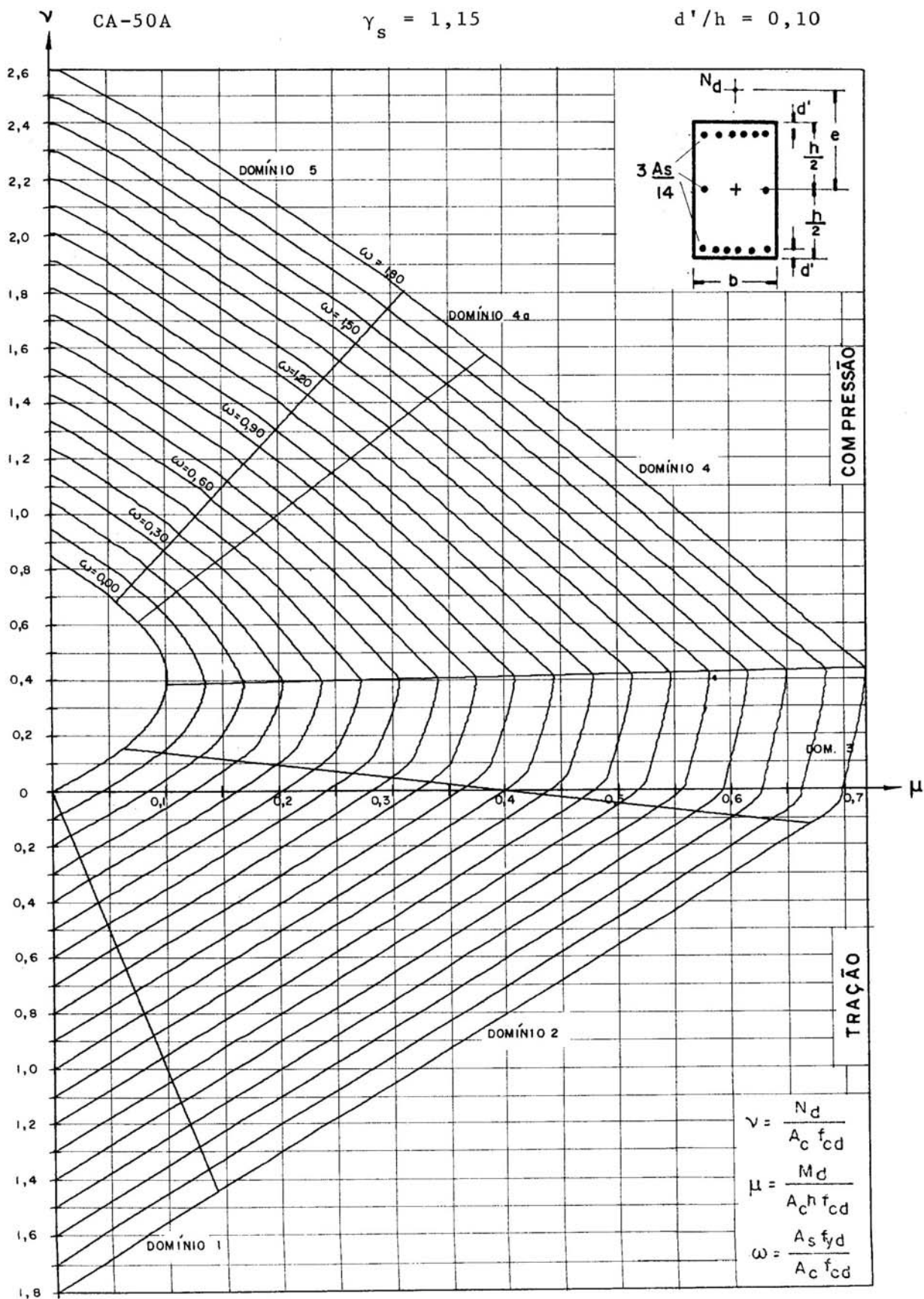
$$\omega = \frac{A_s f_{yd}}{A_c f_{cd}}$$

ÁBACO A-75

CA-50A

$\gamma_s = 1,15$

$d'/h = 0,10$



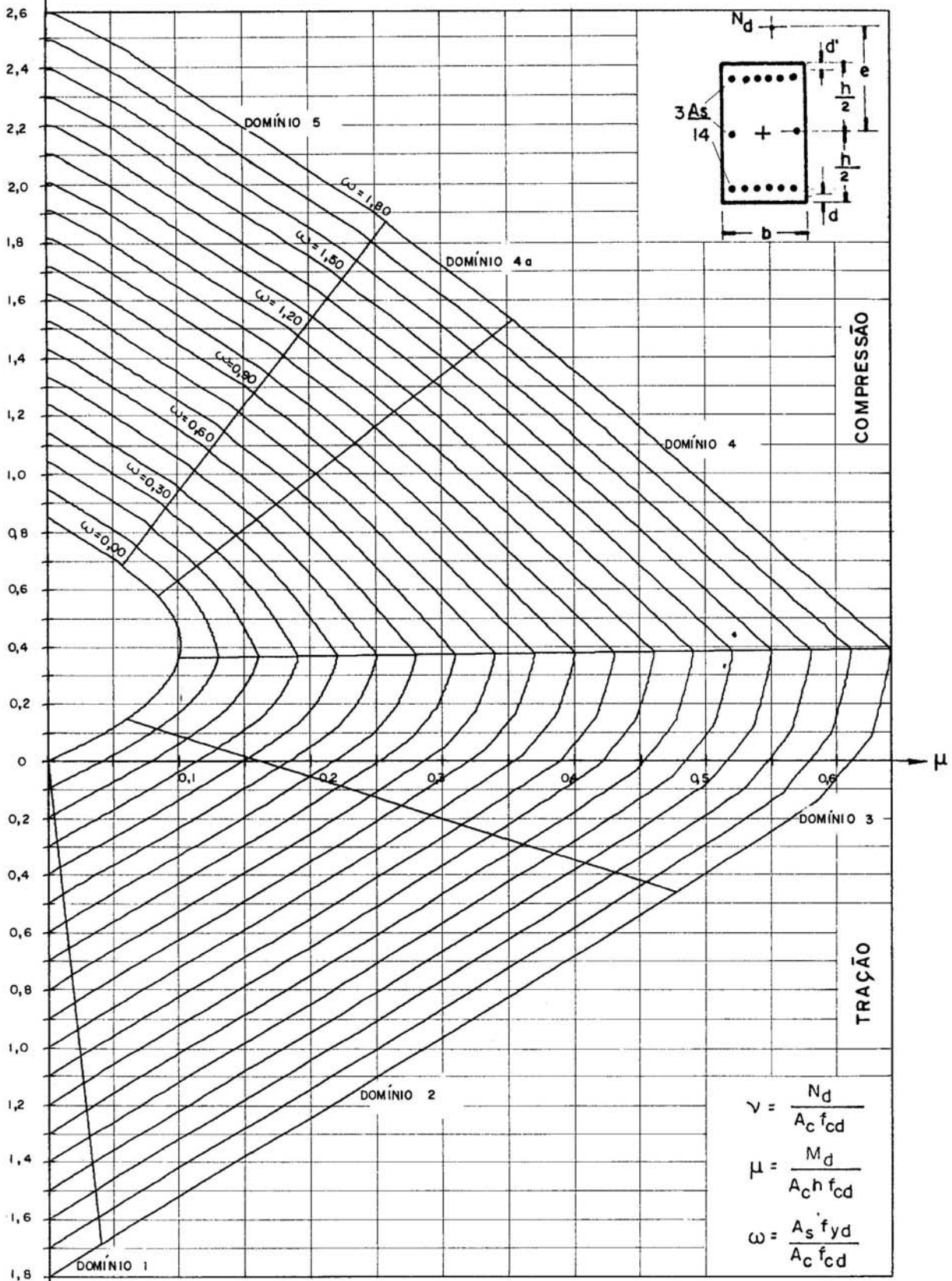


ÁBACO A-76

CA-50A

$\gamma_s = 1,15$

$d'/h = 0,15$



$$\nu = \frac{N_d}{A_c f_{cd}}$$

$$\mu = \frac{M_d}{A_c h f_{cd}}$$

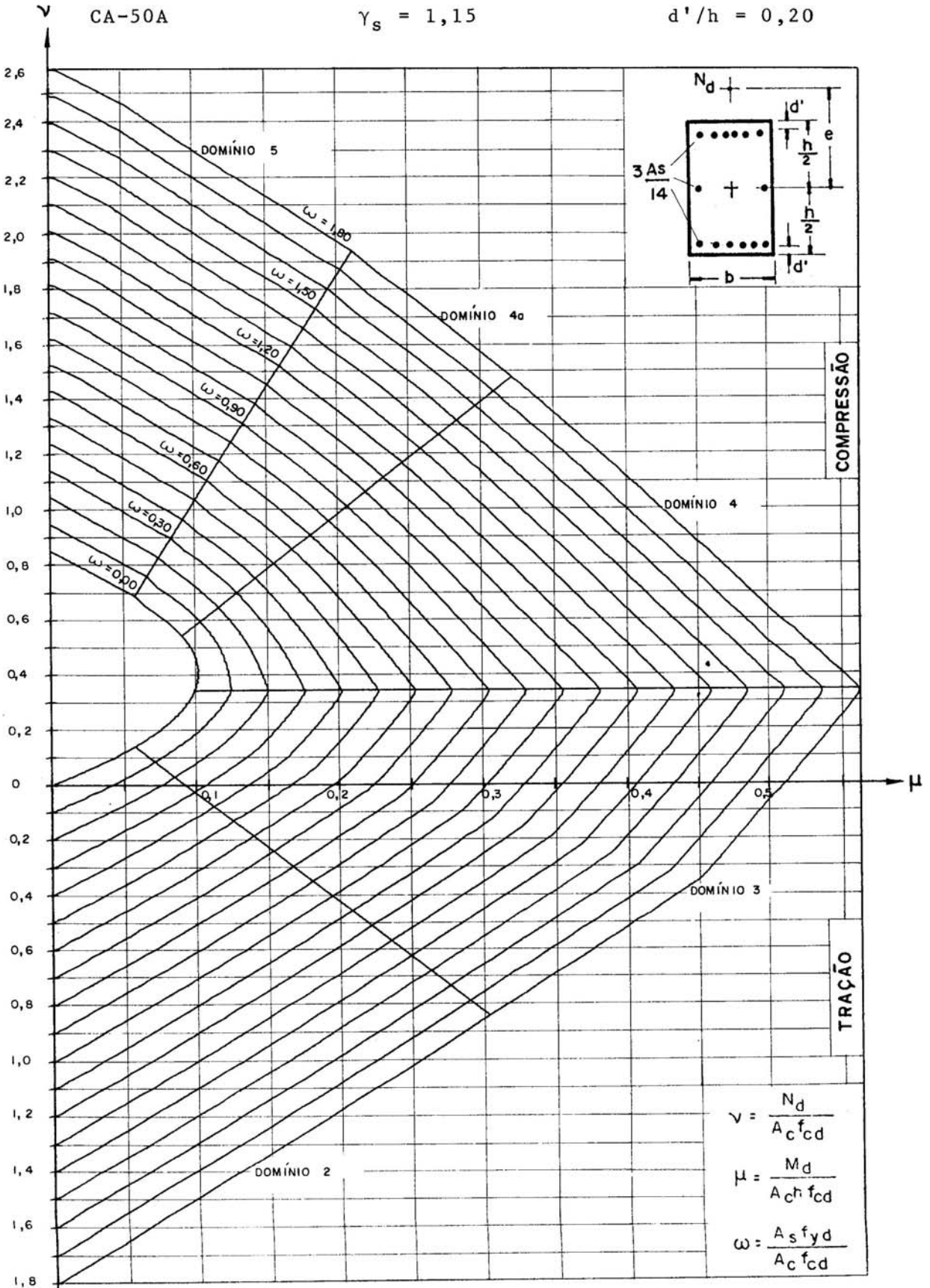
$$\omega = \frac{A_s f_{yd}}{A_c f_{cd}}$$

ÁBACO A-77

CA-50A

$\gamma_s = 1,15$

$d'/h = 0,20$



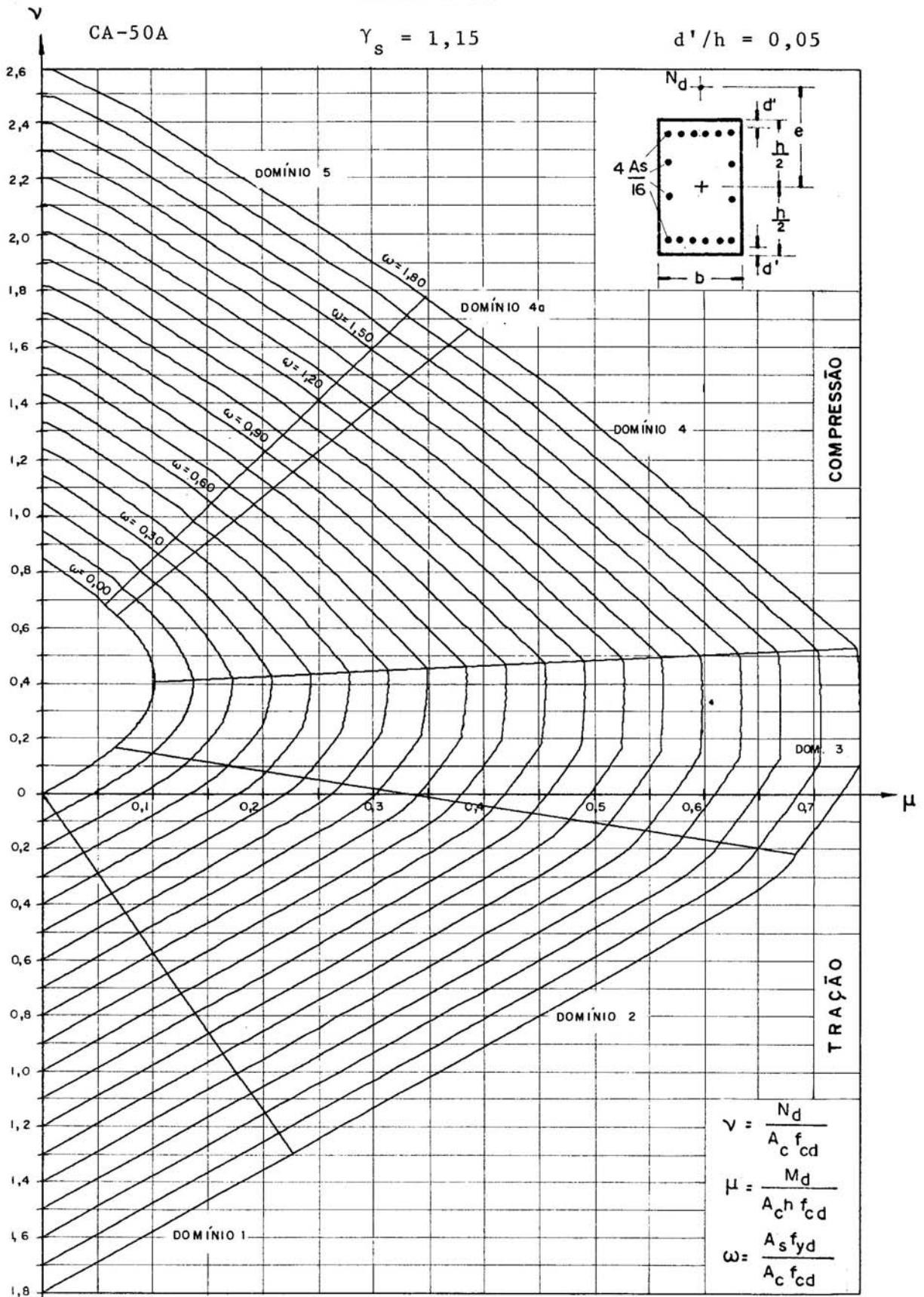


ÁBACO A-78

CA-50A

$\gamma_s = 1,15$

$d'/h = 0,05$

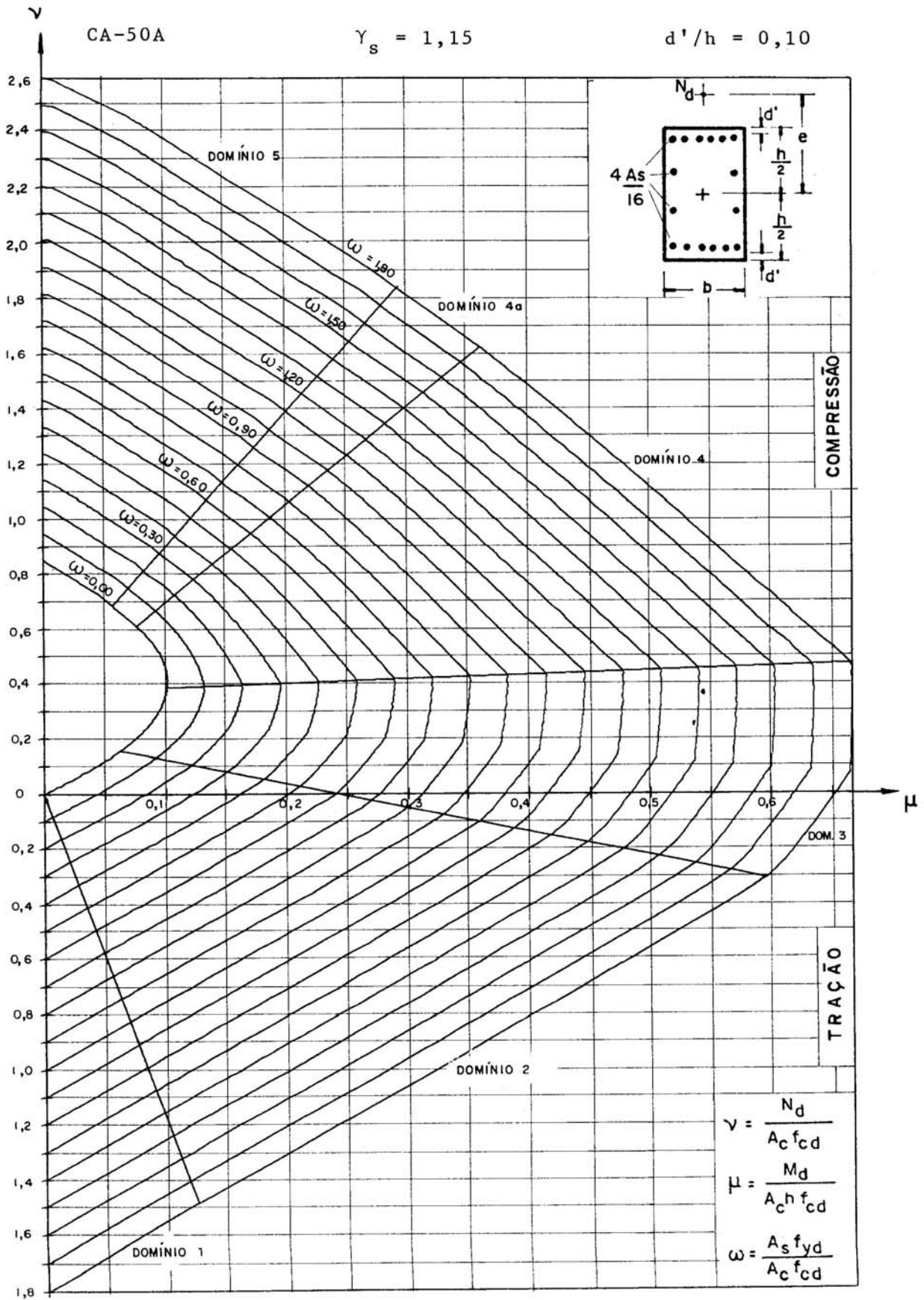


ÁBACO A-79

CA-50A

$\gamma_s = 1,15$

$d'/h = 0,10$

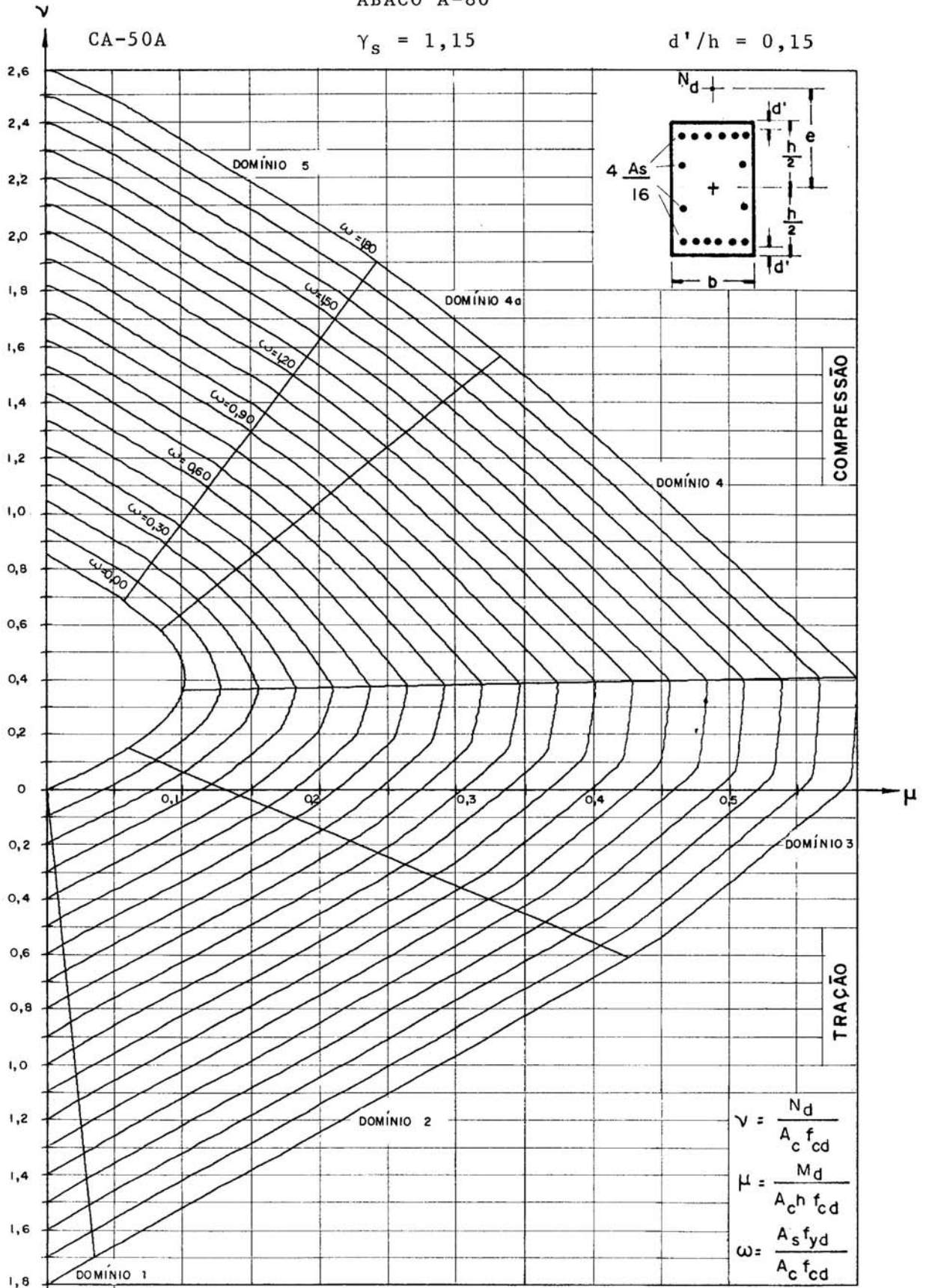


ÁBACO A-80

CA-50A

$\gamma_s = 1,15$

$d'/h = 0,15$

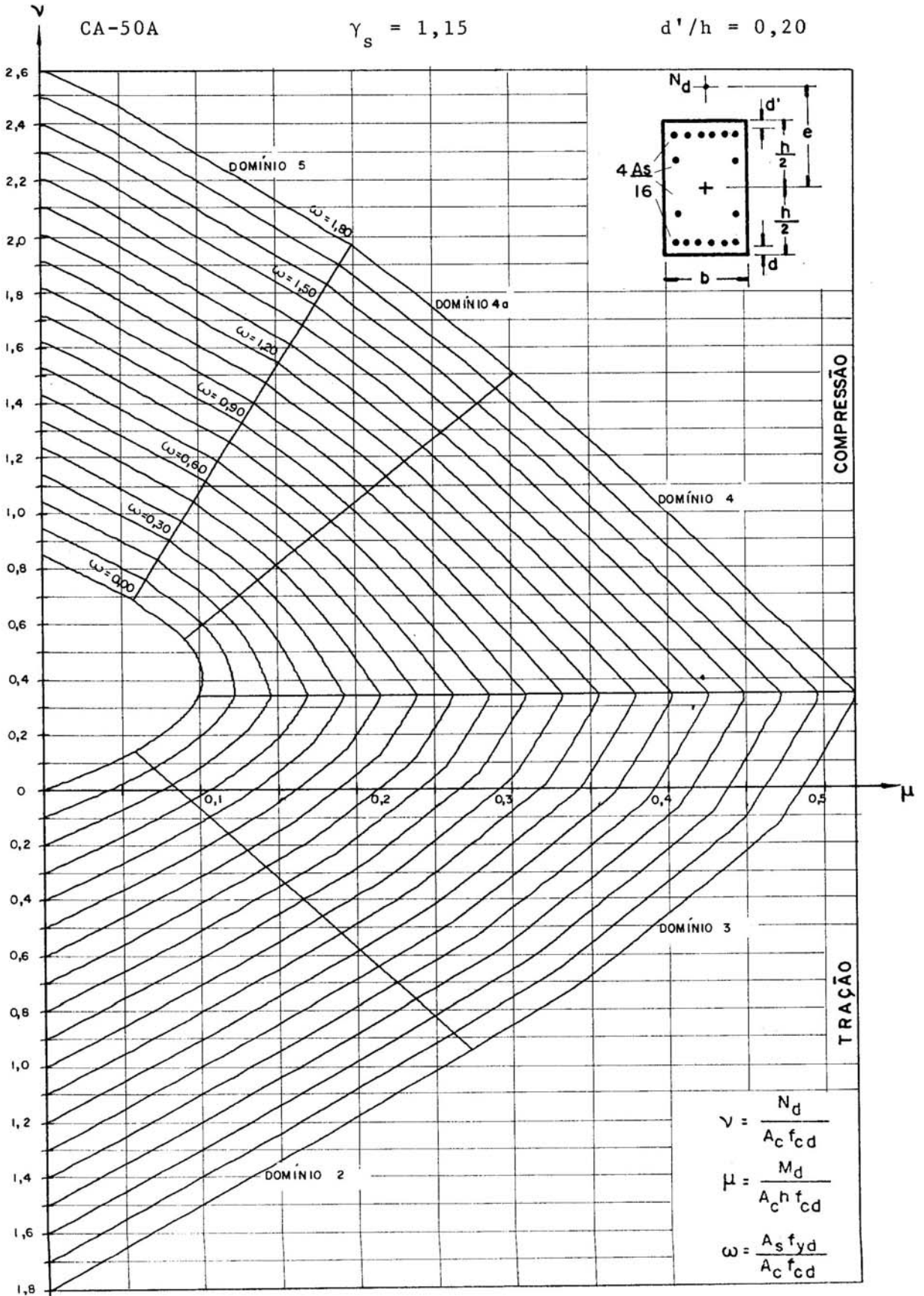


ÁBACO A-81

CA-50A

$\gamma_s = 1,15$

$d'/h = 0,20$

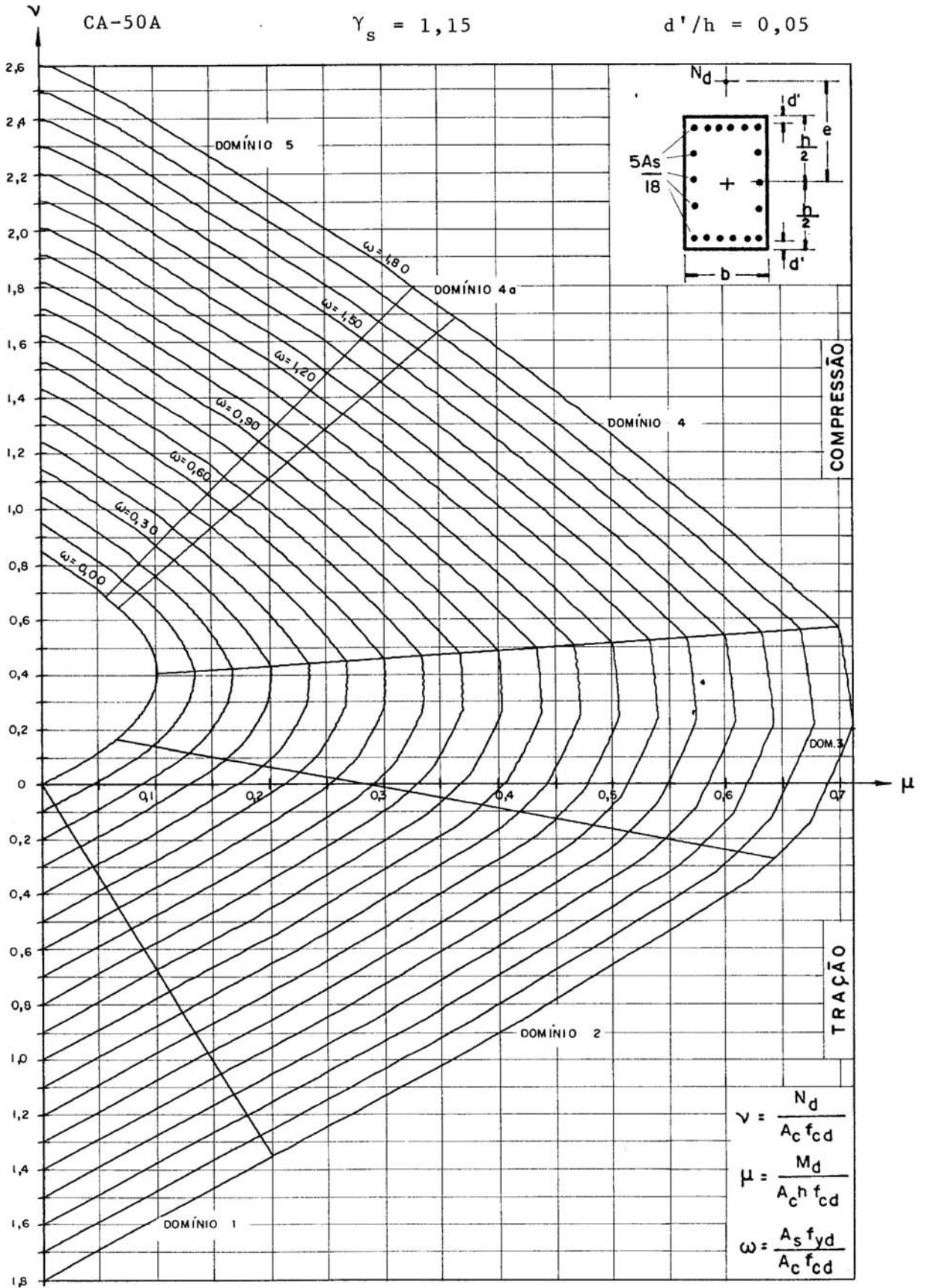


ÁBACO A-82

CA-50A

$\gamma_s = 1,15$

$d'/h = 0,05$



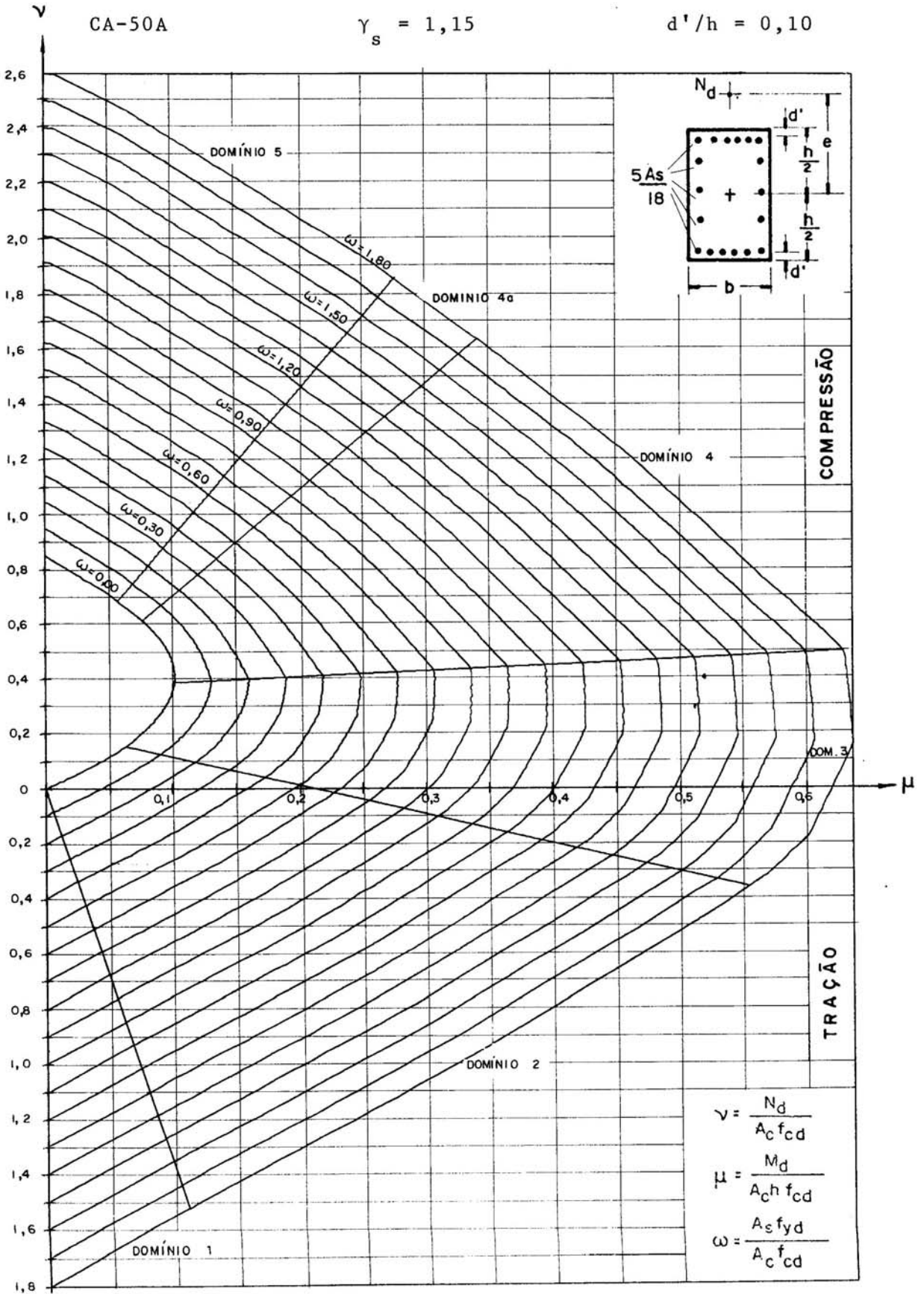


ÁBACO A-83

CA-50A

$\gamma_s = 1,15$

$d'/h = 0,10$



$$v = \frac{N_d}{A_c f_{cd}}$$

$$\mu = \frac{M_d}{A_c h f_{cd}}$$

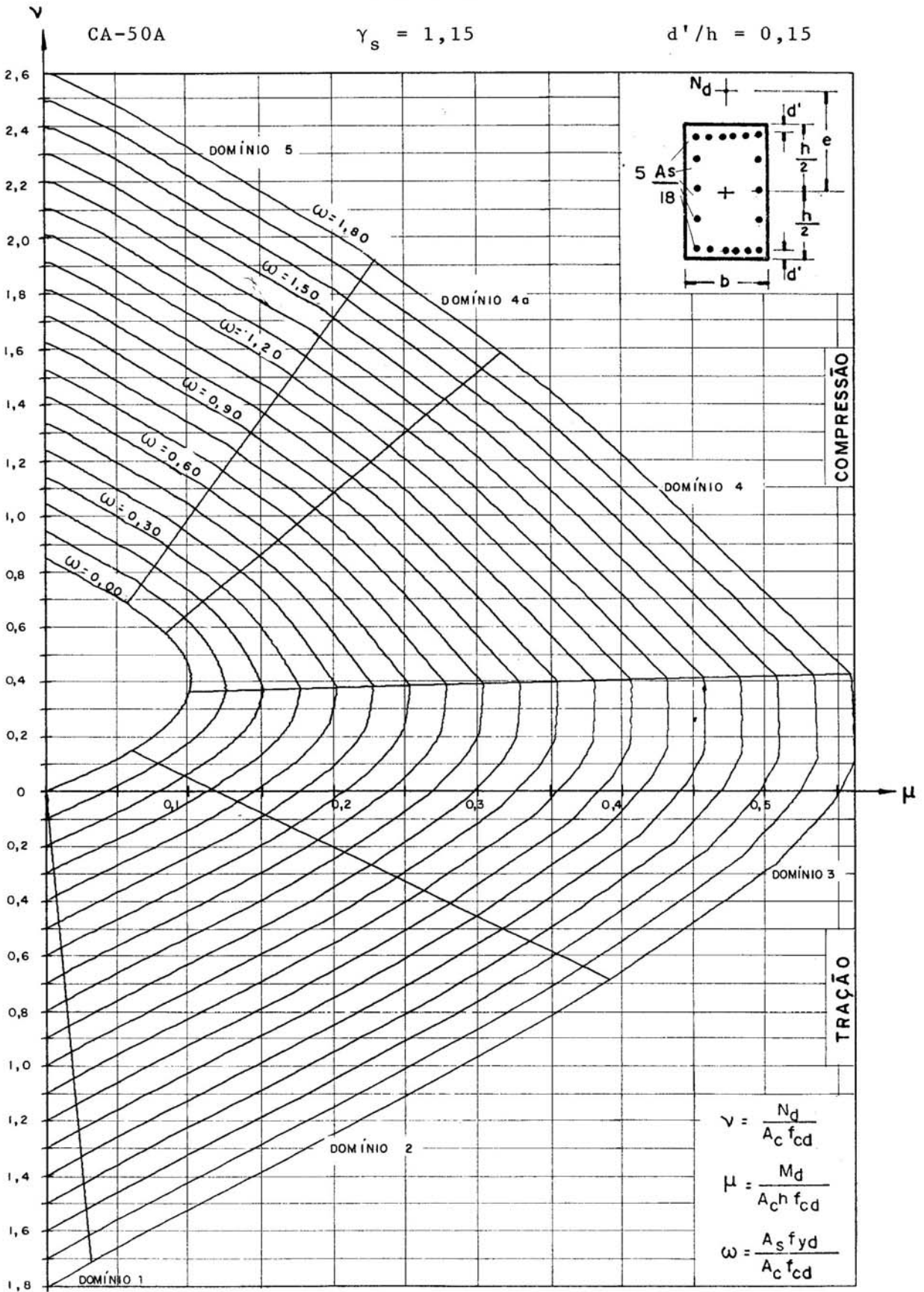
$$\omega = \frac{A_s f_{yd}}{A_c f_{cd}}$$

ÁBACO A-84

CA-50A

$\gamma_s = 1,15$

$d'/h = 0,15$



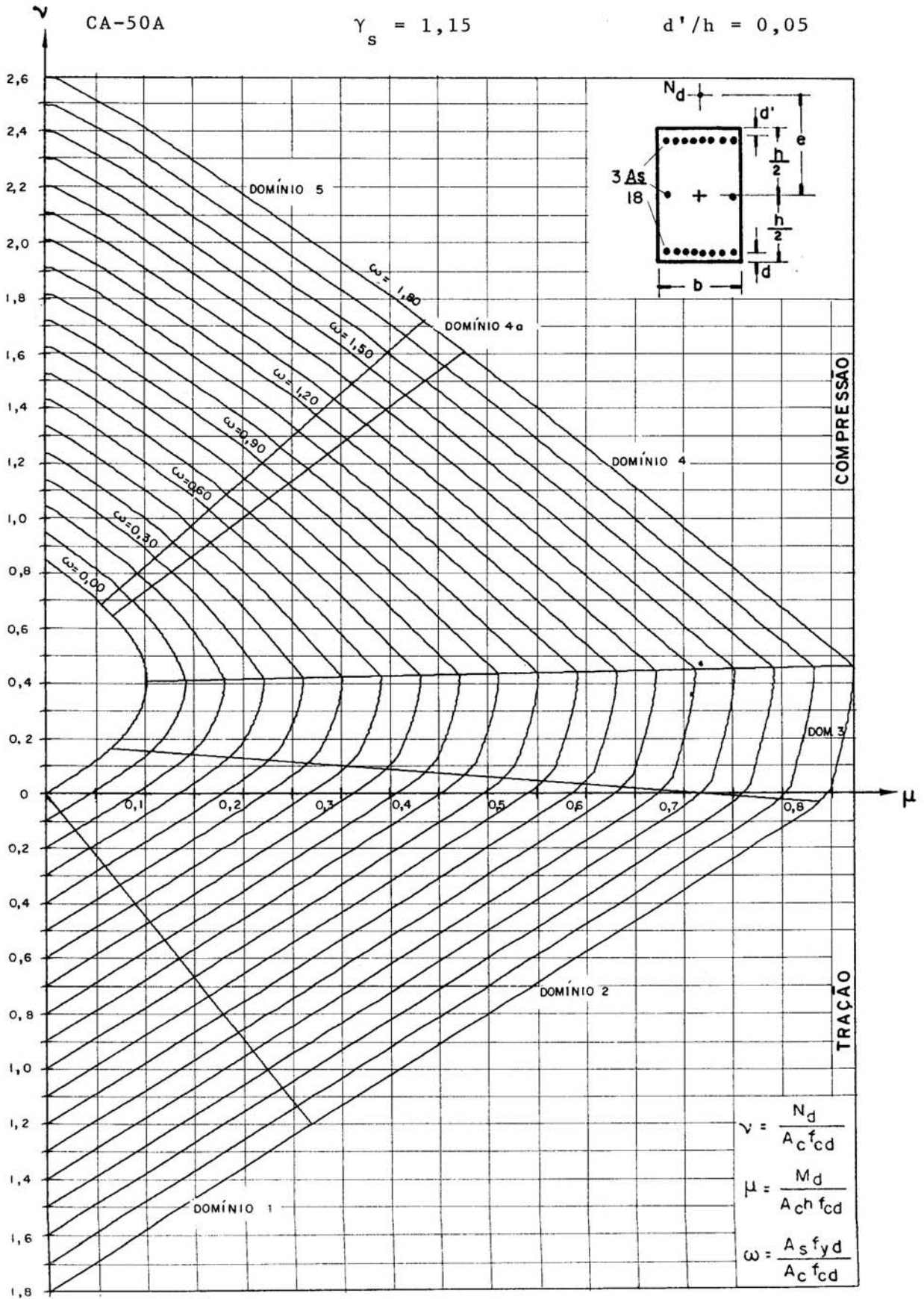


ÁBACO A-85

CA-50A

$\gamma_s = 1,15$

$d'/h = 0,05$

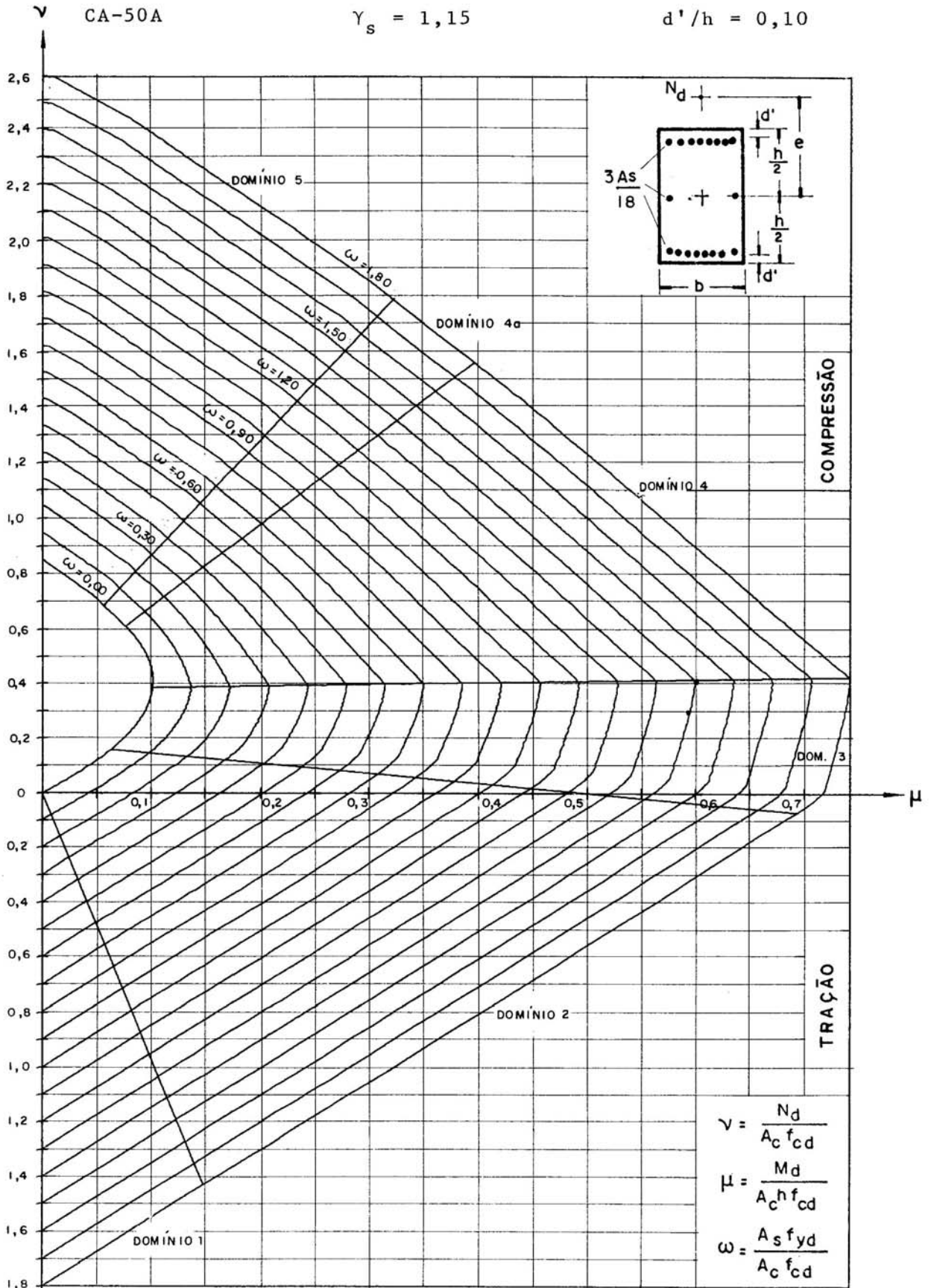


ÁBACO A-86

CA-50A

$\gamma_s = 1,15$

$d'/h = 0,10$

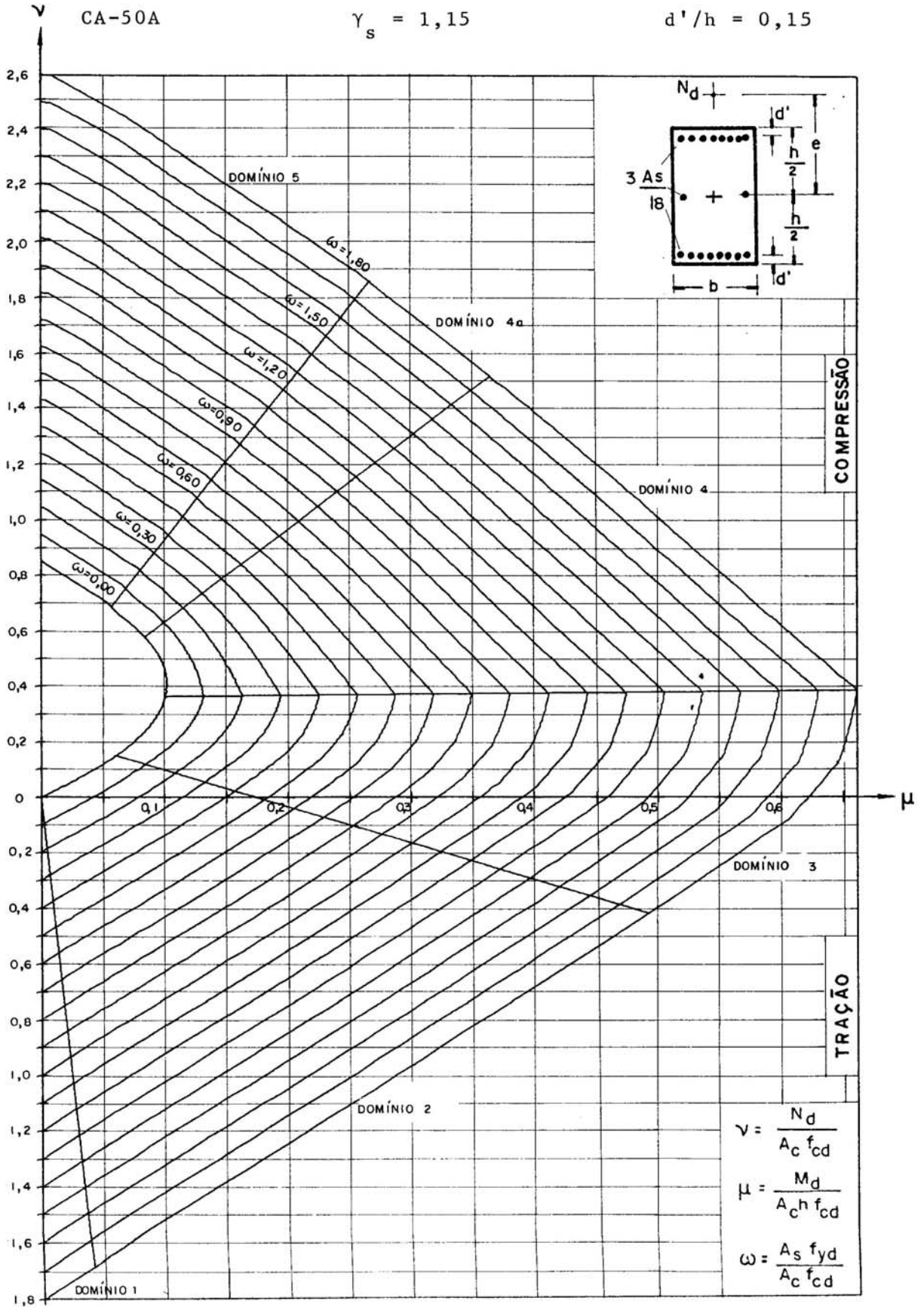


ÁBACO A-87

CA-50A

$\gamma_s = 1,15$

$d'/h = 0,15$

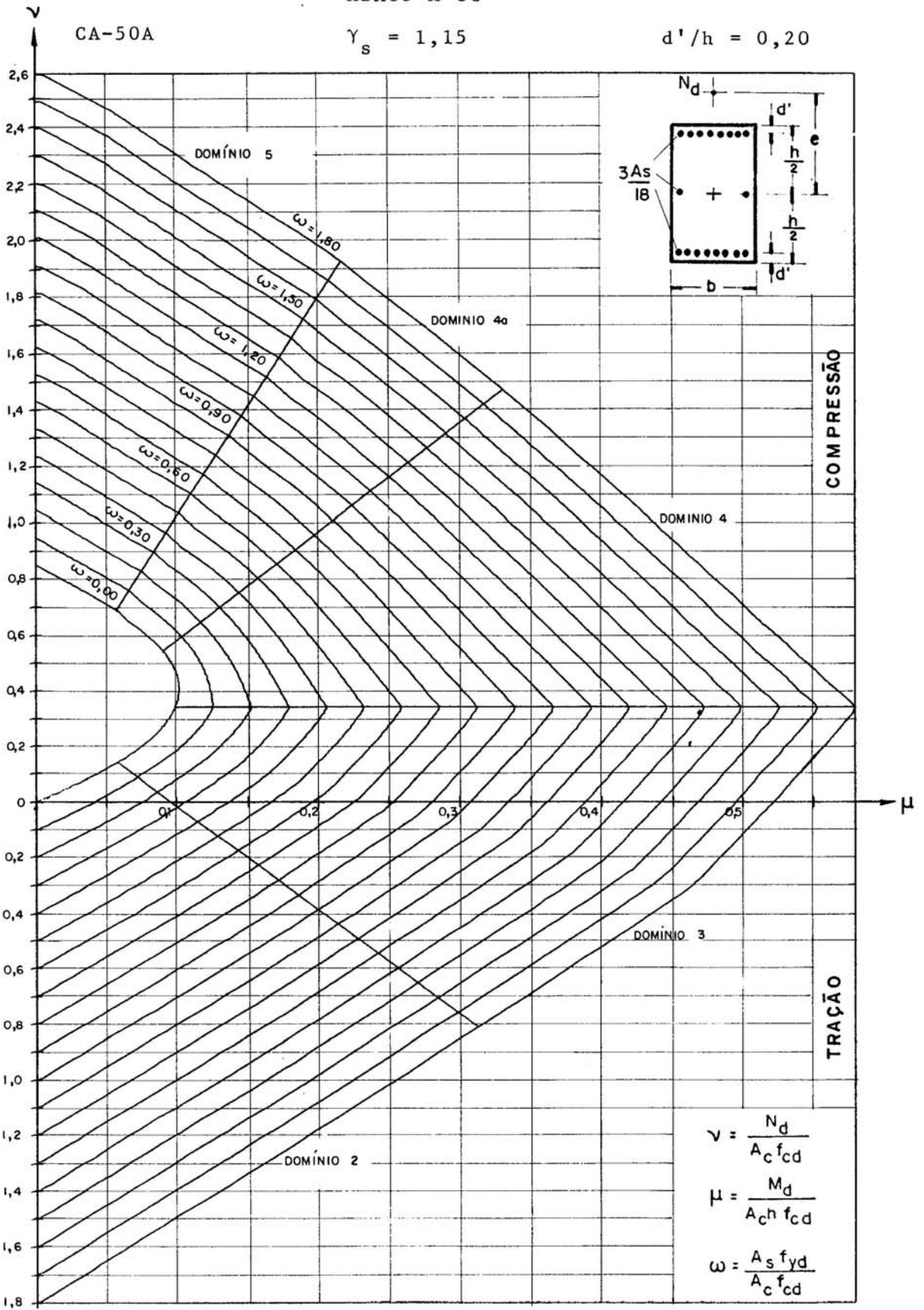


ÁBACO A-88

CA-50A

$\gamma_s = 1,15$

$d'/h = 0,20$

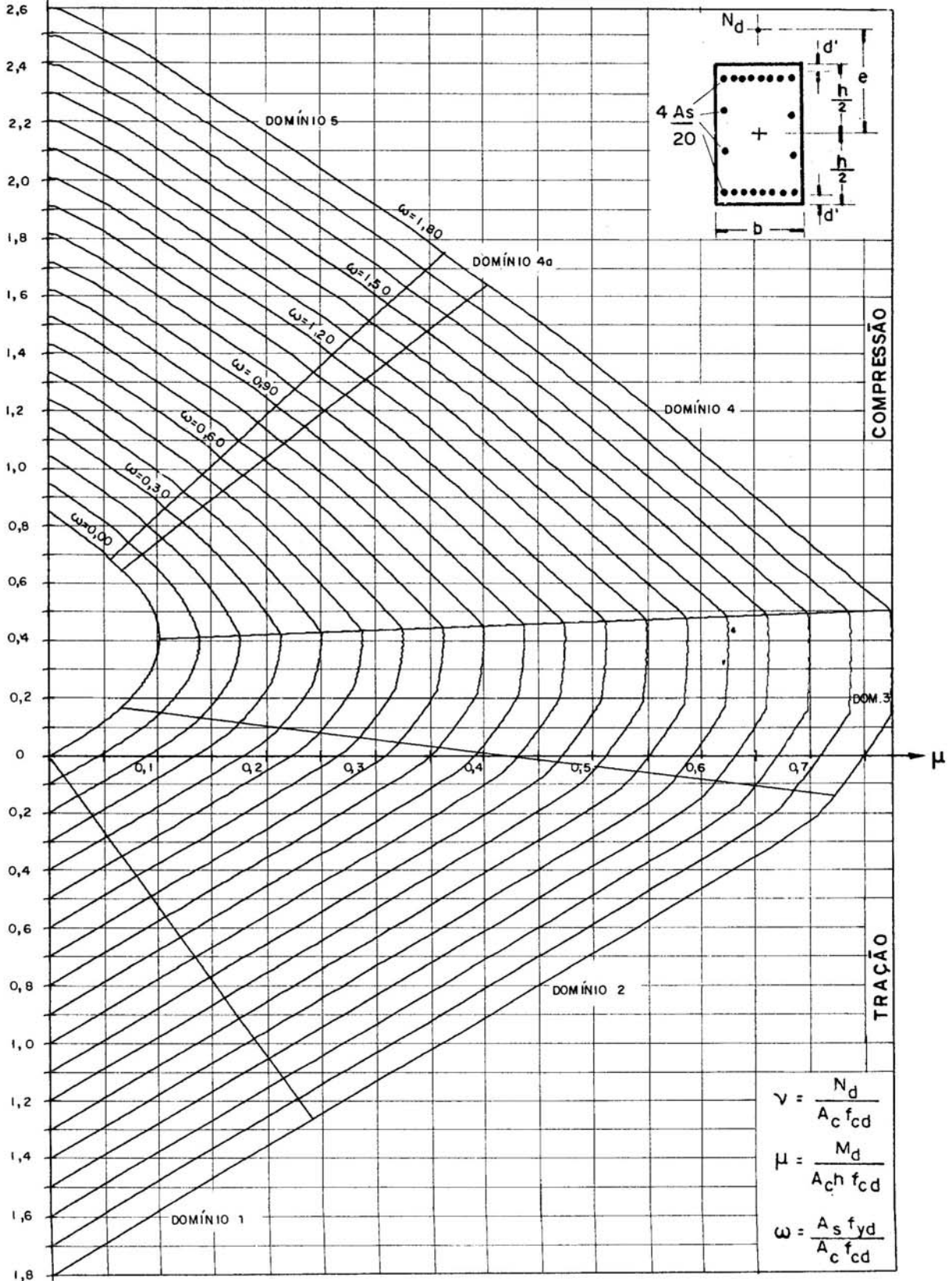


ÁBACO A-89

CA-50A

$\gamma_s = 1,15$

$d'/h = 0,05$



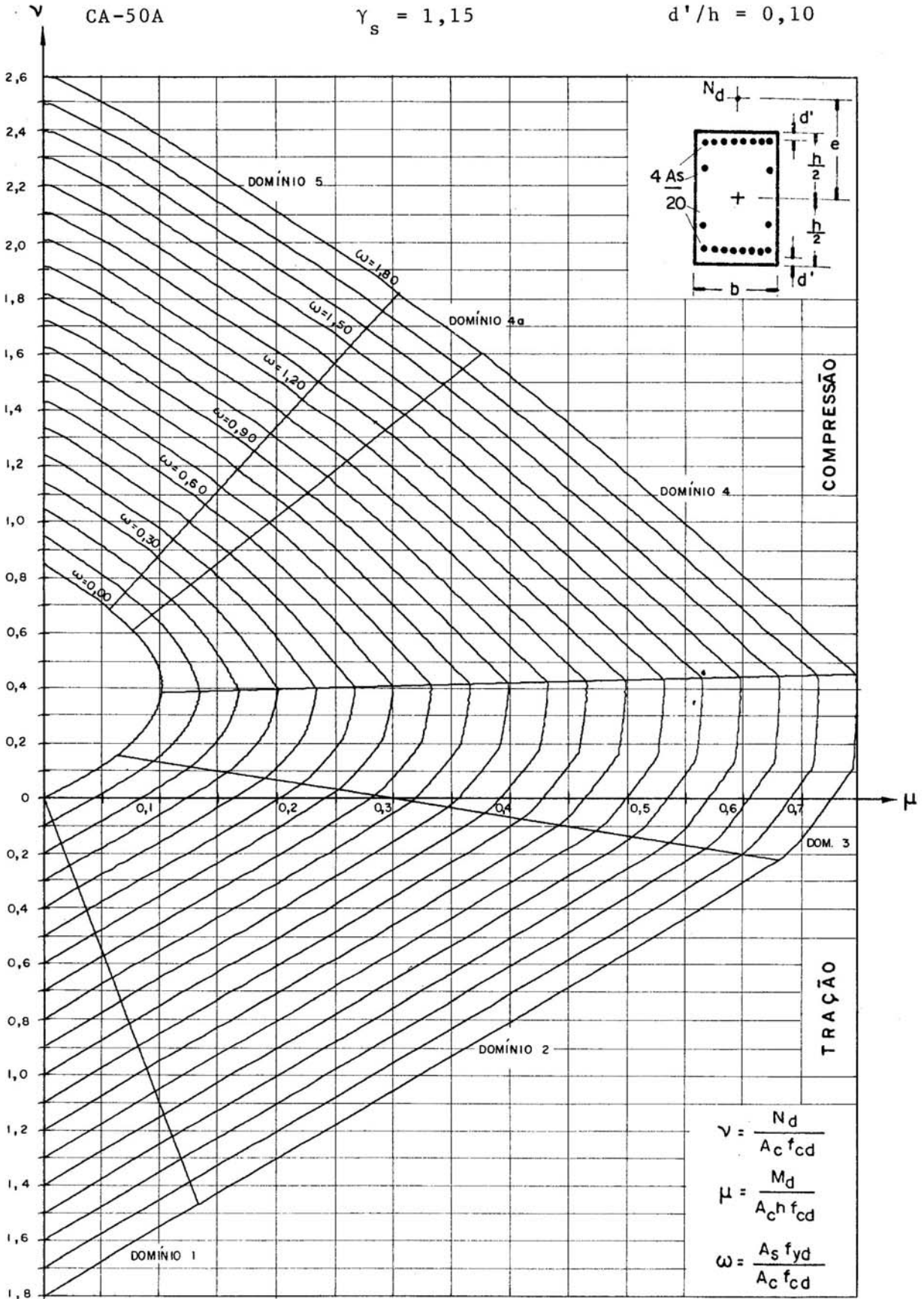


ÁBACO A-90

CA-50A

$\gamma_s = 1,15$

$d'/h = 0,10$



$$v = \frac{N_d}{A_c f_{cd}}$$

$$\mu = \frac{M_d}{A_c h f_{cd}}$$

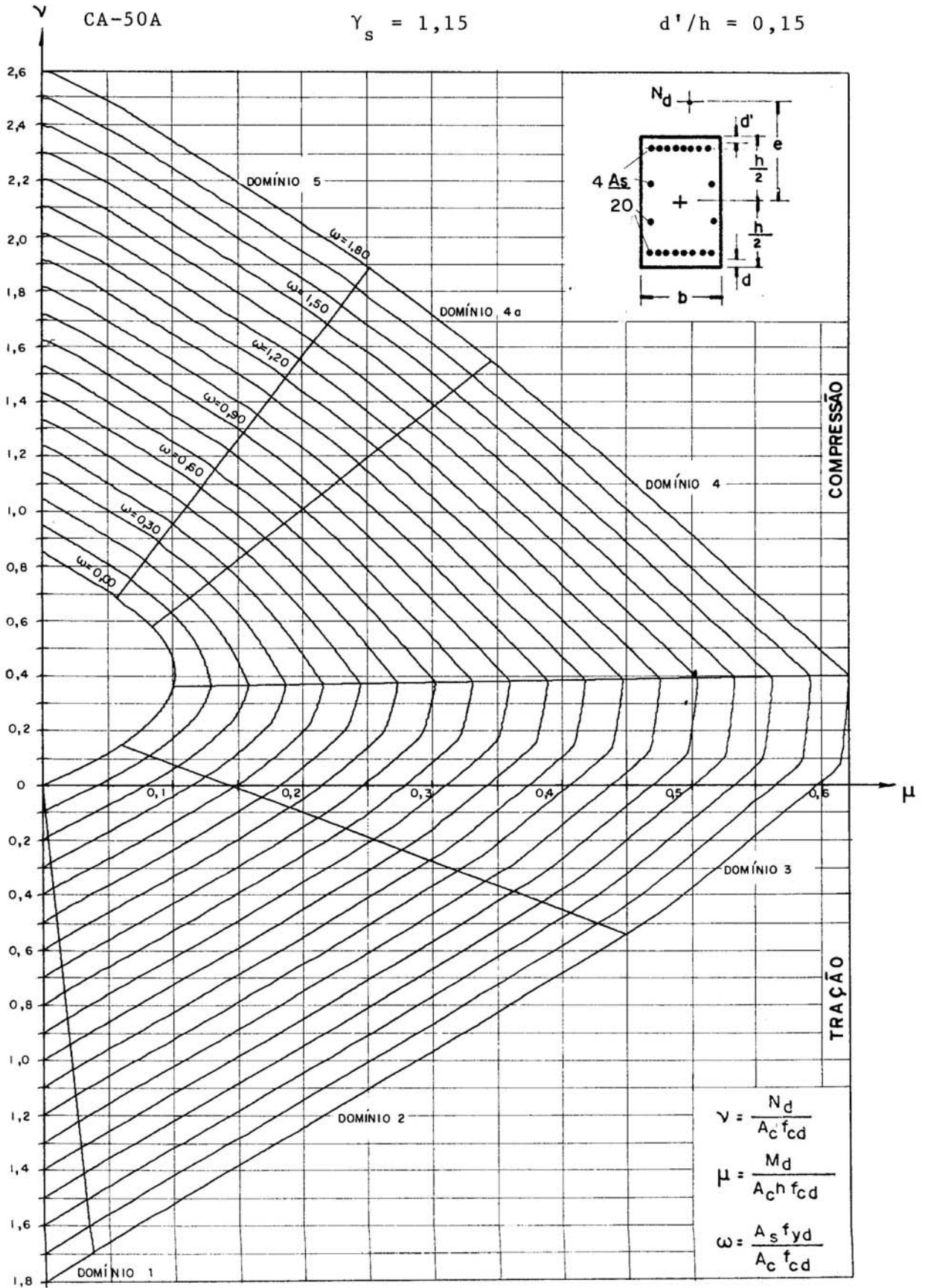
$$\omega = \frac{A_s f_{yd}}{A_c f_{cd}}$$

ÁBACO A-91

CA-50A

$\gamma_s = 1,15$

$d'/h = 0,15$



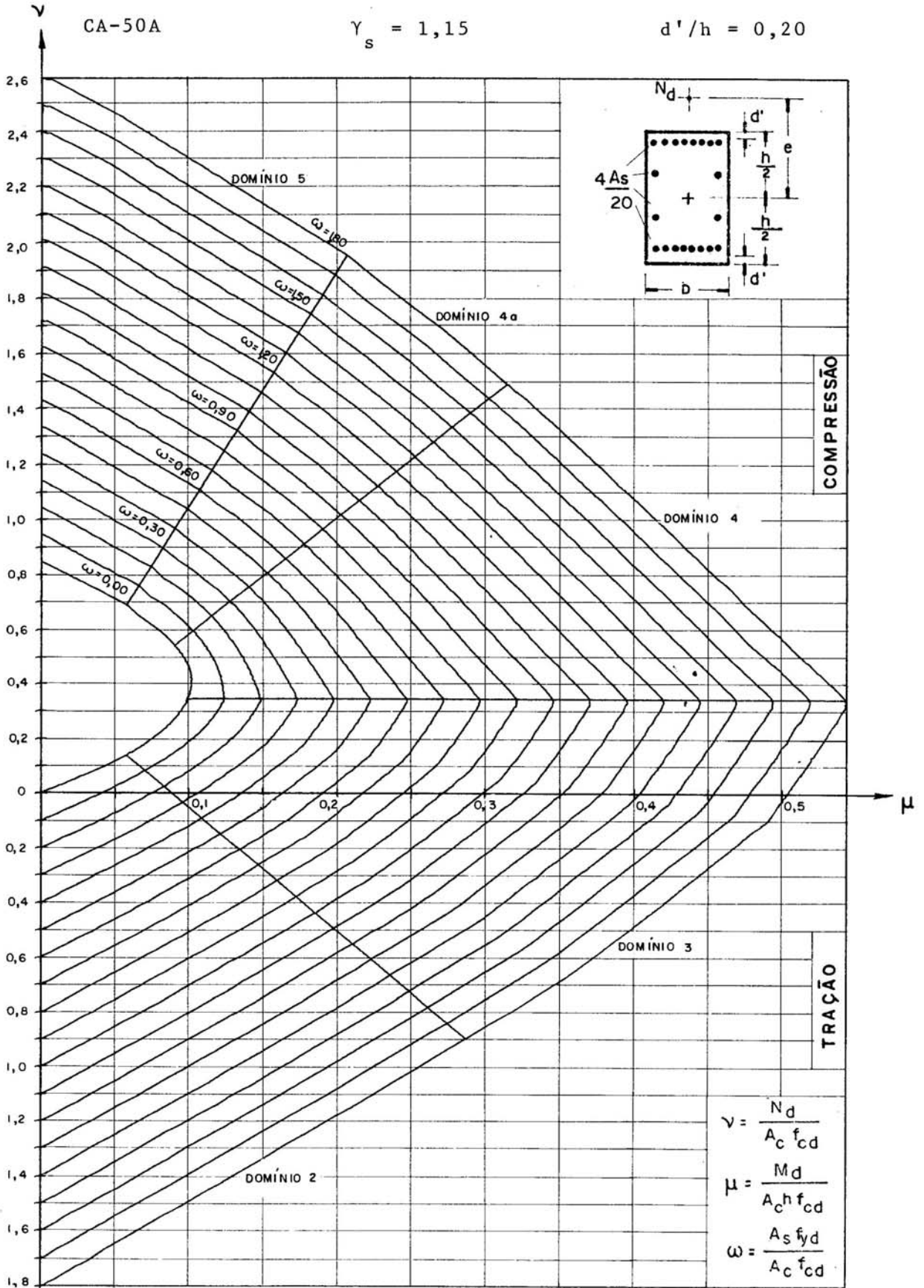


ÁBACO A-92

CA-50A

$\gamma_s = 1,15$

$d'/h = 0,20$

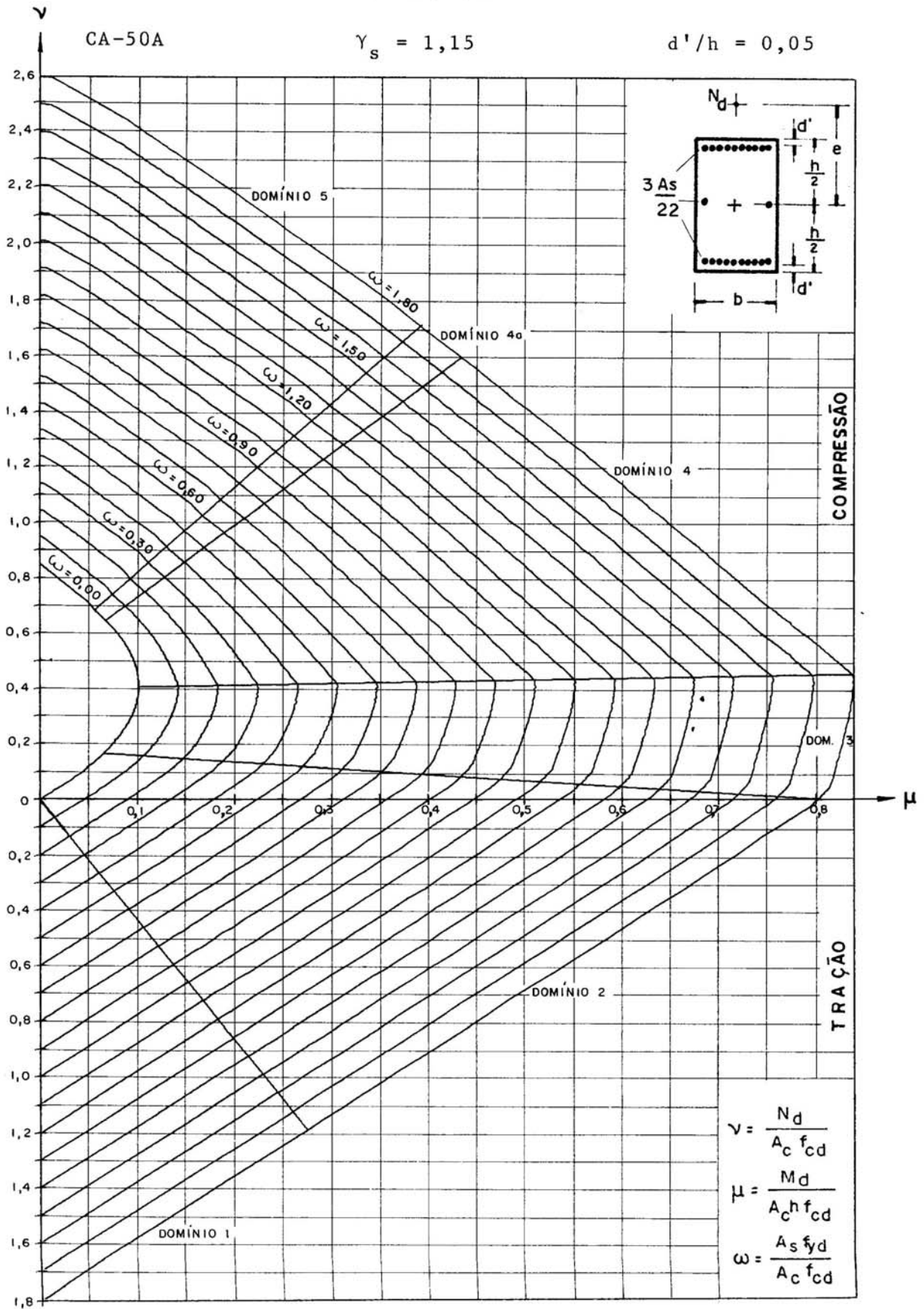


ÁBACO A-93

CA-50A

$\gamma_s = 1,15$

$d'/h = 0,05$

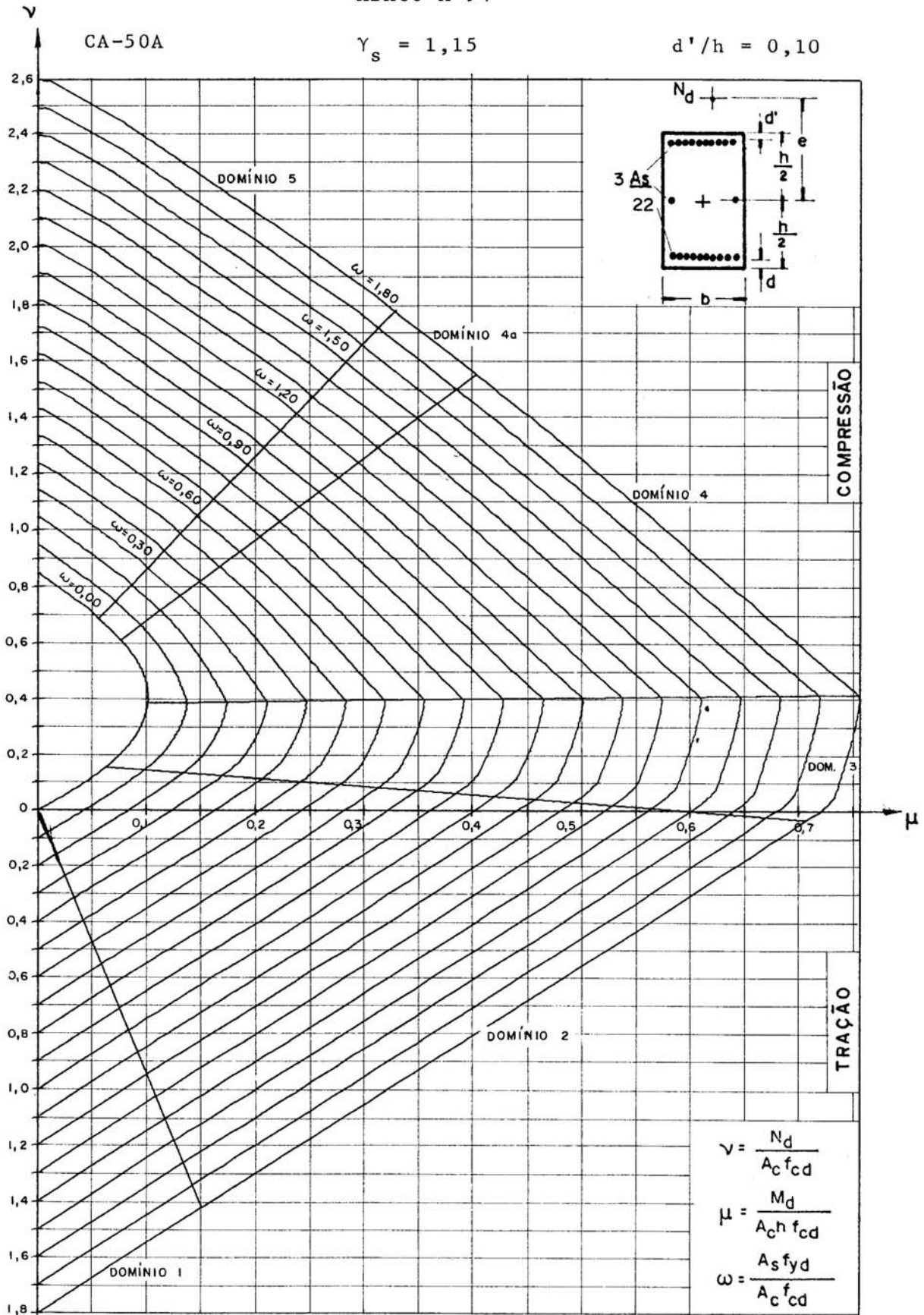


ÁBACO A-94

CA-50A

$\gamma_s = 1,15$

$d'/h = 0,10$

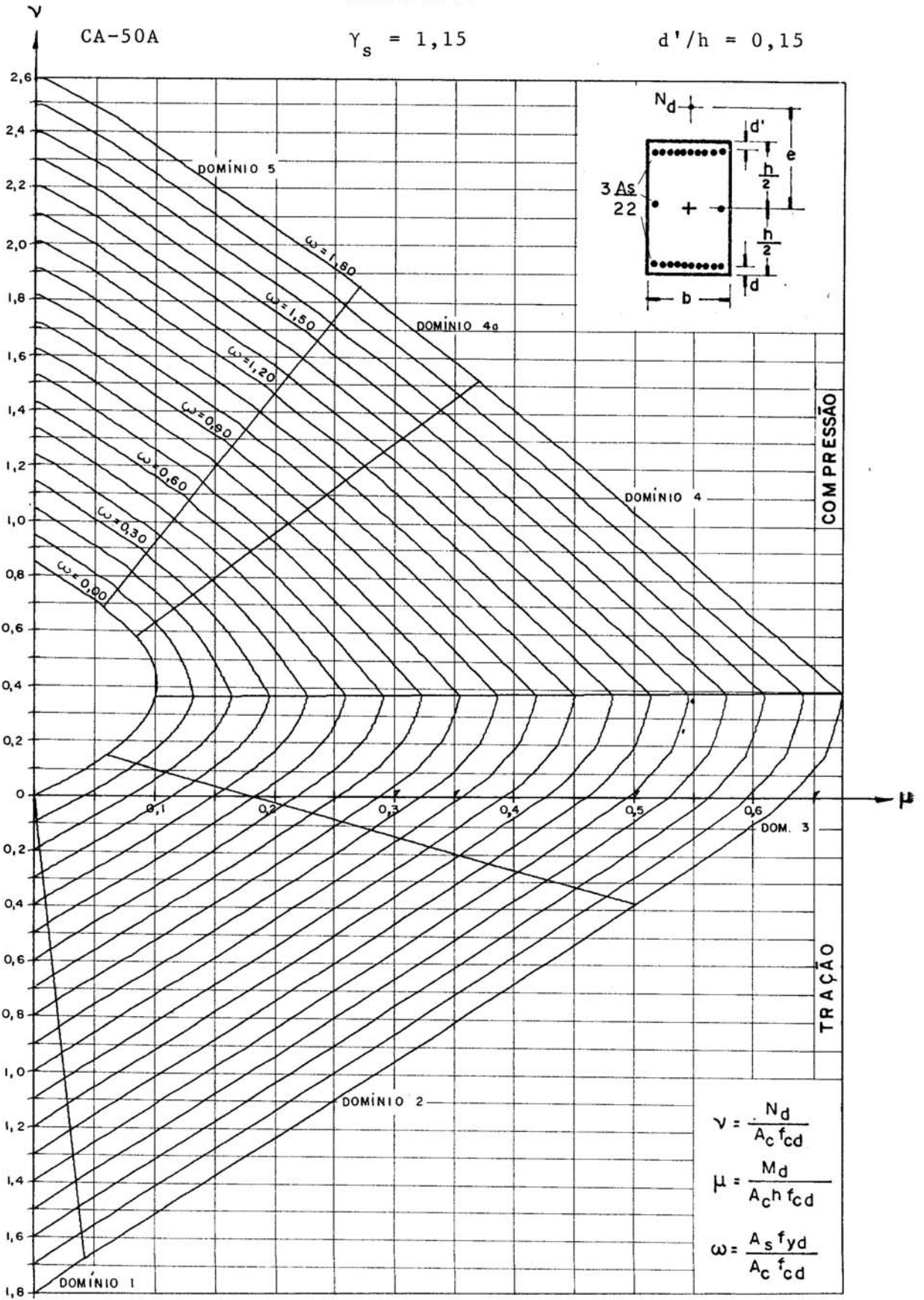


ÁBACO A-95

CA-50A

$\gamma_s = 1,15$

$d'/h = 0,15$



ÁBACO A-96

CA-50A

$\gamma_s = 1,15$

$d'/h = 0,20$

