UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
UNESP - Campus de Bauru/SP
Departamento de Engenharia Civil e Ambiental

2123 - ESTRUTURAS DE CONCRETO II

TORÇÃO EM VIGAS DE CONCRETO ARMADO

Prof. Dr. PAULO SÉRGIO BASTOS
(wwwp.feb.unesp.br/pbastos)

Bauru
Maio/2024

APRESENTAÇÃO

Este texto tem o objetivo de servir como notas de aula na disciplina 2123 – Estruturas de Concreto II, do curso de Engenharia Civil da Universidade Estadual Paulista (UNESP), Campus de Bauru/SP.

O texto apresenta as prescrições contidas na NBR 6118/2023 ("*Projeto de estruturas de concreto*") para o projeto e dimensionamento de vigas de Concreto Armado submetidas à torção.

Inicialmente são apresentadas diversas informações teóricas, como os casos e os valores mais comuns do momento de torção, a torção de equilíbrio e de compatibilidade, noções da torção simples, comportamento das vigas de Concreto Armado sob torção, analogia e formulação para a treliça espacial generalizada, formas de ruptura por torção, etc.

Por último são apresentados três exemplos numéricos de aplicação, que abrangem todos os cálculos necessários para o projeto de uma viga, como o dimensionamento à flexão e à força cortante, ancoragem nos apoios e disposição da armadura longitudinal com o "cobrimento" dos diagramas de momentos fletores.

Agradecimento a Éderson dos Santos Martins pela confecção de alguns desenhos.

Críticas e sugestões serão bem-vindas.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO 1
2. CASOS MAIS COMUNS 1
3. CASOS TÍPICOS PARA O MOMENTO DE TORÇÃO 3
4. TORÇÃO DE EQUILÍBRIO E DE COMPATIBILIDADE 4
5. TORÇÃO SIMPLES (TORÇÃO DE ST. VENANT) 7
6. TORÇÃO SIMPLES APLICADA A SEÇÕES VAZADAS DE PAREDE FINA 9
7. COMPORTAMETO DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO SUBMETIDAS À TORÇÃO SIMPLES 10
8. ANALOGIA DA TRELIÇA ESPACIAL PARA A TORÇÃO SIMPLES 11
9. TORÇÃO COMBINADA COM MOMENTO FLETOR E FORÇA CORTANTE 12
10. FORMA DE RUPTURA POR TORÇÃO 13
    10.1. Ruptura por Tração 14
    10.2. Ruptura por Compressão 14
    10.3. Ruptura dos Cantos 14
    10.4. Ruptura da Ancoragem 14
11. TORÇÃO SIMPLES – DEFINIÇÃO DE FORÇAS E TENSÕES NA TRELIÇA GENERALIZADA 15
    11.1 Diagonais de Compressão 15
    11.2 Armadura longitudinal 17
    11.3 Estribos 17
12. DIMENSIONAMENTO DE ELEMENTOS LINEARES À TORÇÃO UNIFORME NO ESTADO-LIMITE ÚLTIMO (ELU) SEGUNDO A NBR 61118 18
    12.1. Geometria da Seção Resistente 18
    12.2. Torção de Compatibilidade 18
    12.3. Torção de Equilíbrio 19
    12.4. Armaduras Mínimas 20
    12.5. Solicitações Combinadas 21
        12.5.1 Flexão e Torção 21
        12.5.2 Torção e Força Cortante 21
    12.6. Fissuração Inclinada da Alma 22
    12.7. Disposições Construtivas 22
        12.7.1 Estribos 22
        12.7.2 Armadura Longitudinal 23
13. MOMENTO DE INÉRCIA À TORÇÃO 23
14. EXEMPLO NUMÉRICO 1 24
    14.1. Cálculo dos Esforços Solicitantes como Grelha 25
        14.1.1. Vãos Efetivos 25
        14.1.2. Modelo de Grelha 25
        14.1.3. Esforços Solicitantes 26
    14.2. Dimensionamento da Viga V2 (20 x 50) 26
        14.2.1. Esforços Solicitantes Máximos 27
        14.2.2. Dimensionamento à Flexão 27
        14.2.3. Armadura de Pele 28
        14.2.4. Dimensionamento à Força Cortante 28
        14.2.5. Ancoragem da Armadura Longitudinal Negativa 29
        14.2.6. Detalhamento Final das Armaduras 30
    14.3. Dimensionamento da Viga V1 (35 x 50) 31
        14.3.1. Esforços Solicitantes Máximos 31
        14.3.2. Dimensionamento à Flexão 32
        14.3.3. Armadura de Pele 33
        14.3.4. Dimensionamento à Força Cortante 33

14.3.5. Ancoragem da Armadura Longitudinal Negativa 34
14.3.6. Dimensionamento à Torção....34
14.3.7. Detalhamento Final das Armaduras 37
15. EXEMPLO NUMÉRICO 2....38
15.1. Dimensionamento da Laje L3 41
15.1.1. Ações Uniformemente Distribuídas na Área....41
15.1.2. Ações Uniformemente Distribuídas no Contorno 41
15.1.3. Cálculo dos Esforços Solicitantes 41
15.1.4. Verificação da Laje à Força Cortante....41
15.1.5. Determinação da Armadura Longitudinal de Flexão 41
15.1.6. Detalhamento Final das Armaduras 42
15.2. Dimensionamento da Viga V1 (19 x 40)....43
15.2.1. Ações a Considerar....43
15.2.2. Esforços Solicitantes Internos 43
15.2.3. Armadura Mínima de Flexão....46
15.2.4. Armadura de Pele 46
15.2.5. Dimensionamento das Armaduras Longitudinais Negativas....46
15.2.6. Dimensionamento da Armadura Longitudinal Positiva 47
15.2.7. Dimensionamento da Armadura Transversal à Força Cortante....48
15.2.8. Ancoragem das Armaduras Longitudinais 49
15.2.9. Dimensionamento à Torção....51
15.2.10. Cobrimento do Diagrama de Momentos Fletores....55
15.2.11. Detalhamento Final das Armaduras 56
16. EXEMPLO NUMÉRICO 3....56
16.1. Vãos Efetivos 58
16.2. Estimativa da Altura das Vigas 59
16.3. Cargas nas Lajes e nas Vigas....59
16.3.1. Lajes 59
16.3.2. Viga VS1....59
16.3.3. Viga VS6....60
16.4. Modelo de Grelha para as Vigas do Pavimento 60
16.4.1. Rigidez de Mola 61
16.4.2. Arquivo de Dados....62
16.4.3. Esforços Solicitantes 63
16.5. Dimensionamento da Viga VS1 (19 x 60) 64
16.5.1. Armadura Mínima de Flexão....64
16.5.2. Armadura de Pele 64
16.5.3. Armaduras Longitudinais Negativas 64
16.5.4. Armaduras Longitudinais Positivas....66
16.5.5. Armadura Transversal à Força Cortante para o Tramo à Esquerda do Pilar Interno P2 67
16.5.6. Ancoragem das Armaduras Longitudinais 68
16.5.7. Dimensionamento à Torção....72
16.5.8. Cobrimento do Diagrama de Momentos Fletores....75
16.5.9. Detalhamento Final das Armaduras 76
16.6. Dimensionamento da Viga VS6 (19 x 60) 76
16.6.1. Armadura Longitudinal Negativa no Apoio Interno P6 77
16.6.2. Armadura Longitudinal Positiva à Direita do Pilar P6....77
16.6.3. Armadura Longitudinal Positiva Entre os Pilares P9 e P6 77
16.6.4. Armadura Transversal à Força Cortante....78
16.6.5. Ancoragem das Armaduras Longitudinais 78
16.6.6. Dimensionamento à Torção....79
16.6.7. Cobrimento do Diagrama de Momentos Fletores Negativos 81
16.6.8. Detalhamento Final das Armaduras 82
17. QUESTIONÁRIO 83
B1) ARQUIVO DE DADOS DA GRELHA DO EXEMPLO 1 94
B2) RESULTADOS DA GRELHA DO EXEMPLO 1 94
B3) ARQUIVO DE DADOS DA GRELHA DO EXEMPLO 3 96
B4) RESULTADOS DA GRELHA DO EXEMPLO 3 97
B5) ARQUIVO DE DADOS DO EXEMPLO 3 - VIGA VS1 ENTRE OS PILARES P2 E P3....104
B6) RESULTADOS DO EXEMPLO 3 - VIGA VS1 ENTRE OS PILARES P2 E P3 104

B7) ARQUIVO DE DADOS DO EXEMPLO 3 - VIGA VS6 ENTRE OS PILARES P9 E P6.....106
B8) RESULTADOS DO EXEMPLO 3 - VIGA VS6 ENTRE OS PILARES P9 E P6.....106

1. INTRODUÇÃO

Um conjugado que tende a torcer uma peça fazendo-a girar sobre o seu próprio eixo é denominado "momento de torção", momento torçor ou torque. O caso mais comum de torção ocorre em eixos de transmissão.

A torção simples, torção uniforme ou torção pura (não atuação simultânea com M e V), excetuando os eixos de transmissão, ocorre raramente na prática. Geralmente a torção ocorre combinada com momento fletor e força cortante, mesmo que esses esforços sejam causados apenas pelo peso próprio do elemento estrutural. De modo aproximado, os princípios de dimensionamento para a torção simples são aplicados às vigas com atuação simultânea de momento fletor e força cortante (LEONHARDT e MÖNNIG, 1982).

Nas estruturas de concreto, a ligação monolítica entre as vigas e as lajes e entre vigas apoiadas em outras vigas, dá origem a momentos de torção, que, de modo geral, podem ser desprezados por não serem essenciais ao equilíbrio. Entretanto, no caso da chamada "torção de equilíbrio", como se verá adiante, a consideração dos momentos torçores é imprescindível para garantir o equilíbrio do elemento estrutural.

Desde o início do século passado numerosos estudos experimentais foram realizados em vigas de Concreto Armado sob solicitação de torção simples. Os resultados dos estudos justificaram o dimensionamento simplificado à torção, considerando-se as vigas com seção vazada (oca) e de parede fina, segundo as equações clássicas da Resistência dos Materiais, formuladas por BREDT.

Assim como feito no dimensionamento de vigas à força cortante, na torção será feita também a analogia com uma treliça, porém espacial. A Treliça Generalizada, com ângulo θ variável de inclinação das diagonais comprimidas, é o modelo atualmente mais aceito internacionalmente. Como no dimensionamento para outros tipos de solicitação, as tensões de compressão serão absorvidas pelo concreto e as tensões de tração pelo aço, na forma de duas diferentes armaduras, uma longitudinal e outra transversal (estribos).

A análise da torção em perfis abertos de paredes finas, com aplicação da torção de Vlassov ou Flexo-Torção, não será aqui apresentada por não fazer parte do programa da disciplina na graduação.

2. CASOS MAIS COMUNS

Um caso comum de torção em vigas de Concreto Armado ocorre quando existe uma distância entre a linha de ação da carga e o eixo longitudinal da viga, como mostrado na Figura 1 e na Figura 2. Na Figura 1, a viga AB, estando obrigatoriamente engastada na extremidade B da viga BC, aplica nesta um momento de torção, que deve ser obrigatoriamente considerado no equilíbrio da viga BC. Na viga mostrada na Figura 2 a torção existirá se as cargas F_1 e F_2 forem diferentes. Essa situação pode ocorrer durante a fase de construção ou mesmo quando atuarem os carregamentos permanentes e variáveis, se estes forem diferentes nas estruturas que se apoiam na viga em forma de T invertido.

O caso mais comum de torção ocorre com lajes em balanço, engastadas em vigas de apoio, como por exemplo lajes (marquises) para proteção de porta de entrada de barracões, lojas, galpões, etc. (Figura 3 e Figura 4). O fato da laje em balanço não ter continuidade com outras lajes internas à construção faz com que a laje deva estar obrigatoriamente engastada na viga de apoio, de modo que a flexão na laje passa a ser torção na viga. A torção na viga torna-se flexão no pilar, devendo ser considerada no seu dimensionamento.

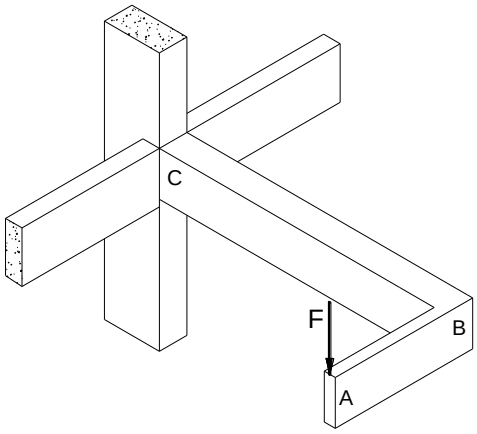


Figura 1 – Viga em balanço com carregamento excêntrico.

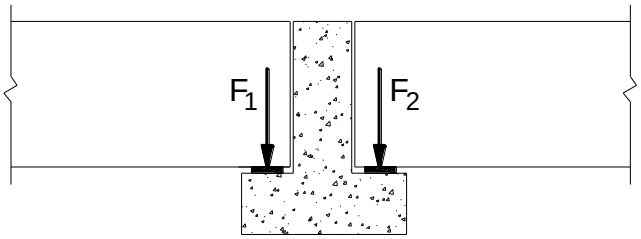


Figura 2 – Viga do tipo T invertido para apoio de estrutura de piso ou de cobertura.

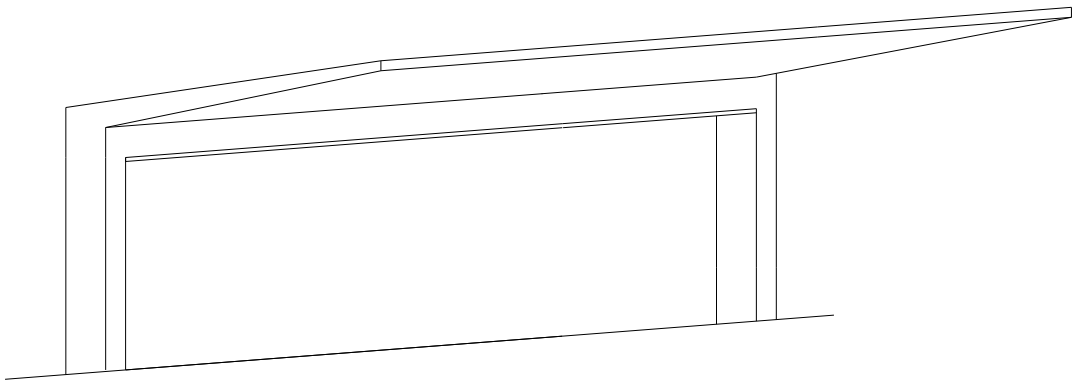


Figura 3 – Torção em viga devido a engastamento de laje em balanço.

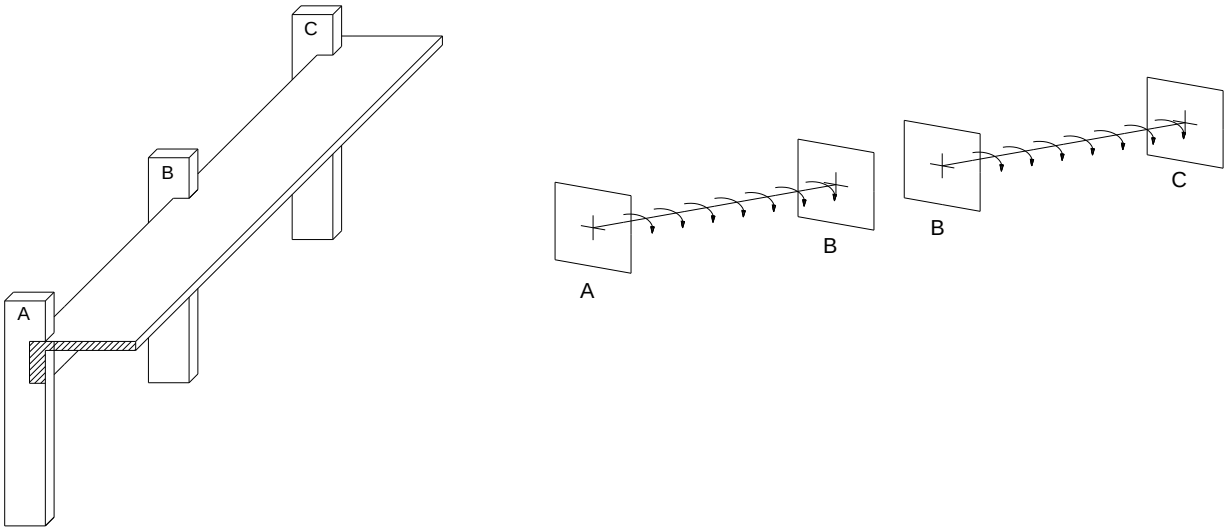


Figura 4 – Viga contínua sob torção por efeito de laje em balanço.

Um outro caso de torção em viga, de certa forma também comum nas construções, ocorre em vigas com mudança de direção, como mostrado na Figura 5. No ponto de mudança de direção um tramo aplica sobre o outro um momento de torção. A torção também ocorre em vigas curvas, com ou sem mudança de direção, como mostrado na Figura 6.

Se a torção for necessária ao equilíbrio da viga e não for apropriadamente considerada no seu dimensionamento, intensa fissuração pode se desenvolver, prejudicando a segurança e a estética da construção.

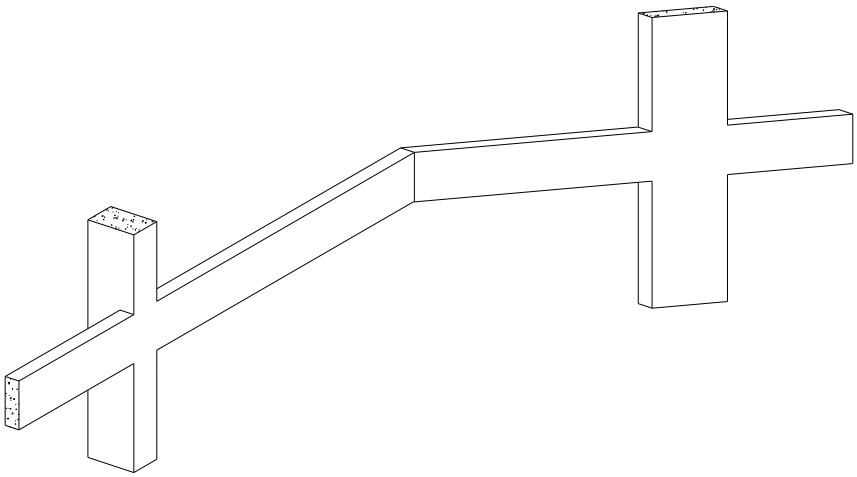


Figura 5 – Torção em viga devido à mudança de direção.

Figura 6 – Vigas curvas e com mudança de direção são solicitação por torção.

3. CASOS TÍPICOS PARA O MOMENTO DE TORÇÃO

Apresentam-se na Figura 7 até a Figura 11 os valores dos momentos de torção para alguns casos mais comuns na prática das estruturas, onde **m** representa o momento torçor externo aplicado, **T** o momento de torção solicitante e **F** a força concentrada.

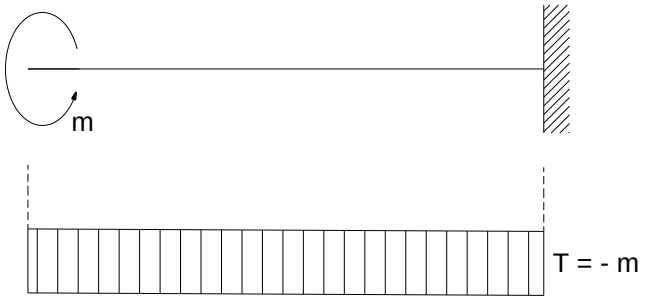


Figura 7 – Momento de torção concentrado aplicado na extremidade de viga em balanço.

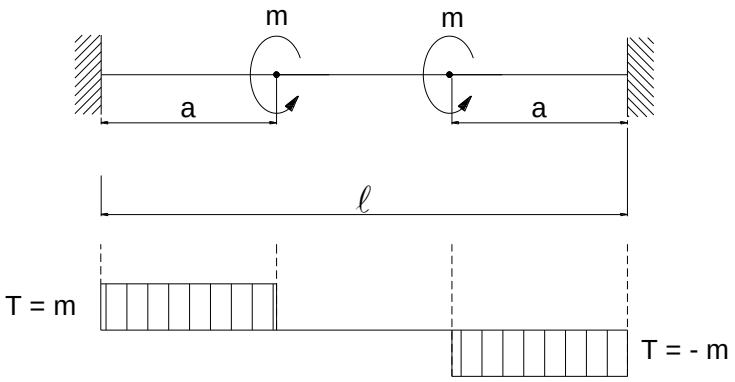


*Figura 8 – Momento de torção aplicado à distância **a** das extremidades de viga biengastada.*

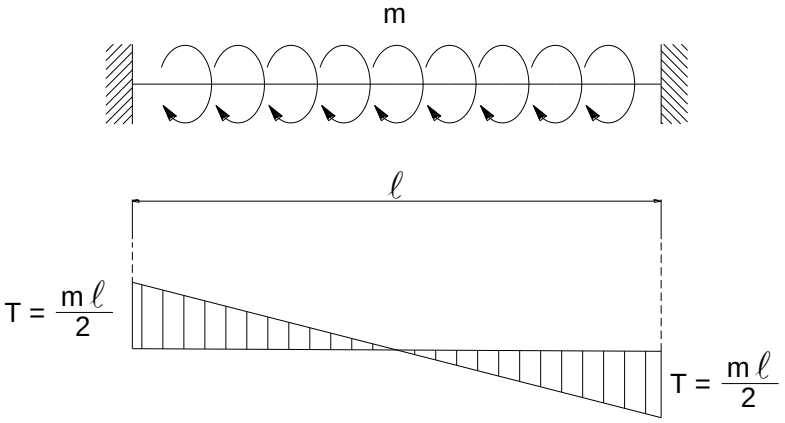


Figura 9 – Momento de torção uniformemente distribuído em viga biengastada.

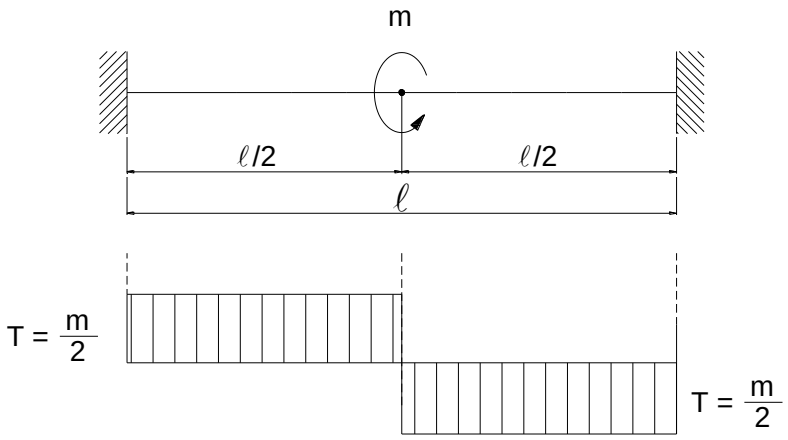


Figura 10 – Momento de torção concentrado aplicado no centro de viga biengastada.

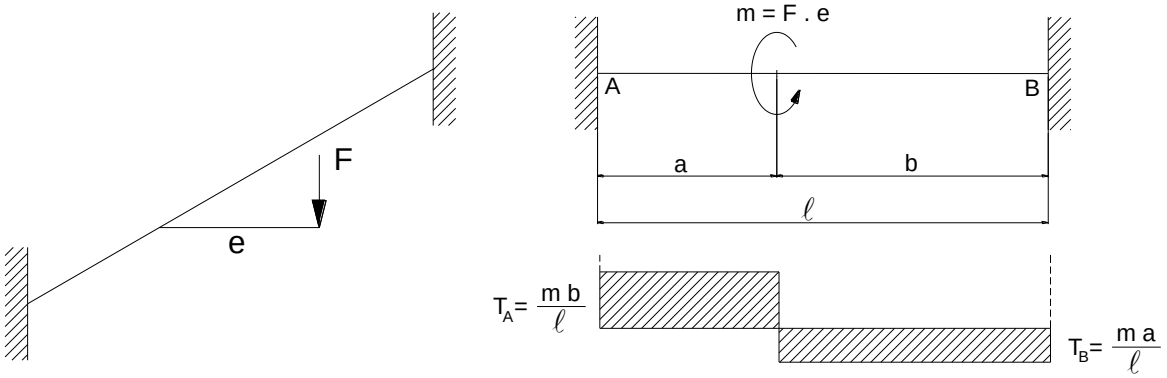


Figura 11 – Momento de torção concentrado aplicado fora do centro do vão de viga biengastada.

4. TORÇÃO DE EQUILÍBRIO E DE COMPATIBILIDADE

A torção nas estruturas de concreto pode ser dividida em duas categorias: torção de equilíbrio e torção de compatibilidade. Na torção de equilíbrio, o momento de torção deve ser obrigatoriamente considerado, pois ele é necessário para o equilíbrio da estrutura. As estruturas mostradas na Figura 1 até a Figura 6 encontram-se solicitadas por torção de equilíbrio, devendo ser obrigatoriamente considerada.

A torção de compatibilidade ocorre comumente nos sistemas estruturais, onde o caso de laje apoiada sobre uma viga de borda é o exemplo mais comum, como mostrado na Figura 12. A laje, ao tentar girar, aplica um momento de torção (m_T) na viga, que tende a girar também, sendo impedida pela rigidez à flexão dos pilares. Surgem então momentos torçores solicitantes na viga e momentos fletores nos pilares. Quando a rigidez da viga à torção é pequena comparada à sua rigidez à flexão, a viga fissura e gira, permitindo o giro da laje também. Ocorre então uma compatibilização entre as deformações da viga e da laje, e como consequência os momentos torçores na viga diminuem bastante, podendo ser desprezados.

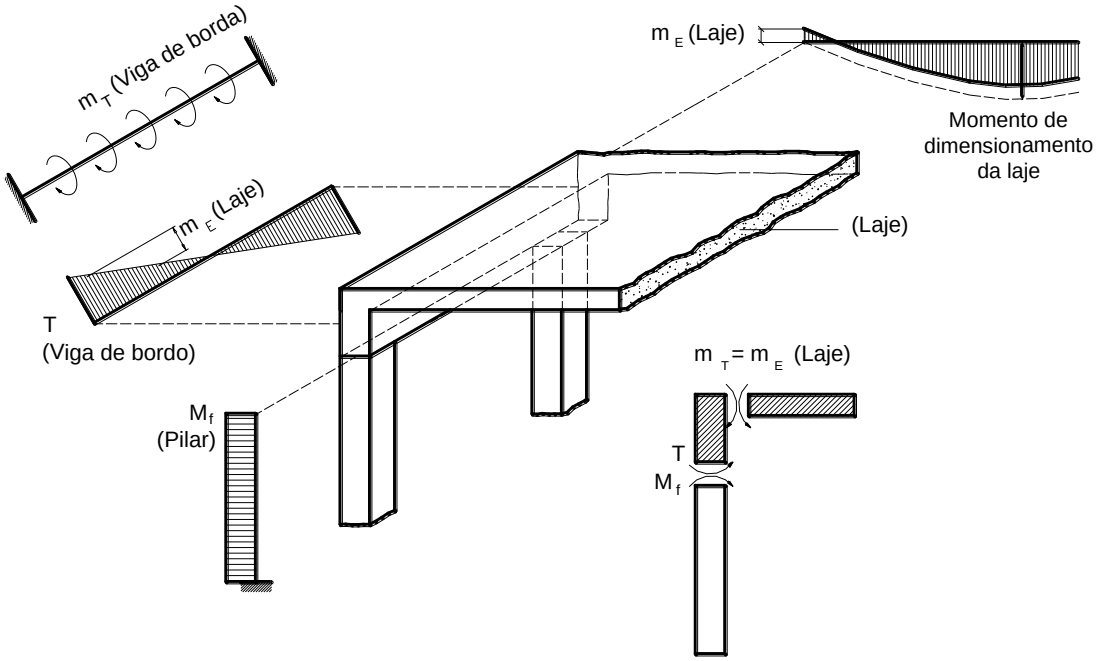


Figura 12 – Torção de compatibilidade de laje com viga de apoio (LEONHARDT e MÖNNIG, 1982).

Um outro exemplo de torção de compatibilidade é aquele mostrado na Figura 13 e na Figura 14. Como se observa na Figura 14, a viga AB apoia-se nas vigas CD e EF.

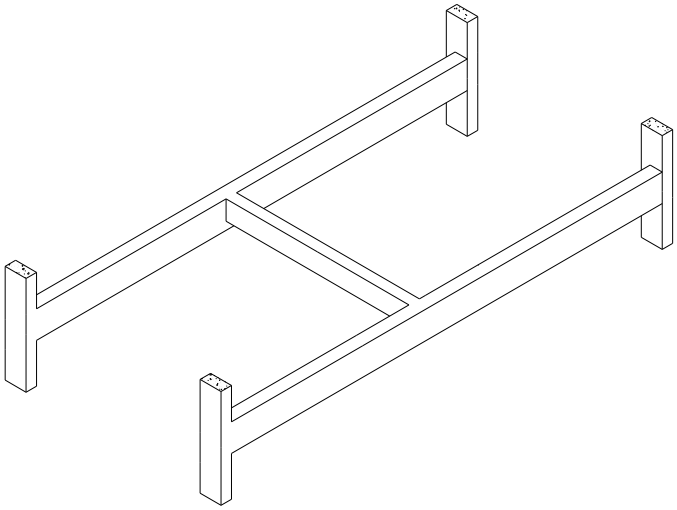


Figura 13 – Esquema das vigas com os pilares.

A Figura 15 mostra o caso das vigas de apoio CD e EF com rigidez à torção elevada. Neste caso não existe total liberdade de rotação para a viga AB nas suas extremidades, o que faz surgir os momentos de engastamento M_A e M_B , que, por outro lado, passam a ser momentos torçores concentrados e aplicados em A e B.

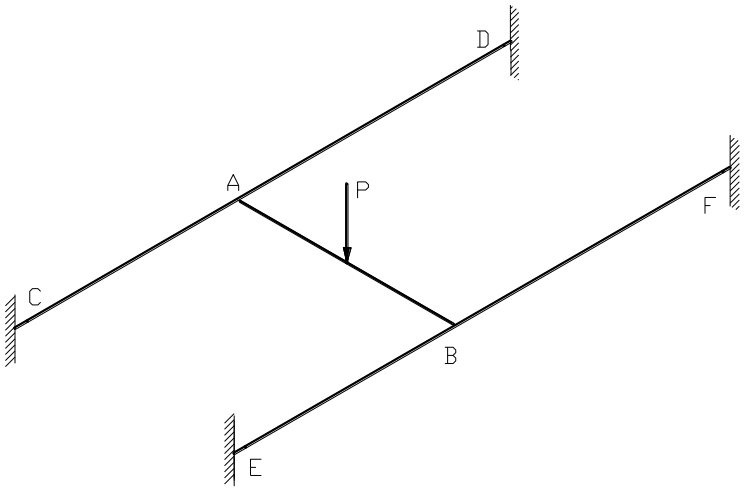


Figura 14 – Esquema estrutural (SÜSSEKIND, 1985).

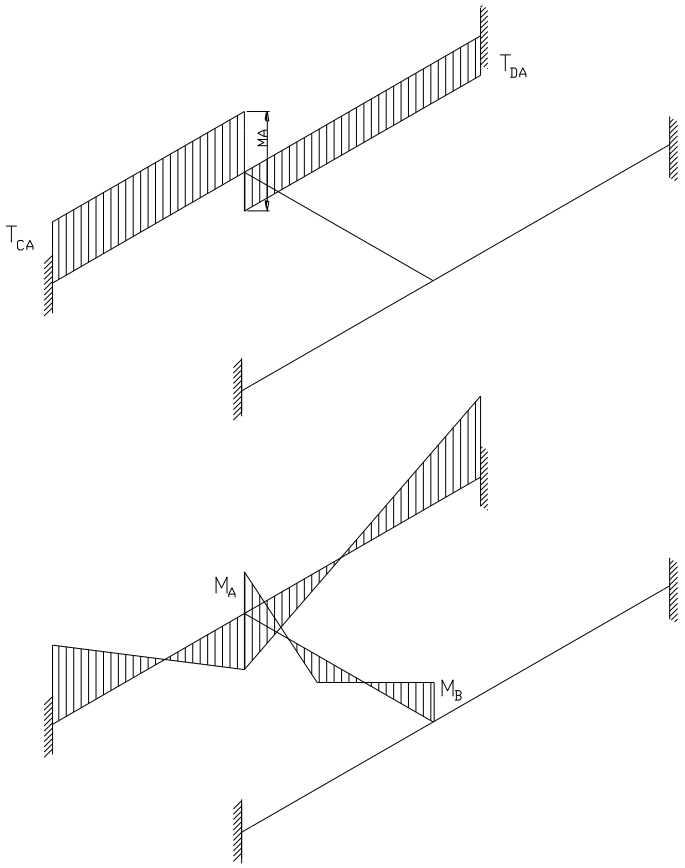


Figura 15 – Caso das vigas de apoio com elevada rigidez à torção.

A intensidade dos momentos fletores e torçores depende das rigidezes relativas das vigas, ou seja, da rigidez à torção das vigas CD e EF e da rigidez à flexão da viga AB. Se a rigidez à torção das vigas CD e EF for zero, a viga AB fica livre para girar em A e B, levando a zero os momentos fletores M_A e M_B , e consequentemente também os momentos torçores (Figura 16). Nesta análise percebe-se que a torção é consequência da compatibilidade de deformações das vigas, daí a chamada "torção de compatibilidade". Neste caso há o equilíbrio, embora sem se considerar a ligação monolítica da viga AB com as vigas CD e EF.

Por outro lado, sob o efeito do momento de torção a viga irá fissurar, o que acarreta uma significativa diminuição na rigidez da viga à torção. Desse modo, as vigas CD e EF, ao fissurarem por efeito da torção proveniente da viga AB, têm sua rigidez à torção diminuída, diminuindo por consequência os momentos M_A e T, o que leva ao aumento do momento fletor positivo da viga AB.

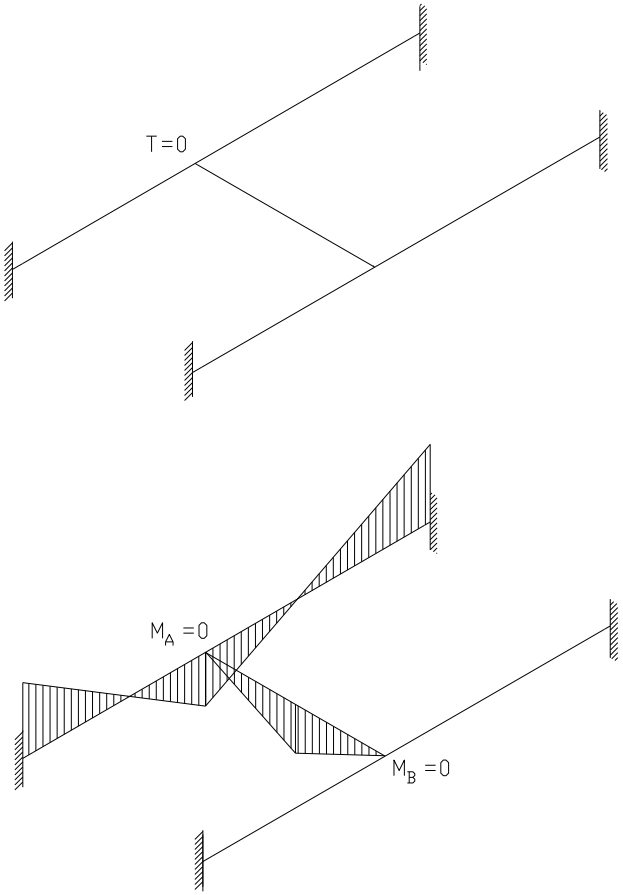


Figura 16 – Caso de pequena rigidez à torção.

Pode-se assim resumir que, "*a torção nas vigas deve ser considerada quando for necessária para o equilíbrio (torção de equilíbrio), e pode ser desconsiderada quando for de compatibilidade*".

Considerando-se o pavimento de um edifício constituído por lajes e vigas, além da torção de compatibilidade existente entre as vigas, a ligação monolítica entre as lajes e as vigas, como mostrado na Figura 12, também ocasiona o surgimento de momentos de torção nas vigas, de compatibilidade, não imprescindível ao equilíbrio do sistema, podendo assim serem desprezados também.

Somado a isso, por imposição da arquitetura a largura das vigas varia normalmente de 12 a 20 cm, e para as alturas correntes das vigas (comumente até 60 cm), a rigidez à torção não é significativa, o que leva a valores baixos para a torção de compatibilidade, justificando a sua desconsideração.

Outra análise que se faz é que, se as vigas CD e EF forem livres para girar nas extremidades, o momento de torção T será zero, ou seja, não existirá o momento de torção. Ou, por outro lado, e o que é mais comum na prática das estruturas, devido à ligação monolítica das vigas CD e EF com os pilares de apoio, se as vigas não podem girar e a rigidez à torção das vigas CD e EF é muito maior que a rigidez à flexão da viga AB, o momento fletor M_A se aproxima do momento fletor de engastamento. Portanto, os momentos T e M_A resultam do giro da viga AB em A e B, que deve ser compatível com o ângulo de torção das vigas CD e EF em A e B.

5. TORÇÃO SIMPLES (TORÇÃO DE ST. VENANT)

Numa barra de seção circular, como a indicada na Figura 17, submetida a momento de torção, com empenamento permitido (torção livre), surgem tensões principais inclinadas de 45° e 135° com o eixo longitudinal da barra. As trajetórias das tensões principais desenvolvem-se segundo uma curvatura helicoidal, em torno da barra. A trajetória das tensões principais de tração ocorre na direção da rotação e a compressão na direção contrária, ao longo de todo o perímetro da seção.

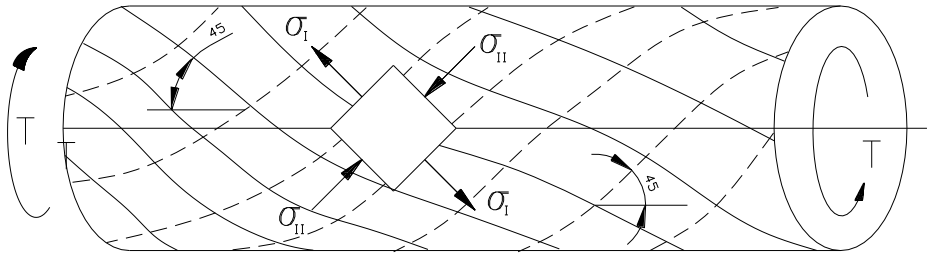


Figura 17 – Trajetórias das tensões principais na seção circular.

Se considerado um estado de tensão segundo a direção dos eixos longitudinal e transversal da seção, o momento de torção provoca o surgimento de tensões de cisalhamento em planos perpendiculares ao eixo da barra circular e em planos longitudinais, simultaneamente, como mostrado na Figura 18, Figura 19 e Figura 20.

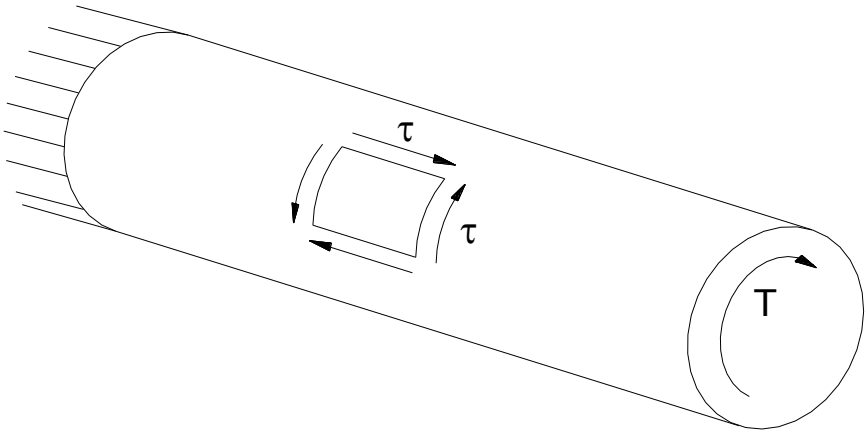


Figura 18 – Tensões de cisalhamento numa barra de seção circular sob torção.

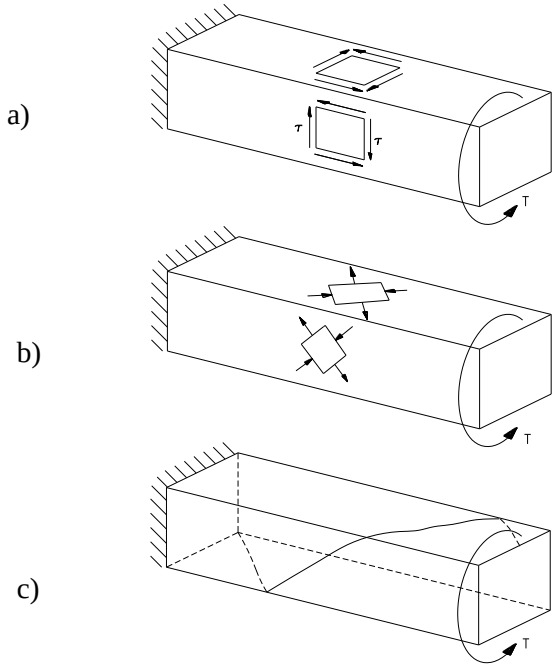


Figura 19 – Tensões devidas à torção: a) tensões de cisalhamento; b) tensões principais de tração e compressão; c) trajetória helicoidal das fissuras (MACGREGOR, 1997).

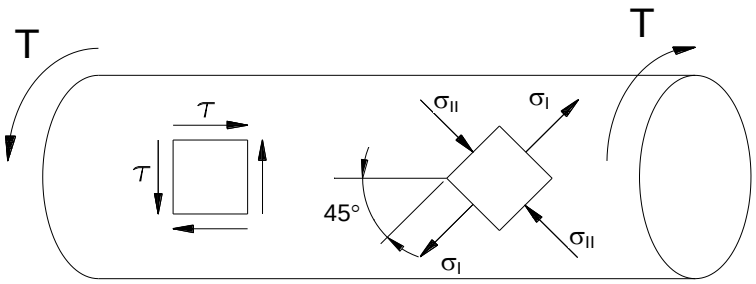


Figura 20 – Tensões de cisalhamento e tensões principais na seção circular.

A distribuição das tensões de cisalhamento em seções transversais circulares e quadradas ocorre como indicado na Figura 21. A tensão de cisalhamento é máxima nas superfícies externas da seção e zero nos vértices e no eixo que passa pelo centro de gravidade.

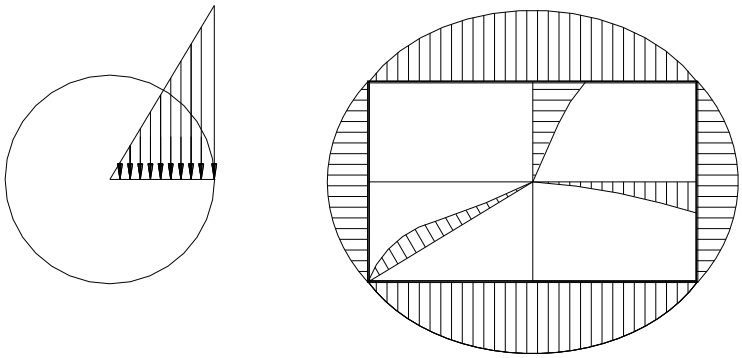


Figura 21 – Variação da tensão de cisalhamento na seção transversal.

Por questão de simplicidade, as vigas de Concreto Armado sob momento de torção são dimensionadas como se fossem ocas e de parede fina. Ao desprezar a parte correspondente à área interna da seção o erro cometido não é significativo nem antieconômico, porque a espessura da casca ou parede é determinada de forma que represente uma seção com grande percentual de resistência ao momento de torção. Este procedimento resulta num acréscimo de segurança que não é excessivo, sendo, portanto, pouco antieconômico.

6. TORÇÃO SIMPLES APLICADA A SEÇÕES VAZADAS DE PAREDE FINA

Considere a seção vazada mostrada na Figura 22, com espessura **t**, submetida ao momento de torção T.

Do equilíbrio estático da seção tem-se a igualdade da resultante das tensões τ com o momento de torção T que as originou:

$$T = \oint (\tau \, t \, ds) \, r \qquad \text{Eq. 1}$$

O produto τ . t (fluxo de cisalhamento ou de torção) é constante, e o produto ds . r é o dobro da área do triângulo OAB (d . A_e), vindo:

$$T = 2 \, \tau \, t \oint d \, A_e \qquad \text{Eq. 2}$$

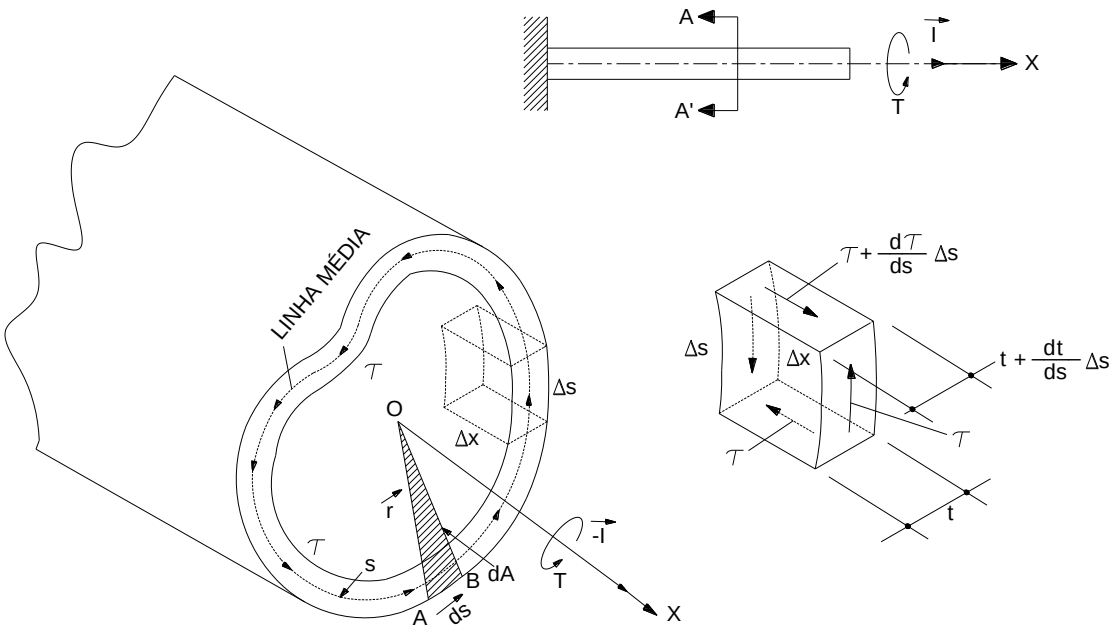


Figura 22 – Seção vazada com parede fina (SÁNCHEZ, 2001).

Da Eq. 2 surge a tensão de cisalhamento em qualquer ponto da parede fina, devida ao momento de torção:

$$\tau = \frac{T}{2\,t\,A_e} \qquad \text{Eq. 3}$$

com A_e sendo a área interna compreendida pelo eixo da parede fina, como indicada na Figura 23.

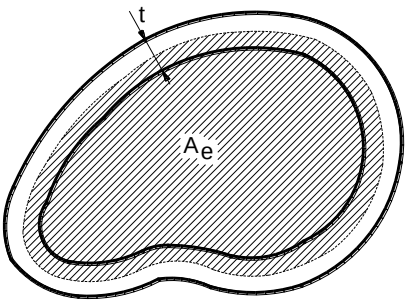


Figura 23 – Área A_e da seção vazada.

7. COMPORTAMETO DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO SUBMETIDAS À TORÇÃO SIMPLES

LEONHARDT e MÖNNIG (1982) descrevem os resultados de ensaios realizados por MÖRSCH, entre 1904 e 1921. Foram estudados cilindros ocos à torção simples, sem armadura, com armadura longitudinal, com armadura transversal, com ambas as armaduras e com armadura em forma de hélice, como mostrado na Figura 24.

Os ensaios confirmaram que nas seções de Concreto Armado as tensões principais de tração e de compressão são inclinadas de 45° e com traçado helicoidal. Após o surgimento das fissuras de torção que se desenvolvem em forma de hélice, apenas uma casca externa e com pequena espessura colabora na resistência da seção à torção. Isso ficou evidenciado em ensaios de seções ocas ou cheias com armaduras idênticas, que apresentaram as mesmas deformações e tensões nas armaduras.

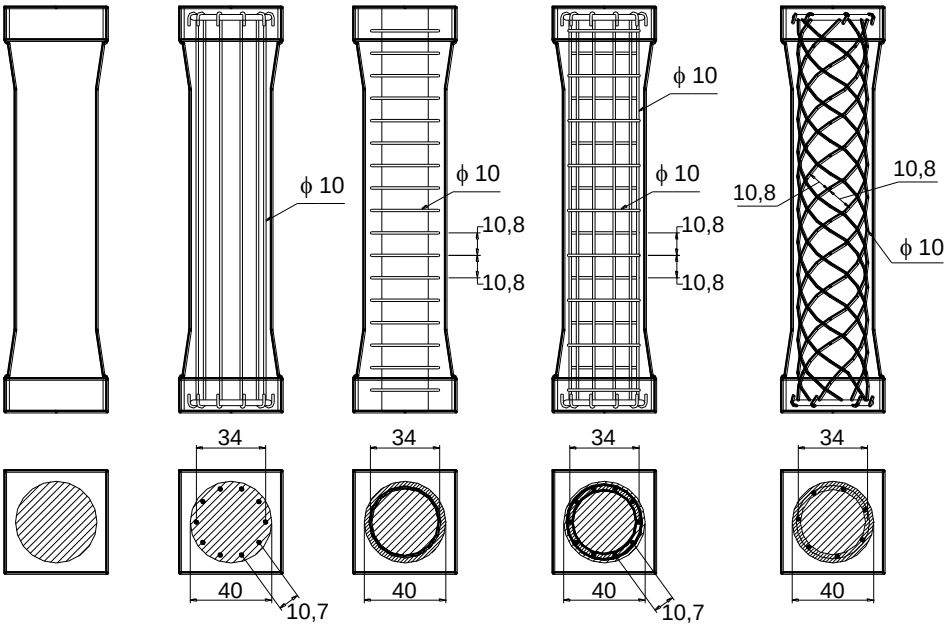


Figura 24 – Seções estudadas por MÖRSCH (LEONHARDT e MÖNNIG, 1982).

A Tabela 1 apresenta os resultados experimentais obtidos, para o momento de fissuração (momento de torção correspondente à primeira fissura) e para o momento de torção na ruptura.

Tabela 1 – Momentos torçores de primeira fissura e de ruptura (kN.cm) de seções ocas ensaiadas por MÖRSCH.

Seção	Momento Torçor de Primeira fissura	Momento Torçor de Ruptura
Sem armaduras	2330	2330
Com armadura longitudinal	2330	2380
Com armadura transversal	2500	2500
Com armaduras longitudinal e transversal	2470	3780
Com armadura helicoidal	2700	> 7000*
* A máquina de ensaio não levou a seção à ruptura		

Os ensaios demonstraram que: na seção oca sem armadura as fissuras são inclinadas a 45° e em forma de hélice; com somente uma armadura, seja longitudinal ou transversal, o aumento de resistência é muito pequeno e desprezível; com duas armaduras a resistência aumentou e, com armadura helicoidal, segundo a trajetória das tensões principais de tração, o aumento de resistência foi muito efetivo. Os valores contidos na Tabela 1 demonstram as observações.

Fissuras inclinadas podem se desenvolver quando a tensão principal de tração alcança a resistência do concreto à tração, levando uma viga não armada à ruptura. Se a viga for armada com barras longitudinais e estribos fechados transversais, a viga pode resistir a um aumento de carga após a fissuração inicial.

8. ANALOGIA DA TRELIÇA ESPACIAL PARA A TORÇÃO SIMPLES

Existem hoje basicamente duas teorias muito diferentes com o intuito de explicar o comportamento de uma viga sob torção. Uma delas é chamada de “Flexão Esconsa” (*skew bending theory*), e foi desenvolvida por LESSIG (1959) e atualizada por HSU (1968). A segunda teoria baseia-se na analogia da seção vazada (Teoria de Bredt) com uma treliça espacial, chamada de “Treliça Generalizada”. A teoria foi inicialmente elaborada por RAUSCH em 1929, estando em uso por diversas normas até os dias de hoje.

Como apresentado no item anterior os ensaios experimentais realizados mostraram que as seções cheias de concreto podem ser calculadas como seções vazadas de paredes finas. A Figura 25 mostra o modelo de uma seção cheia fissurada, sob torção simples. As tensões de compressão são resistidas pelo concreto da

casca e as tensões de tração são resistidas pelo conjunto armadura longitudinal e armadura transversal (estribos).

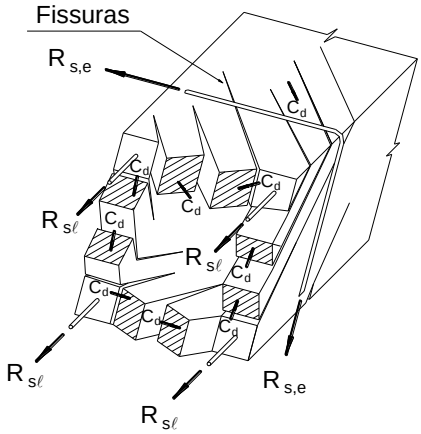


Figura 25 – Modelo resistente para a torção simples em viga de concreto fissurada (LEONHARDT e MÖNNIG, 1982).

A treliça clássica inicialmente concebida admitia que a viga apresentasse fissuras inclinadas de 45° com o eixo longitudinal (Figura 26). Os banzos paralelos representam a armadura longitudinal, as diagonais comprimidas desenvolvem-se em hélice, com inclinação de 45°, representando as bielas de compressão e os montantes verticais e horizontais representam estribos fechados a 90° com o eixo longitudinal da viga.

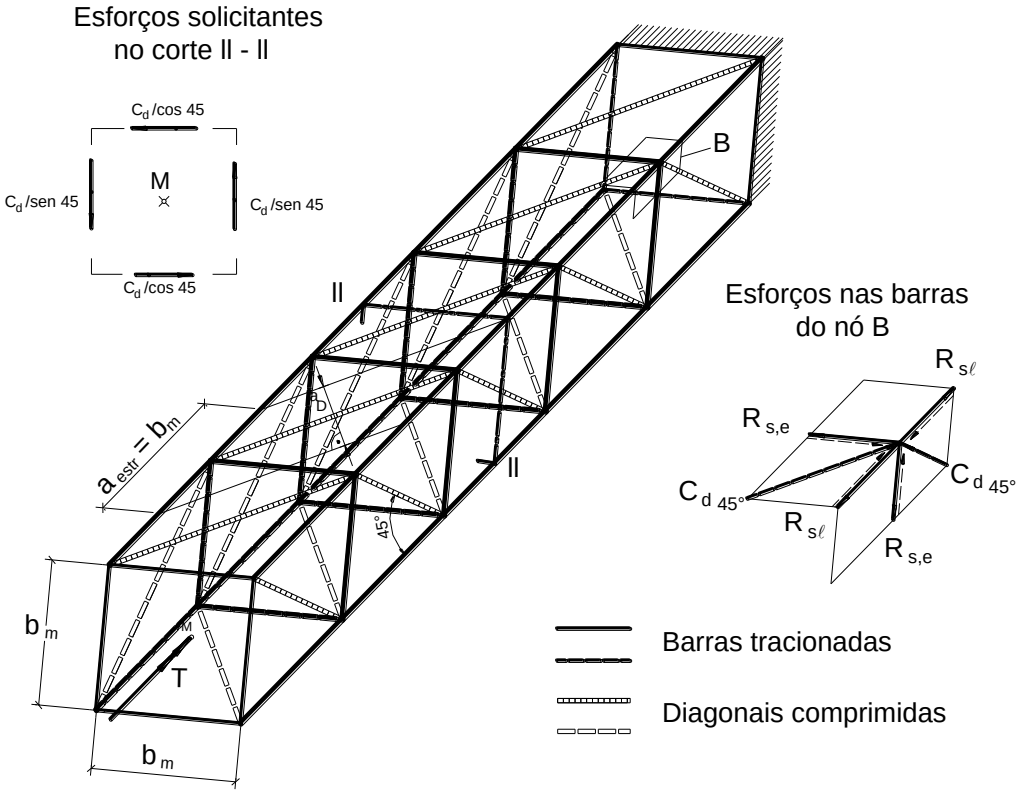


Figura 26 – Treliça espacial para viga com torção simples com armadura longitudinal e transversal. (LEONHARDT e MÖNNIG, 1982).

9. TORÇÃO COMBINADA COM MOMENTO FLETOR E FORÇA CORTANTE

A Figura 27 mostra as trajetórias das fissuras numa viga de concreto de seção retangular. As fissuras apresentam-se com trajetórias inclinadas de aproximadamente 45° com o eixo longitudinal da viga.

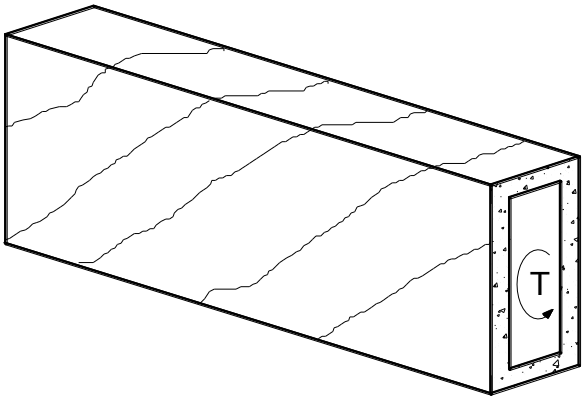


Figura 27 – Trajetórias das fissuras na viga vazada de seção retangular.

Quando o valor do momento fletor é elevado comparativamente ao momento de torção, a zona comprimida pelo momento fletor fica isenta de fissuras, como mostrado na Figura 28.

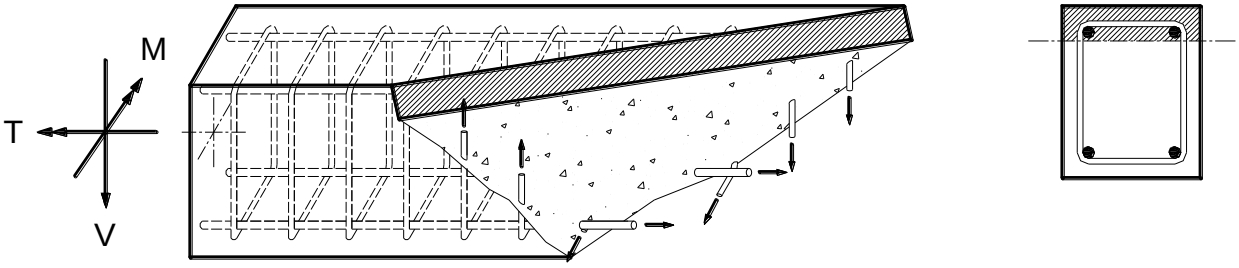


Figura 28 – Modelo para vigas com altos momentos fletores (LEONHARDT e MÖNNIG, 1982).

No caso da força cortante elevada, uma face vertical deverá ficar isenta de fissuras, sendo aquela onde as tensões de cisalhamento da torção e do esforço cortante têm sentidos contrários. Isso fica demonstrado nos modelos de treliça adotados, onde as diagonais comprimidas da treliça para o cortante opõem-se às diagonais tracionadas da treliça espacial da torção.

As fissuras nesses casos apresentam-se contínuas, em forma de hélice e em três das quatro faces da viga. Numa face, onde as tensões de compressão superam a de tração, não surgem fissuras (Figura 29).

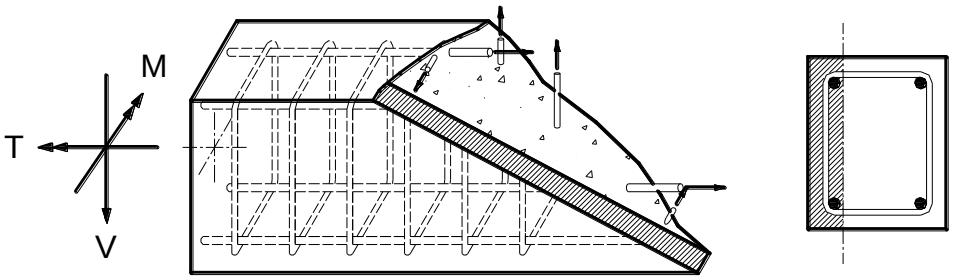


Figura 29 – Modelo para vigas com altas forças cortantes (LEONHARDT e MÖNNIG, 1982).

10. FORMA DE RUPTURA POR TORÇÃO

Após a fissuração a ruptura de uma viga sob *torção pura* pode ocorrer de alguns modos diferentes, na armadura ou no concreto. No caso da armadura pode ocorrer escoamento dos estribos, da armadura longitudinal ou de ambas as armaduras. No caso de vigas superarmadas à torção, o concreto comprimido compreendido entre as fissuras inclinadas pode esmagar pelo efeito das tensões principais de compressão,

antes do escoamento das armaduras. Além desses modos, outras causas de ruptura podem ocorrer, como descritos a seguir.

10.1. Ruptura por Tração

Após o surgimento das primeiras fissuras pode ocorrer uma ruptura brusca por efeito de torção, que pode ser evitada com a colocação de uma armadura mínima, a fim de resistir às tensões de tração por torção.

Segundo Leonhardt e Mönnig (1982), sendo as armaduras longitudinal e transversal diferentes, a menor armadura determinará o tipo de ruptura, e uma pequena diferença nas armaduras, pode, no entanto, ser compensada por uma redistribuição de esforços.

Ao contrário do comportamento da viga sob força cortante, onde a inclinação do banzo comprimido de concreto pode diminuir a intensidade da tração na alma da viga, na torção essa diminuição não pode ocorrer, dado que na analogia de treliça espacial não existe banzo comprimido inclinado.

10.2. Ruptura por Compressão

Com armaduras colocadas longitudinalmente e transversalmente na viga pode surgir um forte empenamento das faces laterais, ocasionando tensões adicionais ao longo das bielas comprimidas, podendo ocorrer o esmagamento do concreto (Figura 30).

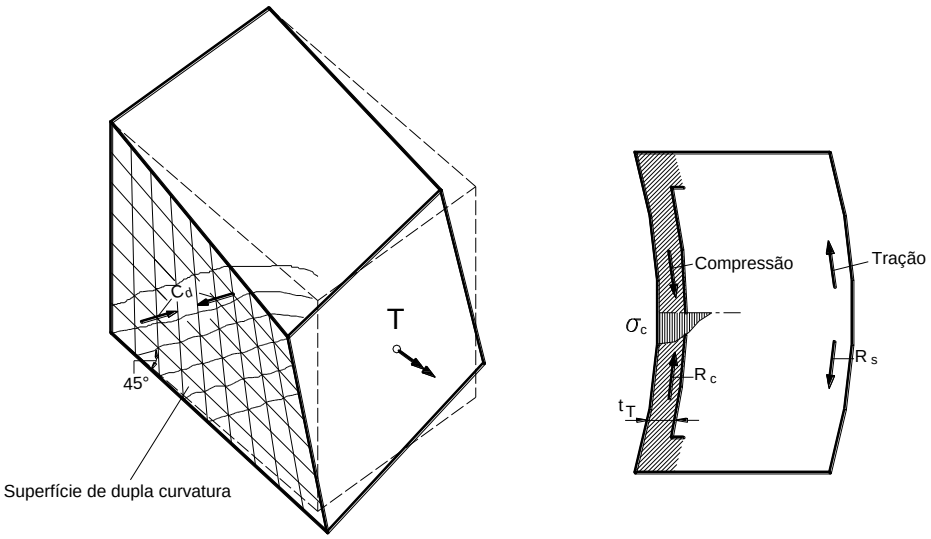


Figura 30 – Empenamento da viga originando tensões adicionais de flexão. (LEONHARDT e MÖNNIG, 1982).

10.3. Ruptura dos Cantos

A mudança de direção das tensões de compressão nos cantos, como indicada na Figura 31, origina uma força (U) que pode levar ao rompimento dos cantos da viga. Os estribos e as barras longitudinais dos cantos contribuem para evitar essa forma de ruptura. Vigas com tensões de cisalhamento da torção muito elevadas devem ter o espaçamento dos estribos limitados a 10 cm para evitar essa forma de ruptura.

10.4. Ruptura da Ancoragem

Esta forma de ruptura pode ocorrer por insuficiência da ancoragem do estribo, levando ao seu "escorregamento", e pelo deslizamento das barras longitudinais. O cuidado na ancoragem das armaduras pode evitar essa forma de ruptura.

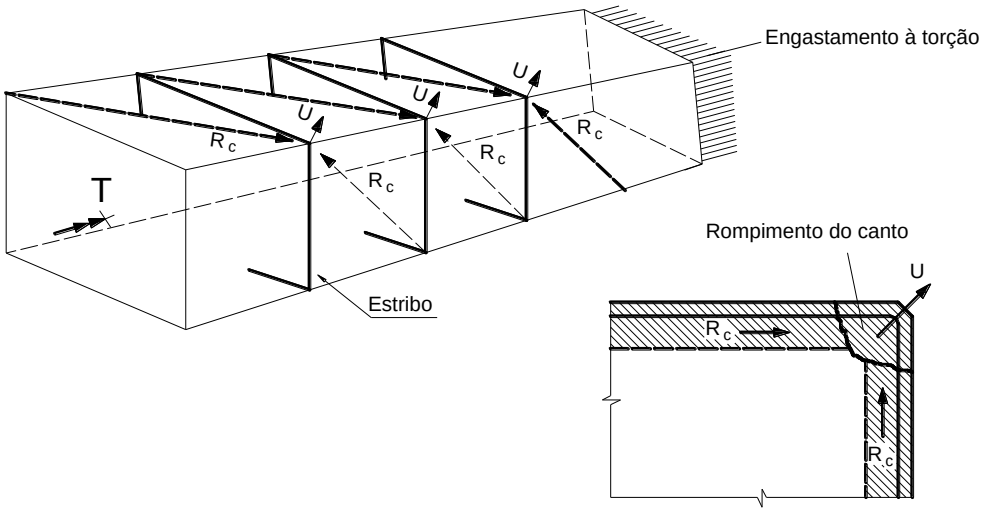


Figura 31 – Possível ruptura do canto devida à mudança de direção das diagonais comprimidas. (LEONHARDT e MÖNNIG, 1982).

11. TORÇÃO SIMPLES – DEFINIÇÃO DE FORÇAS E TENSÕES NA TRELIÇA GENERALIZADA

Nas décadas de 60 e 70 do século passado a treliça clássica foi generalizada por LAMPERT, THÜRLIMANN e outros, com a admissão de ângulos (θ) variáveis para a inclinação das bielas de concreto (Figura 32), sendo a treliça generalizada assim formada o modelo atualmente adotado pelas principais normas internacionais, como ACI 318/11 e MC-90 do CEB (1990). A NBR 6118[1] também considera o modelo de treliça generalizada para o dimensionamento de vigas de concreto à torção, em concordância com a treliça plana generalizada concebida na análise da força cortante.

11.1 Diagonais de Compressão

Considerando o plano ABCD da treliça espacial generalizada indicada na Figura 32, e que o esforço interno resistente deve ser igual ao esforço solicitante externo (momento de torção T_{Sd}), tem-se:[2]

$$T_{Sd} = 2\, C_d \text{ sen } \theta \,.\, \ell \qquad \text{Eq. 4}$$

A força nas diagonais comprimidas surge da Eq. 4:

$$C_d = \frac{T_{Sd}}{2\, \ell \text{ sen } \theta} \qquad \text{Eq. 5}$$

C_d = força na diagonal comprimida;
T_{Sd} = momento de torção de cálculo;
θ = ângulo de inclinação da diagonal comprimida;
ℓ = distância entre os banzos.

A força de compressão C_d nas diagonais atua sobre uma seção transversal de área:

$$y \,.\, t = \ell \cos \theta \,.\, t \qquad \text{Eq. 6}$$

$y = \ell \cos \theta$ = largura de influência de cada diagonal inclinada da treliça espacial;
t = espessura da casca ou da parede da seção oca.

[1] ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *Projeto de estruturas de concreto*. NBR 6118, ABNT, 2023, 242p.
[2] Cada par de forças paralelas C_d sen θ proporciona um momento interno resistente.

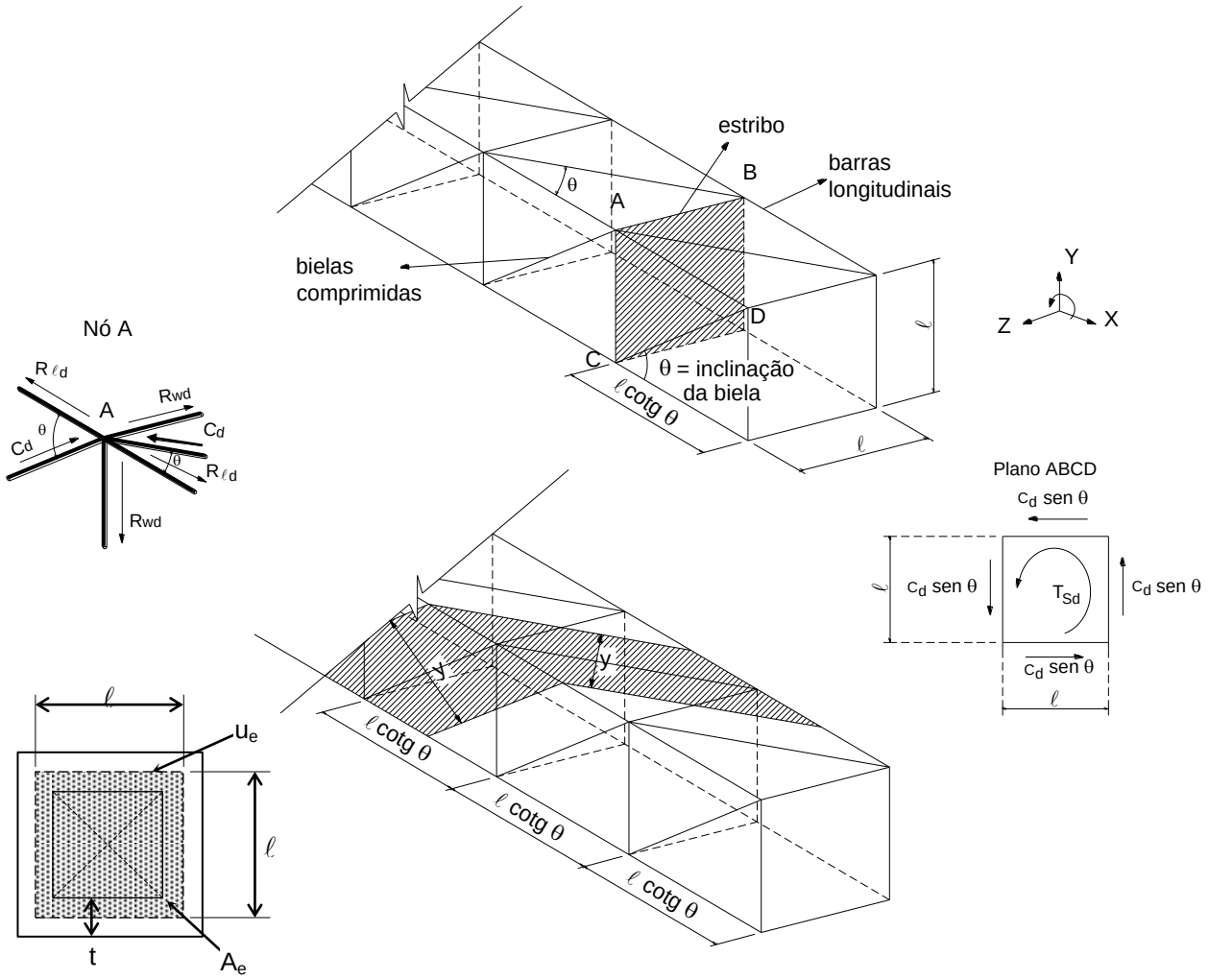


Figura 32 – Treliça espacial generalizada (LIMA et al., 2000).

A força C_d origina a tensão de compressão no concreto das diagonais da treliça (σ_{cd}), igual a:

$$\sigma_{cd} = \frac{C_d}{y\,t} = \frac{C_d}{\ell \cos\theta\, t}$$

e considerando o valor de C_d dado na Eq. 5 a tensão de compressão na diagonal (σ_{cd}) é:

$$\sigma_{cd} = \frac{T_{Sd}}{(\ell \cos\theta \,.\, t)\, 2\, \ell \,\text{sen}\, \theta}$$

$$\sigma_{cd} = \frac{T_{Sd}}{\ell^2\, t\, \text{sen}\, 2\,\theta} \qquad \text{Eq. 7}$$

como $\ell^2 = A_e$, determina-se a forma final para a tensão na diagonal comprimida:

$$\sigma_{cd} = \frac{T_{Sd}}{A_e\, t\, \text{sen}\, 2\,\theta} \qquad \text{Eq. 8}$$

A Eq. 3 pode ser escrita como: $T_{Sd} = \tau_t\, 2\, A_e\, t$, de modo que a Eq. 8 pode ser reescrita como:

$$\sigma_{cd} = \frac{2\,\tau_{td}}{\text{sen}\, 2\,\theta} \qquad \text{Eq. 9}$$

11.2 Armadura longitudinal

Conforme as forças indicadas no nó A da Figura 32, fazendo o equilíbrio de forças na direção x tem-se:

$$4\,R_{\ell d} = 4\,C_d \cos\theta \qquad \text{Eq. 10}$$

com $R_{\ell d}$ = resultante em um banzo longitudinal. Como $4\,R_{\ell d} = A_{s\ell}\,f_{ywd}$, a Eq. 10 fica:

$$A_{s\ell}\,f_{ywd} = 4\,C_d \cos\theta \qquad \text{Eq. 11}$$

Substituindo C_d (Eq. 5) fica:

$$A_{s\ell}\,f_{ywd} = 4\,\frac{T_{Sd}}{2\,\ell\,\text{sen}\,\theta}\cos\theta$$

Isolando a armadura longitudinal:

$$A_{s\ell} = \frac{2\,T_{Sd}}{\ell\,f_{ywd}}\,\text{cotg}\,\theta \qquad \text{Eq. 12}$$

Com o objetivo de evitar fissuração entre os vértices da seção vazada, a armadura deve ser distribuída no perímetro $u_e = 4\ell$, de modo que a taxa de armadura longitudinal por comprimento do eixo médio da seção vazada é:

$$\frac{A_{s\ell}}{u_e} = \frac{2\,T_{Sd}}{\ell\,f_{ywd}\,u_e}\,\text{cotg}\,\theta = \frac{2\,T_{Sd}}{\ell\,f_{ywd}\,4\,\ell}\,\text{cotg}\,\theta$$

$$\frac{A_{s\ell}}{u_e} = \frac{T_{Sd}}{2\,A_e\,f_{ywd}}\,\text{cotg}\,\theta \qquad \text{Eq. 13}$$

ou

$$\frac{A_{s\ell}}{u_e} = \frac{T_{Sd}}{2\,A_e\,f_{ywd}\,\text{tg}\,\theta} \qquad \text{Eq. 14}$$

$A_{s\ell}$ = área total de armadura longitudinal;
A_e = área interna delimitada pelo eixo da parede fina (ver Figura 23);
u_e = perímetro do contorno da área A_e .

11.3 Estribos

Na Figura 32, fazendo o equilíbrio do nó A na direção do eixo Z, tem-se:

$$R_{wd} = C_d\,\text{sen}\,\theta \qquad \text{Eq. 15}$$

onde R_{wd} representa a força nos montantes verticais e horizontais da treliça espacial.

Substituindo C_d (Eq. 5) tem-se:

$$R_{wd} = \frac{T_{Sd}}{2\,\ell\,\text{sen}\,\theta}\,\text{sen}\,\theta = \frac{T_{Sd}}{2\,\ell} \qquad \text{Eq. 16}$$

Sendo **s** o espaçamento dos estribos e (ℓ . cotg θ) o comprimento de influência das barras transversais da treliça que representam os estribos, onde atuam as forças R_{wd} (ver Figura 32), o número de estribos neste comprimento é (ℓ . cotg θ)/s. Sendo $A_{s,90}$ a área referente a um estribo, a força é:

$$R_{wd} = \frac{\ell \cot g\, \theta}{s} A_{s,90}\, f_{ywd} \qquad \text{Eq. 17}$$

Igualando as Eq. 16 e Eq. 17 e isolando a armadura transversal relativamente ao espaçamento **s** dos estribos tem-se:

$$\frac{T_{Sd}}{2\,\ell} = \frac{\ell \cot g\, \theta}{s} A_{s,90}\, f_{ywd} \quad \rightarrow \quad \frac{A_{s,90}}{s} = \frac{T_{Sd}}{2\,\ell\,\ell \cot g\, \theta\, f_{ywd}}$$

Com $\ell^2 = A_e$, fica:

$$\frac{A_{s,90}}{s} = \frac{T_{Sd}}{2\, A_e\, f_{ywd}} \operatorname{tg} \theta \qquad \text{Eq. 18}$$

com $A_{s,90}$ sendo a área de um ramos vertical ou horizontal do estribo a 90° com o eixo longitudinal da viga.

12. DIMENSIONAMENTO DE ELEMENTOS LINEARES À TORÇÃO UNIFORME NO ESTADO-LIMITE ÚLTIMO (ELU) SEGUNDO A NBR 61118

A NBR 6118 separa o estudo dos elementos lineares sujeitos à torção em "*Torção Uniforme*" (item 17.5.1) e "*Torção em Perfis Abertos de Parede Fina*" (17.5.2). No texto subsequente será considerado apenas o dimensionamento à Torção Uniforme.

As condições da NBR 6118 (item 17.5.1.1) "*pressupõem um modelo resistente constituído por treliça espacial, definida a partir de um elemento estrutural de seção vazada equivalente ao elemento estrutural a dimensionar. As diagonais de compressão dessa treliça, formada por elementos de concreto, têm inclinação que pode ser arbitrada pelo projeto no intervalo de* $30° \leq \theta \leq 45°$." Esse modelo é o da treliça espacial generalizada, descrito anteriormente. O engenheiro projetista tem a liberdade de escolher o ângulo de inclinação das bielas de compressão, que deve ser igual ao ângulo adotado no dimensionamento da viga à força cortante.

12.1. Geometria da Seção Resistente

No caso de seções poligonais convexas cheias (NBR 6118, 17.5.1.4.1), "*A seção vazada equivalente se define a partir da seção cheia com espessura da parede equivalente* h_e *dada por*:"

$$h_e \leq \frac{A}{u} \qquad \text{Eq. 19}$$

$$h_e \geq 2\, c_1 \qquad \text{Eq. 20}$$

A = área da seção cheia;
u = perímetro da seção cheia;
c_1 = distância entre o eixo da barra longitudinal do canto e a face lateral do elemento estrutural.

"*Caso A/u resulte menor que* $2c_1$ *, pode-se adotar* $h_e = A/u \leq b_w - 2c_1$ *e a superfície média da seção celular equivalente* A_e *definida pelos eixos das armaduras do canto (respeitando o cobrimento exigido nos estribos).*"

No item 17.5.1.4.2 a norma também define como deve ser considerada a seção resistente de "*Seção Composta de Retângulos*", no item 17.5.1.4.3 as "*Seções Vazadas*", e no item 17.5.2 a "*Torção em Perfis Abertos de Parede Fina*".

12.2. Torção de Compatibilidade

No caso de torção de compatibilidade a NBR 6118 (17.5.1.2) diz que é possível desprezá-la: "*Quando a torção não for necessária ao equilíbrio, caso da torção de compatibilidade, é possível desprezá-la, desde que o elemento estrutural tenha a capacidade adequada de adaptação plástica e que todos os*

outros esforços sejam calculados sem considerar os efeitos por ela provocados. Em regiões onde o comprimento do elemento sujeito à torção seja menor ou igual a 2h, para garantir um nível razoável de capacidade de adaptação plástica, deve-se respeitar a armadura mínima de torção e limitar a força cortante, tal que:"

$$V_{Sd} \leq 0{,}7\ V_{Rd2} \qquad \text{Eq. 21}$$

onde V_{Sd} é a força cortante atuante no elemento e V_{Rd2} é a máxima força cortante admitida pela diagonal de compressão.

12.3. Torção de Equilíbrio

Segundo a NBR 6118 (17.5.1.2), "*Sempre que a torção for necessária ao equilíbrio do elemento estrutural, deve existir armadura destinada a resistir aos esforços de tração oriundos da torção. Essa armadura deve ser constituída por estribos verticais periféricos normais ao eixo do elemento estrutural e barras longitudinais distribuídas ao longo do perímetro da seção resistente, [...]*"

E no item 17.5.1.3 da NBR 6118 para a Torção Pura: "*Admite-se satisfeita a resistência de um elemento estrutural, em uma dada seção, quando se verificarem simultaneamente as seguintes condições:*"

$$T_{Sd} \leq T_{Rd,2}$$
$$T_{Sd} \leq T_{Rd,3}$$
$$T_{Sd} \leq T_{Rd,4}$$

$T_{Rd,2}$ = limite dado pela resistência das diagonais comprimidas de concreto;
$T_{Rd,3}$ = limite definido pela parcela resistida pelos estribos normais ao eixo do elemento estrutural;
$T_{Rd,4}$ = limite definido pela parcela resistida pelas barras longitudinais, paralelas ao eixo do elemento estrutural.

A resistência proveniente das diagonais comprimidas de concreto deve ser obtida pela Eq. 8, fazendo a tensão de compressão na diagonal de concreto ficar limitada ao valor máximo dado por $0{,}5\alpha_{v2}\ f_{cd}$. Assim, o máximo momento de torção que uma seção pode resistir, sem que ocorra o esmagamento das diagonais comprimidas é (17.5.1.5):

$$T_{Rd,2} = 0{,}5\alpha_{v2} \cdot f_{cd} \cdot A_e \cdot h_e \cdot \text{sen}\ 2\ \theta \qquad \text{Eq. 22}$$

$\alpha_{v2} = 1 - (f_{ck}/250)$, f_{ck} em MPa;
θ = ângulo de inclinação das diagonais de concreto, arbitrado no intervalo $30° \leq \theta \leq 45°$;
A_e = área limitada pela linha média da parede da seção vazada, real ou equivalente, incluindo a parte vazada;
h_e = espessura equivalente da parede da seção vazada, real ou equivalente, no ponto considerado.

Segundo a NBR 6118 (17.5.1.6), "*Devem ser consideradas efetivas as armaduras contidas na área correspondente a uma única parede equivalente, sendo que:*"

A resistência decorrente dos estribos normais ao eixo do elemento estrutural deve atender à expressão seguinte, semelhante à Eq. 18 já desenvolvida:

$$T_{Rd,3} = (A_{s,90}/s)\ f_{ywd}\ 2A_e\ \text{cotg}\ \theta \qquad \text{Eq. 23}$$

e com $T_{Sd} = T_{Rd,3}$ calcula-se a área da armadura transversal:

$$\frac{A_{s,90}}{s} = \frac{T_{Sd}}{2A_e\ f_{ywd}}\ \text{tg}\,\theta \qquad \text{Eq. 24}$$

$A_{s,90}$ = área da seção transversal do número total de ramos de um estribo perpendicular ao eixo da peça, contidos em uma única parede equivalente;
f_{ywd} = resistência de cálculo de início de escoamento do aço da armadura passiva, limitada a 435 MPa.

Para o ângulo θ de inclinação das diagonais comprimidas igual a 45° a Eq. 24 transforma-se em:

$$\frac{A_{s,90}}{s} = \frac{T_{Sd}}{2A_e\, f_{ywd}} \qquad \text{Eq. 25}$$

Conforme a NBR 6118 (17.5.1.6), a resistência decorrente da armadura longitudinail deve atender à expressão seguinte, já deduzida na Eq. 14:

$$T_{Rd,4} = (A_{s\ell}/u_e)\, 2A_e\, f_{ywd}\, \text{tg}\,\theta \qquad \text{Eq. 26}$$

e com $T_{Sd} = T_{Rd,4}$ calcula-se a área de armadura longitudinal:

$$\frac{A_{s\ell}}{u_e} = \frac{T_{Sd}}{2A_e\, f_{ywd}\, \text{tg}\,\theta} \qquad \text{Eq. 27}$$

$A_{s\ell}$ = soma das áreas das barras longitudinais;
u_e = perímetro da área A_e.

Para o ângulo θ de inclinação das diagonais comprimidas igual a 45° a Eq. 27 transforma-se em:

$$\frac{A_{s\ell}}{u_e} = \frac{T_{Sd}}{2A_e\, f_{ywd}} \qquad \text{Eq. 28}$$

12.4. Armaduras Mínimas

Segundo a NBR 6118 (item 17.5.1.2), as taxas geométricas mínimas para as armaduras resistentes aos esforços de tração oriundos da torção são dadas pelas expressões:[3]

$$\left.\begin{aligned} \rho_{s\ell} &= \frac{A_{s\ell}}{h_e\, u_e} \\ \rho_{sw} &= \frac{A_{sw}}{b_w\, s} \end{aligned}\right\} \geq 0{,}2\,\frac{f_{ct,m}}{f_{ywk}} \quad \text{, com } f_{ywk} \leq 500 \text{ MPa} \qquad \text{Eq. 29}$$

Fazendo $A_{s\ell,mín} = A_{s\ell}$ na Eq. 29, a armadura longitudinal mínima fica:

$$\frac{A_{s\ell,mín}}{u_e} = \frac{0{,}2\, f_{ct,m}}{f_{ywk}}\, h_e \qquad \text{Eq. 30}$$

u_e = perímetro da área A_e;
$f_{ct,m}$ = resistência média do concreto à tração;
f_{ywk} = resistência de início de escoamento do aço da armadura (≤ 500 MPa);
h_e = espessura equivalente da parede da seção vazada, real ou equivalente, no ponto considerado.

Na Eq. 29 a área de armadura transversal A_{sw} refere-se à força cortante, onde **A_{sw} representa a área total dos ramos verticais do estribo**, ou seja, ramos verticais contidos na região interna da largura da viga também estão considerados.[4] No caso da torção a armadura transversal **$A_{s,90}$ representa a área total dos ramos verticais do estribo contidos dentro da parede equivalente**.[5] Considerando A_{sw} como $A_{s,90mín}$ na Eq. 29, ou seja, $A_{s,90mín}$ como a área mínima relativa aos ramos (verticais e horizontais) do estribo, contidos na parede equivalente, tem-se:[6]

[3] O propósito da armadura mínima é evitar a ruptura brusca por tração.
[4] Normais ao eixo longitudinal do elemento estrutural.
[5] Na torção os ramos do estribo devem estar dentro da parede equivalente, e geralmente eles têm apenas dois ramos verticais.
[6] Os ramos verticais devem ser perpendiculares ao eixo longitudinal da peça.

$$\frac{A_{s,90mín}}{s} = \frac{0{,}2\, f_{ct,m}}{f_{ywk}}\, b_w \qquad \text{Eq. 31}$$

s = espaçamentos dos estribos verticais;
$f_{ct,m}$ = resistência média do concreto à tração;
f_{ywk} = resistência de início de escoamento do aço da armadura (≤ 500 MPa);
b_w = largura média da alma.

Fazendo o espaçamento **s** e o perímetro $\mathbf{u_e}$ iguais a 100 cm (1 m) na Eq. 30 e Eq. 31, as armaduras mínimas ficam:

$$A_{s\ell,mín} = \frac{20\, f_{ct,m}}{f_{ywk}}\, h_e \qquad \text{Eq. 32}$$

$$A_{s,90mín} = \frac{20\, f_{ct,m}}{f_{ywk}}\, b_w \qquad \text{Eq. 33}$$

com $A_{s\ell,mín}$ e $A_{s,90mín}$ em cm^2/m ; b_w e h_e em cm ; f_{ywk} e $f_{ct,m}$ em kN/cm^2;

$f_{ct,m} = 0{,}3\sqrt[3]{f_{ck}^{\,2}}$ (com f_{ck} em MPa)

12.5. Solicitações Combinadas

As solicitações combinadas com torção encontram-se descritas no item 17.7 da NBR 6118.

12.5.1 Flexão e Torção

Conforme a NBR 6118 (17.7.1.1): "*Nos elementos estruturais submetidos à torção e à flexão simples ou composta, as verificações podem ser efetuadas separadamente para a torção e para as solicitações normais, devendo ser atendidas complementarmente as prescrições de 17.7.1.2 a 17.7.1.4.*", descritas a seguir:

- Armadura longitudinal: "*Na zona tracionada pela flexão, a armadura de torção deve ser acrescentada à armadura necessária para solicitações normais, considerando-se em cada seção os esforços que agem concomitantemente.*"

- Armadura longitudinal no banzo comprimido pela flexão: "*No banzo comprimido pela flexão, a armadura longitudinal de torção pode ser reduzida em função dos esforços de compressão que atuam na espessura efetiva* $\boldsymbol{h_e}$ *no trecho de comprimento* Δu *correspondente à barra ou feixe de barras consideradas.*"

- Resistência do banzo comprimido: "*Nas seções em que a torção atua simultaneamente com solicitações normais intensas, que reduzem excessivamente a profundidade da linha neutra, particularmente em vigas de seção celular, o valor de cálculo da tensão principal de compressão não pode superar os valores estabelecidos na Seção 22. Essa tensão principal deve ser calculada como em um estado plano de tensões, a partir da tensão normal média que age no banzo comprimido de flexão e da tensão tangencial de torção calculada por:*"

$$\tau_{Td} = \frac{T_d}{2A_e\, h_e} \qquad \text{Eq. 34}$$

12.5.2 Torção e Força Cortante

Conforme a NBR 6118 (17.7.2): "*Na combinação de torção com força cortante, o projeto deve prever ângulos de inclinação das bielas de concreto* θ *coincidentes para os dois esforços. Quando for utilizado o modelo I (ver 17.4.2.2) para a força cortante, que subentende* $\theta = 45^o$*, esse deve ser o valor considerado também para a torção.*

A resistência à compressão diagonal do concreto deve ser satisfeita atendendo à expressão:"

$$\frac{V_{Sd}}{V_{Rd2}} + \frac{T_{Sd}}{T_{Rd2}} \leq 1 \qquad \text{Eq. 35}$$

onde V_{Sd} é a força cortante de cálculo e T_{Sd} é o momento de torção de cálculo.

"*A armadura transversal pode ser calculada pela soma das armaduras calculadas separadamente para V_{Sd} e T_{Sd} .*"

Nessa questão é importante salientar que: a área de armadura transversal calculada para a força cortante refere-se à área total, contando todos os ramos verticais do estribo. Já no caso da torção a área de armadura transversal calculada é apenas do ramo vertical contido em uma parede fina de espessura h_e . Portanto, para cálculo da armadura transversal total deve-se tomar o cuidado de somar as áreas de apenas um ramo vertical do estribo, para ambos os esforços de força cortante e momento de torção.

12.6. Fissuração Inclinada da Alma

Conforme a NBR 6118 (17.6), na verificação do Estado-Limite de Fissuração inclinada da alma por solicitação combinada de força cortante com torção, "*Usualmente, não é necessário verificar a fissuração diagonal da alma de elementos estruturais de concreto. Em casos especiais, em que isso for considerado importante, deve-se limitar o espaçamento da armadura transversal a 15 cm.*"

12.7. Disposições Construtivas

As disposições construtivas para a torção em vigas constam no item 18.3.4 da NBR 6118. "*A armadura destinada a resistir aos esforços de tração provocados por torção deve ser constituída por estribos normais ao eixo da viga, combinados com barras longitudinais paralelas ao mesmo eixo, e deve ser projetada de acordo com as prescrições de 17.5.*"

Os estribos e as barras da armadura longitudinal devem estar contidos no interior da parede fictícia da seção vazada equivalente. "*Consideram-se efetivos na resistência os ramos dos estribos e as armaduras longitudinais contidos no interior da parede fictícia da seção vazada equivalente (ver 17.5.1.4).*"

Para prevenir a ruptura dos cantos é necessário alojar quatro barras longitudinais nos vértices das seções retangulares. Segundo LEONHARDT e MÖNNIG (1982), para seções de grandes dimensões é necessário distribuir a armadura longitudinal ao longo do perímetro da seção, a fim de limitar a fissuração.

12.7.1 Estribos

"*Os estribos para torção devem ser fechados em todo o seu contorno, envolvendo as barras das armaduras longitudinais de tração, e com as extremidades adequadamente ancoradas por meio de ganchos em ângulo de 45°. As seções poligonais devem conter, em cada vértice dos estribos de torção, pelo menos uma barra.*" (NBR 6118, 18.3.4).

As prescrições para diâmetro e espaçamento dos estribos são as mesmas do dimensionamento à força cortante: "*Devem ser obedecidas as prescrições de 18.3.3.2, relativas ao diâmetro das barras que formam o estribo e ao espaçamento longitudinal dos mesmos.*", com:

$$\phi_t \begin{cases} \geq 5\ \text{mm} \\ < \dfrac{b_w}{10} \\ \leq 12\ \text{mm para barra lisa} \\ \geq 4{,}2\ \text{mm para estribos formados por telas soldada} \end{cases} \qquad \text{Eq. 36}$$

onde b_w é a largura da alma da viga.

O espaçamento entre os estribos deve possibilitar a passagem da agulha do vibrador, a fim de garantir um bom adensamento do concreto. O espaçamento máximo deve atender as seguintes condições:

$$\begin{aligned} &- \text{se } V_{Sd} \leq 0{,}67\, V_{Rd2} \quad \rightarrow \quad s_{máx} = 0{,}6d \leq 30 \text{ cm;} \\ &- \text{se } V_{Sd} > 0{,}67\, V_{Rd2} \quad \rightarrow \quad s_{máx} = 0{,}3d \leq 20 \text{ cm.} \end{aligned} \qquad \text{Eq. 37}$$

O espaçamento transversal (s_t) entre os ramos verticais sucessivos dos estribos não pode exceder os seguintes valores:

$$V_{Sd} \begin{cases} \leq 0{,}20\, V_{Rd2} \quad \rightarrow \quad s_{t,máx} = d \leq 80\,\text{cm} \\ > 0{,}20\, V_{Rd2} \quad \rightarrow \quad s_{t,máx} = 0{,}6\, d \leq 35\,\text{cm} \end{cases} \qquad \text{Eq. 38}$$

12.7.2 Armadura Longitudinal

"*A armadura longitudinal de torção, de área total $A_{s\ell}$, pode ter arranjo distribuído ou concentrado, mantendo-se obrigatoriamente constante a relação $\Delta A_{s\ell}/\Delta u$, onde Δu é o trecho de perímetro, da seção efetiva, correspondente a cada barra ou feixe de barras de área $\Delta A_{s\ell}$. Nas seções poligonais, em cada vértice dos estribos de torção, deve ser colocada pelo menos uma barra longitudinal*." (NBR 6118, 17.5.1.6).

"*As barras longitudinais da armadura de torção podem ter arranjo distribuído ou concentrado ao longo do perímetro interno dos estribos, espaçadas no máximo em 350 mm. Deve-se respeitar a relação $\Delta A_{s\ell}/\Delta u$, onde Δu é o trecho de perímetro da seção efetiva correspondente a cada barra ou feixe de barras de área $\Delta A_{s\ell}$, exigida pelo dimensionamento*." (NBR 6118, 18.3.4).

13. MOMENTO DE INÉRCIA À TORÇÃO

O momento de inércia à torção (J) e o módulo de inércia à torção (W_t) de vigas com seção retangular podem ser calculados com base nas equações:

$$J = j\, b^3 h \qquad \text{Eq. 39}$$

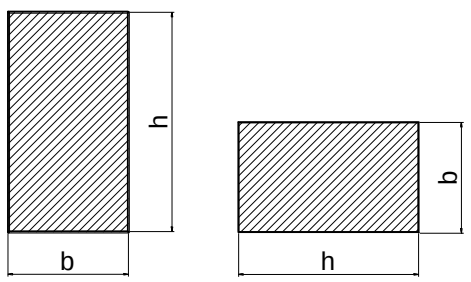
$$W_t = w\, b^2 h \qquad \text{Eq. 40}$$

$$n = \frac{b}{h}$$

j = parâmetro dependente da relação **n** entre as dimensões dos lados do retângulo, conforme a Tabela 2;
b = menor dimensão da seção retangular;
h = maior dimensão da seção retangular.

Tabela 2 – Valores de w e j.

n	w	j
0,0	0,333	0,333
0,1	0,312	0,312
0,2	0,291	0,291
0,3	0,273	0,270
0,4	0,258	0,249
0,5	0,246	0,229
0,6	0,237	0,209
0,7	0,229	0,189
0,8	0,221	0,171
0,9	0,214	0,155
1,0	0,208	0,141



14. EXEMPLO NUMÉRICO 1

Apresentam-se a seguir três exemplos numéricos de aplicação sobre o dimensionamento de vigas de Concreto Armado quando solicitadas à torção. Os cálculos abrangem também os dimensionamentos à flexão, força cortante, ancoragem nos apoios e "cobrimento" dos diagramas de momento fletor.

Uma viga em balanço, como mostrada na Figura 33 e Figura 34, suporta em sua extremidade livre uma outra viga, nela engastada, submetida à uma força vertical concentrada (F) de 50 kN. As distâncias e dimensões das duas vigas (determinadas no pré-dimensionamento) estão indicadas na planta de fôrma. As vigas têm como carregamento somente a força F e o peso próprio. Outras ações, como do vento por exemplo, são desprezadas. **São conhecidos:**

a) edificação situada em área urbana de cidade não litorânea e livre de quaisquer agentes agressivos, em Classe de Agressividade Ambiental I (ver Tabela A-12 anexa ou a Tabela 6.1 da NBR 6118), o que leva ao concreto com $f_{ck} \geq 20$ MPa e relação a/c $\leq 0{,}65$ (ver Tabela A-13 anexa ou a Tabela 7.1 da NBR 6118). Na Tabela A-14 (ou Tabela 7.2 da NBR 6118) encontra-se para viga o cobrimento nominal $c_{nom} = 2{,}5$ cm com $\Delta c = 10$ mm; será adotado o concreto C25;[7]
b) aço CA-50;
c) peso específico do Concreto Armado: $\gamma_{conc} = 25$ kN/m^3;
d) coeficientes de ponderação: $\gamma_c = \gamma_f = 1{,}4$ e $\gamma_s = 1{,}15$;
e) possíveis esforços solicitantes adicionais provocados por ação do vento são desprezados.

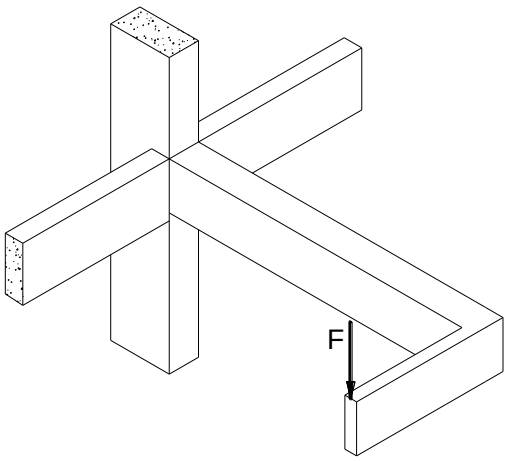


Figura 33 – Perspectiva da estrutura com a força F (50 kN) aplicada.

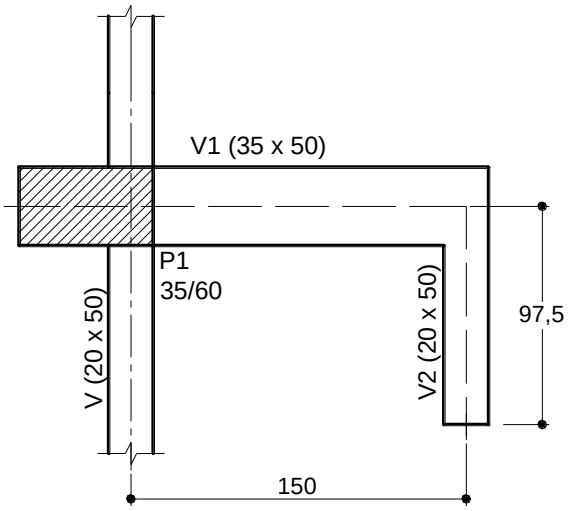


Figura 34 – Planta de fôrma.

RESOLUÇÃO

A estrutura para sustentação da força F, composta pelas vigas V1 e V2 (Figura 34), é uma estrutura em balanço. A viga V2 deve ser considerada engastada perfeitamente na viga V1, e esta, por sua vez, deve ser engastada perfeitamente no pilar P1. A viga V1 tem momento de torção aplicado na extremidade livre, proveniente da flexão da viga V2, e a torção é de equilíbrio, devendo ser obrigatoriamente considerada no dimensionamento da viga V1, sob pena de ruína caso desprezada.

Todas as estruturas devem ser cuidadosamente analisadas e dimensionadas, mas estruturas em balanço, como a deste exemplo, devem ser objeto de especial atenção por parte do engenheiro. Ainda, devem ser bem executadas, sob risco de problemas graves conduzirem à ruína da estrutura.

[7] O concreto adotado com $f_{ck} = 25$ MPa, por ter resistência maior que a mínima exigida para a CAA I, possibilita diminuir a espessura do cobrimento em 5 mm, conforme prescrição da NBR 6118 (item 7.4.7.6): "*Para concretos de classe de resistência superior à mínima exigida, os cobrimentos definidos na Tabela 7.2 podem ser reduzidos em até 5 mm*." Embora possível, esta redução não será aplicada neste Exemplo, porque a estrutura está totalmente exposta ao ambiente.

Os esforços solicitantes são calculados de dois modos, primeiro considerando-se a atuação conjunta das vigas em um modelo de grelha, e segundo com o cálculo manual considerando-se as vigas individualmente. Para resolução da grelha será utilizado o programa GPLAN4, de CORRÊA et al. (1992).[8]

14.1. Cálculo dos Esforços Solicitantes como Grelha

14.1.1. Vãos Efetivos

A viga V2 (20 x 50) tem como vão efetivo e peso próprio:
vão livre: ℓ_o = 80 cm (da extremidade livre à face interna da V1),

$$a_1 \leq \begin{cases} t_1/2 = 35/2 = 17{,}5\,\text{cm} \\ 0{,}3\,h = 0{,}3 \cdot 50 = 15\,\text{cm} \end{cases} \qquad \therefore\ a_1 = 15\ \text{cm} \quad , (a_2 = 0)$$

$\ell_{ef,V2} = \ell_o + a_1 = 80 + 15 = 95$ cm

peso próprio: $g_{pp,V2} = \gamma_{conc}\, b_w\, h = 25 \,.\, 0{,}20 \,.\, 0{,}50 = 2{,}5$ kN/m

A viga V1 (35 x 50) tem como vão efetivo e peso próprio:

vão livre: ℓ_o = 150 cm (da extremidade livre à face do pilar),

$$a_1 \leq \begin{cases} t_1/2 = 60/2 = 30\,\text{cm} \\ 0{,}3\,h = 0{,}3 \cdot 50 = 15\,\text{cm} \end{cases} \qquad \therefore\ a_1 = 15\ \text{cm} \quad , (a_2 = 0)$$

$\ell_{ef,V1} = \ell_o + a_1 = 150 + 15 = 165$ cm

peso próprio: $g_{pp,V1} = 25 \,.\, 0{,}35 \,.\, 0{,}50 = 4{,}375$ kN/m

14.1.2. Modelo de Grelha

A Figura 35 mostra o esquema utilizado para a grelha, com a numeração de nós e barras. Na barra (2) correspondente à viga V1 deve ser considerado o momento de inércia à torção, pois a torção que ocorre na viga V1 é de equilíbrio e não pode ser desprezada, ou seja, deve ser obrigatoriamente considerada no projeto da viga. A viga V2 não tem torção, e por isso não há necessidade de considerar inércia à torção.[9] O nó 2 deve ser obrigatoriamente considerado um engaste perfeito, e os nós 1 e 3 não têm restrições nodais (são livres).

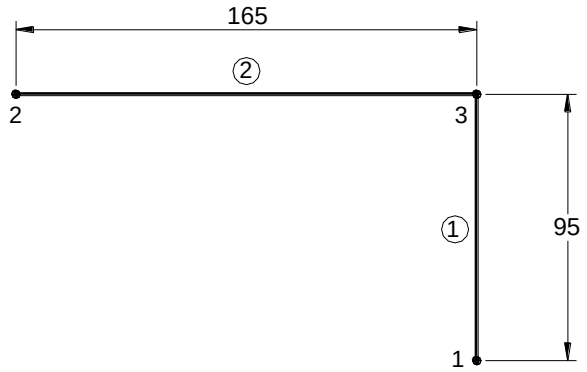


Figura 35 – Esquema da grelha, com distâncias e numeração dos nós e barras.

[8] O programa e o manual do GPLAN4 (ou GPLAN5 dependendo da versão do programa operacional) encontram-se disponíveis em (17/10/23): http://wwwp.feb.unesp.br/pbastos/pag_concreto2.htm
[9] Foi considerado apenas um pequeno valor (100) para a inércia à torção, por necessidade do programa computacional de grelha.

Supondo a viga trabalhando em serviço no Estádio II (já fissurada), para o módulo de elasticidade do concreto será considerado o valor secante. O módulo tangente na origem pode ser avaliado pela seguinte expressão (NBR 6118, item 8.2.8)[10]:

$$E_{ci} = \alpha_E\ 5600\sqrt{f_{ck}} = 1{,}0\ .\ 5600\sqrt{25} = 28.000 \text{ MPa} = 2.800 \text{ kN/cm}^2$$

com α_E = 1,0 para brita de granito (ou gnaisse).

O módulo secante (E_{cs}) é avaliado por:

$$E_{cs} = \alpha_i\ E_{ci} \qquad \text{, com} \quad \alpha_i = 0{,}8 + 0{,}2\frac{f_{ck}}{80} \le 1{,}0$$

$$\alpha_i = 0{,}8 + 0{,}2\frac{25}{80} = 0{,}8625 \le 1{,}0 \quad \rightarrow \text{ ok!}$$

$$E_{cs} = 0{,}8625\ .\ 2800 = 2.415 \text{ kN/cm}^2$$

Para o módulo de elasticidade transversal (G - NBR 6118, item 8.2.9) pode-se considerar a relação:

$$G_c = \frac{E_{cs}}{2{,}4} = \frac{2.415}{2{,}4} = 1.006{,}3 \text{ kN/cm}^2$$

O momento de inércia à torção (J) foi calculado com a Eq. 39. Na Tabela 2, com n = 0,7 encontra-se o valor de 0,189 para **j** e:

$$n = \frac{b}{h} = \frac{35}{50} = 0{,}7$$

$$J = j\ b^3 h = 0{,}189 \cdot 35^3 \cdot 50 = 405.169 \text{cm}^4$$

14.1.3. Esforços Solicitantes

O arquivo de dados de entrada no programa foi feito conforme o manual de utilização de CORRÊA et al. (1992), e está apresentado no Anexo B1. Os resultados gerados pelo programa estão listados no Anexo B2. Os diagramas de esforços solicitantes característicos estão indicados na Figura 36. A flecha máxima para a grelha resultou igual a 0,5 cm, no nó 1, aceitável em função dos valores-limites indicados pela NBR 6118.

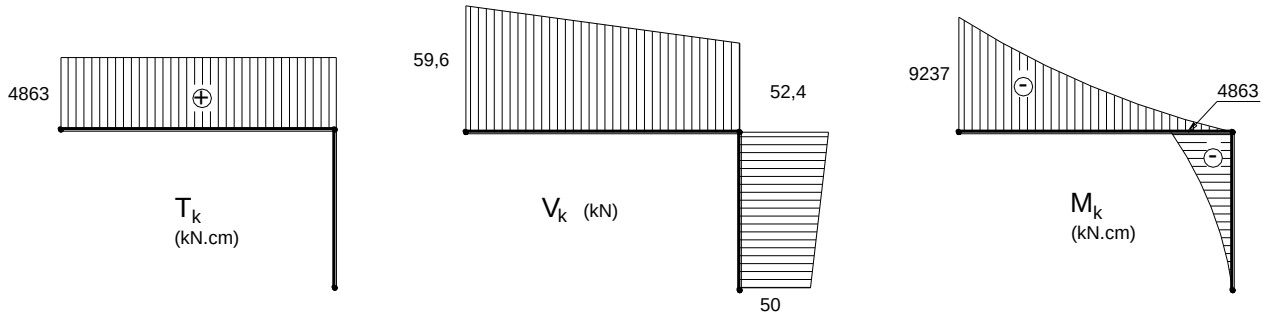


Figura 36 – Diagrama de esforços solicitantes característicos calculados conforme o modelo de grelha.

14.2. Dimensionamento da Viga V2 (20 x 50)

A título de exemplo e comparação com os esforços gerados com o modelo de grelha, os esforços solicitantes nas vigas V1 e V2 serão calculados manualmente, com as duas vigas consideradas individualmente.

[10] BASTOS, P.S.S. *Fundamentos do Concreto Armado*. Bauru/SP, Universidade Estadual Paulista (UNESP), Set/2023, 96p. Disponível em (17/10/23): http://wwwp.feb.unesp.br/pbastos/pag_concreto1.htm

14.2.1. Esforços Solicitantes Máximos

A viga V2, engastada na viga V1, tem o esquema estático e carregamento indicados na Figura 37.

Força cortante no apoio (engaste perfeito):

V = 2,5 . 0,95 + 50 = 52,4 kN

Momento fletor no apoio:

$$M = -\left(\frac{2{,}5 \cdot 0{,}95^2}{2} + 50 \cdot 0{,}95\right)$$

M = – 48,63 kN.m = – 4.863 kN.cm

Comparando os resultados dos esforços acima com aqueles obtidos no cálculo de grelha (Figura 36), nota-se que os esforços solicitantes na viga V2 são idênticos.

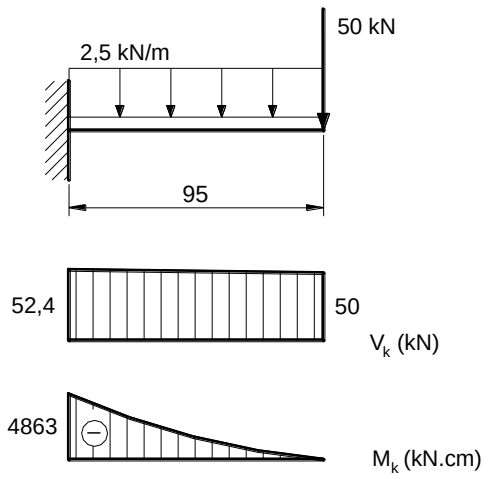


Figura 37 – Esquema estático, carregamento e esforços solicitantes na viga V2.

14.2.2. Dimensionamento à Flexão

A NBR 6118 especifica que as vigas devem ter uma armadura de flexão mínima, calculada segundo uma taxa de armadura mínima ($\rho_{mín}$) apresentada na norma. Conforme a Tabela A-6, para seção retangular e concreto C25, a taxa mínima de armadura ($\rho_{mín}$) deve ser de 0,15 % A_c , portanto:

$A_{s,mín}$ = 0,15 % b_w h = 0,0015 . 20 . 50 = 1,50 cm^2

Momento fletor máximo atuante na viga V2: M_k = – 4.863 kN.cm

$M_d = \gamma_f \, . \, M_k$ = 1,4 (– 4.863) = – 6.808 kN.cm

Considerando como altura útil d = h – 4 cm = 50 – 4 = 46 cm:[(ver nota 11)]

$$K_c = \frac{b_w \, d^2}{M_d} = \frac{20 \cdot 46^2}{6808} = 6{,}2$$

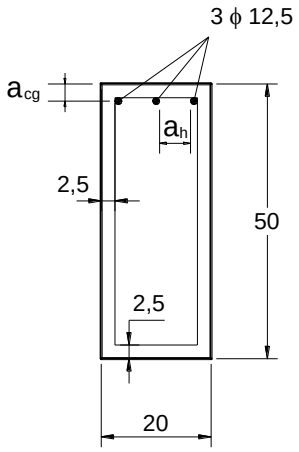
na Tabela A-1 tem-se: $\beta_x = 0{,}14 \leq 0{,}45$ (ok!), K_s = 0,024 e dom. 2.

$$A_s = K_s \frac{M_d}{d} = 0{,}024 \frac{6.808}{46} = 3{,}55\,cm^2 \geq A_{s,mín} = 1{,}50\ cm^2 \quad \text{(ok!)}$$

e conforme a Tabela A-3 pode-se indicar 2 ϕ 16 mm (4,00 cm^2) ou 3 ϕ 12,5 (3,75 cm^2).

Se adotados 3 ϕ 12,5 em uma mesma camada a distância livre entre as barras deve ser suficiente para a passagem da agulha do vibrador, para adensamento do concreto. Considerando vibrador com ϕ_{ag} = 25 mm e ϕ_t = 5 mm (diâmetro do estribo):

$$a_h = \frac{20 - [2(2{,}5 + 0{,}5) + 3 \, . \, 1{,}25]}{2} = 5{,}1\,cm > 25\ mm \quad \text{(ok!)}$$



[11] BASTOS, P.S. *Flexão Normal Simples - Vigas*. Bauru/SP, Universidade Estadual Paulista (UNESP), out/2023, 74p. Disponível em (26/03/24): https://wwwp.feb.unesp.br/pbastos/concreto1/FlexaoSimples.pdf

Posição do centro de gravidade da armadura:

a_{cg} = 2,5 + 0,5 + 1,25/2 = 3,6 cm → foi adotado 4 cm para cálculo da altura útil, coerente com o valor calculado de 3,6 cm.

14.2.3. Armadura de Pele

Como a viga não tem altura superior a 60 cm, segundo a NBR 6118 a armadura de pele não é necessária. Porém, a fim de evitar possíveis fissuras no concreto por efeito de retração, que podem surgir mesmo em vigas com altura de 50 cm, será colocada uma armadura de pele, com área de 0,05 % A_c[12] em cada face da viga:

$A_{s,pele}$ = 0,0005 . 20 . 50 = 0,50 cm^2

4 ϕ 4,2 mm (0,56 cm^2) em cada face (Tabela A-3), distribuídos ao longo da altura (ver Figura 38), com opção de 3 ϕ 5 mm (0,60 cm^2) em cada face.

14.2.4. Dimensionamento à Força Cortante

A resolução da viga à força cortante será feita mediante as equações simplificadas desenvolvidas e apresentadas em BASTOS (2023)[13]. Para a seção retangular da viga será considerado o Modelo de Cálculo II, e para fins didáticos com ângulo θ = 38° (ver nota 14) para a inclinação das diagonais de compressão, com estribo vertical (α = 45°).

A força cortante atuante de cálculo é:

V_k = 52,4 kN → $V_{Sd} = \gamma_f \,.\, V_k$ = 1,4 . 52,4 = 73,4 kN

a) Verificação das diagonais de compressão

Da Tabela A-5 anexa, para concreto C25 determina-se a força cortante máxima a que a viga pode ser submetida:

$V_{Rd2} = 0{,}87\, b_w . d . \text{sen}\,\theta . \cos\theta$ = 0,87 . 20 . 46 . sen 38° . cos 38° = 388,3 kN

$V_{Sd} = 73{,}4 \le V_{Rd2} = 388{,}3$ kN → ok! portanto, não ocorrerá o esmagamento do concreto nas diagonais de compressão.

b) Cálculo da armadura transversal

Para concreto C25 na Tabela A-5 a equação para determinar a força cortante correspondente à armadura mínima é:

$$V_{Sd,mín} = 0{,}040.\, b_w \,.\, d \,.\, \text{cotg}\,\theta + V_{c1}$$

Com V_{c0} : $V_{c0} = 0{,}6\, f_{ctd}\, b_w\, d = 0{,}6\left(0{,}7\,\dfrac{0{,}3\sqrt[3]{25^2}}{10\,.\,1{,}4}\right) 20\,.\,46 = 70{,}8$ kN

Como V_{Sd} = 73,4 kN é maior que V_{c0} , deve-se calcular V_{c1} com a equação:

$$V_{c1} = V_{c0}\,\frac{V_{Rd2} - V_{Sd}}{V_{Rd2} - V_{c0}} \quad \rightarrow \quad V_{c1} = 70{,}8\,\frac{388{,}3 - 73{,}4}{388{,}3 - 70{,}8} = 70{,}2 \text{ kN}$$

---

[12] Esta área da armadura de pele era indicada na NB1 de 1978, e corresponde à metade da armadura preconizada pela versão de 2023 da norma.

[13] BASTOS, P.S. *Dimensionamento de vigas de Concreto Armado à força cortante*. Bauru/SP, Universidade Estadual Paulista (UNESP), nov/2023, 77p. Disponível em (26/03/24): http://wwwp.feb.unesp.br/pbastos/pag_concreto2.htm

[14] O Modelo de Cálculo II com θ = 38° conduz a uma armadura transversal muito próxima àquela resultante do Modelo de Cálculo I, onde θ é fixo em 45°. O estudante deve fazer o cálculo aplicando o M.C. I, a fim de comparar os resultados.

$V_{Sd,mín} = 0{,}040 . 20 . 46 . \cot g\, 38° + 70{,}2 = 117{,}3\,kN$

$V_{Sd} = 73{,}4 < V_{Sd,mín} = 117{,}3\,kN \rightarrow$ portanto, deve-se dispor a armadura transversal mínima.

Para CA-50 a armadura transversal mínima é:

$$A_{sw,mín} = \frac{20\, f_{ct,m}}{f_{ywk}}\, b_w \quad (cm^2/m),\ \text{com}\ f_{ct,m} = 0{,}3\sqrt[3]{f_{ck}^{\ 2}} = 0{,}3\sqrt[3]{25^2} = 2{,}56\,MPa$$

$$A_{sw,mín} = \frac{20 . 0{,}256}{50}\ 20 = 2{,}05\ cm^2/m$$

c) Detalhamento da armadura transversal

- Diâmetro do estribo: $5\ mm \le \phi_t \le b_w/10 \rightarrow \phi_t \le 200/10 \le 20\ mm$
- Espaçamento máximo:

$0{,}67\ V_{Rd2} = 0{,}67 . 388{,}3 = 260{,}2\ kN$

$V_{Sd} = 73{,}4 < 0{,}67\ V_{Rd2} = 260{,}2\ kN \rightarrow s \le 0{,}6\ d \le 30\ cm$

$0{,}6\ d = 0{,}6 . 46 = 27{,}6\ cm \rightarrow$ Portanto, $s_{máx} = 27{,}6\ cm$ (ver nota 15)

Supondo estribo de dois ramos com diâmetro de 5 mm ($2\ \phi\ 5 \rightarrow 0{,}40\ cm^2$) tem-se:

$$\frac{0{,}40}{s} = 0{,}0205 \rightarrow s = 19{,}5\ cm \le s_{máx} = 27{,}6\ cm \rightarrow \text{ok!}$$

A Figura 38 mostra o detalhamento dos estribos com dois ramos ϕ 5 mm espaçados a cada 15 cm, para o espaçamento calculado de 19,5 cm.[16]

14.2.5. Ancoragem da Armadura Longitudinal Negativa

A armadura negativa de flexão deve ser cuidadosamente ancorada na viga V1, pois o equilíbrio da viga V2 depende do perfeito engastamento na V1. Uma ancoragem inadequada pode resultar em sérios riscos de ruptura (ruína) da viga V2.

Conforme apresentado em BASTOS (2024),[17] o comprimento de ancoragem básico deve ser calculado. Na Tabela A-7 e na Tabela A-8 anexas constam os comprimentos de ancoragem dos aços CA-50 e CA-60. Na Tabela A-7 (aço CA-50), para concreto C25, barra de diâmetro 12,5 mm em situação de má aderência, o comprimento de ancoragem básico (coluna sem gancho) resulta 67 cm.

Considerando que a armadura negativa calculada foi 3,55 cm^2 ($A_{s,anc}$) e que a armadura efetiva ($A_{s,ef}$) será composta por 3 ϕ 12,5 (3,75 cm^2), o comprimento de ancoragem necessário, que leva em conta a diferença de áreas de armadura, é:

$$\ell_{b,nec} = \ell_b \frac{A_{s,anc}}{A_{s,ef}} = 67\,\frac{3{,}55}{3{,}75} = 63{,}4\,cm$$, com comprimento de ancoragem necessário mínimo:

---

[15] O espaçamento máximo entre os ramos verticais do estribo ($s_{t,máx}$) também deve ser verificado. Para a viga em questão é possível fazer estribo com dois ramos.

[16] O espaçamento foi adotado menor do que o calculado como uma segurança adicional, por se tratar de uma viga em balanço, É comum o projetista aumentar todas as armaduras adotadas quando se trata de estrutura em balanço, como lajes e vigas, pois são estruturas altamente suscetíveis de queda, em função de possíveis erros na execução, aumentos indevidos e não previstos nos carregamentos, etc. No caso citado, o espaçamento poderia ser adotado ainda menor, como 10 cm, porque o acréscimo no consumo de aço é insignificante.

[17] BASTOS, P.S. *Ancoragem e emenda de armaduras*. Bauru/SP, Universidade Estadual Paulista (UNESP), mar/2024, 26p. Disponível em (26/03/24): http://wwwp.feb.unesp.br/pbastos/pag_concreto2.htm

$$\ell_{b,nec} \geq \begin{cases} \ell_{b,mín} \\ r + 5,5\phi \\ 6\,cm \end{cases} \quad \text{, com } \ell_{b,mín}\text{:}$$

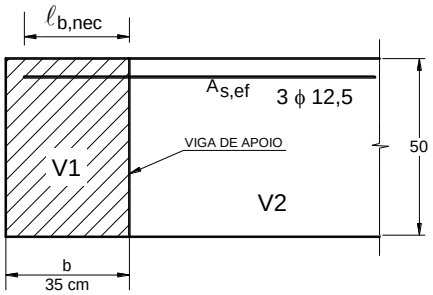
$$\ell_{b,mín} \geq \begin{cases} 0,3\ell_b = 0,3 \,.\, 67 = 20,1\,cm \\ 10\phi = 10 \,.\, 1,25 = 12,5\,cm \\ 10\,cm \end{cases} \qquad \therefore\ \ell_{b,mín} = 20,1\ cm$$

O raio do pino de dobramento é:

r = (D/2) = 5 ϕ/2 = 5 . 1,25/2 = 3,1 cm

(com D = diâmetro do pino de dobramento = 5ϕ, apresentado na Tabela A-10), e:

r + 5,5 ϕ = 3,1 + 5,5 . 1,25 = 10,0 cm



$$\text{Portanto: } \ell_{b,nec} \geq \begin{cases} \ell_{b,mín} = 20,1\,cm \\ r + 5,5\phi = 10,0\,cm \\ 6\,cm \end{cases} \qquad \rightarrow\ \ell_{b,nec} = 63,4\ cm \geq 20,1\ cm \quad \text{(ok!)}$$

O comprimento de ancoragem efetivo da viga de apoio (V1) é a largura da viga menos a espessura do cobrimento: $\ell_{b,ef}$ = b – c = 35 – 2,5 = 32,5 cm.

Verifica-se que o comprimento de ancoragem necessário é maior que o comprimento de ancoragem efetivo: $\ell_{b,nec}$ = 63,4 cm > $\ell_{b,ef}$ = 32,5 cm. Não é possível fazer a ancoragem dessa forma na viga de apoio. Uma solução para tentar resolver o problema é fazer o gancho na extremidade das barras. O comprimento de ancoragem com gancho é:

$$\ell_{b,gancho} = \alpha_1\, \ell_{b,nec} = 0,7 \cdot 63,4 = 44,4\,cm \geq 20,1\ cm \quad \rightarrow \quad \text{ok!}$$

Verifica-se que o comprimento de ancoragem com gancho é superior ao comprimento de ancoragem efetivo ($\ell_{b,gancho}$ = 44,4 cm > $\ell_{b,ef}$ = 32,5 cm), de modo que o gancho não resolve o problema. Uma solução possível na sequência, entre outras, é aumentar a armadura a ancorar para $A_{s,corr}$, e supondo a existência de grampo de ancoragem com ϕ 10 mm, fica:

$$A_{s,corr} = \frac{0,7\,\ell_b}{\ell_{b,ef} - \phi_{gr}}\, A_{s,anc} = \frac{0,7 \cdot 67}{32,5 - 1,0}\, 3,55 = 5,29\ \ cm^2$$

3 ϕ 12,5 + 1 grampo ϕ 10 → com área total de: (3 . 1,25) + (2 . 0,80) = 5,35 cm^2

14.2.6. Detalhamento Final das Armaduras

A Figura 38 mostra o detalhamento completo das armaduras da viga V2. A armadura de pele foi adotada, embora não obrigatória neste caso. As duas barras longitudinais inferiores (N5), porta-estribos construtivas, foram adotadas ϕ 8 mm. Em ambas foram acrescentados ganchos nas extremidades para melhorar a ligação com a viga V1, na qual a viga V2 está engastada. O grampo ϕ 10 mm é a barra N3, colocado na segunda camada da armadura negativa.

Para garantir uma melhor vinculação (engastamento) da viga V2 na viga V1, as barras N2 foram desenhadas na forma de um estribo fechado, para melhor ancoragem na viga V1. É importante que as barras N2 fiquem posicionadas **sobre** as barras longitudinais superiores negativas da viga V1, de modo a "laçar" essas barras.

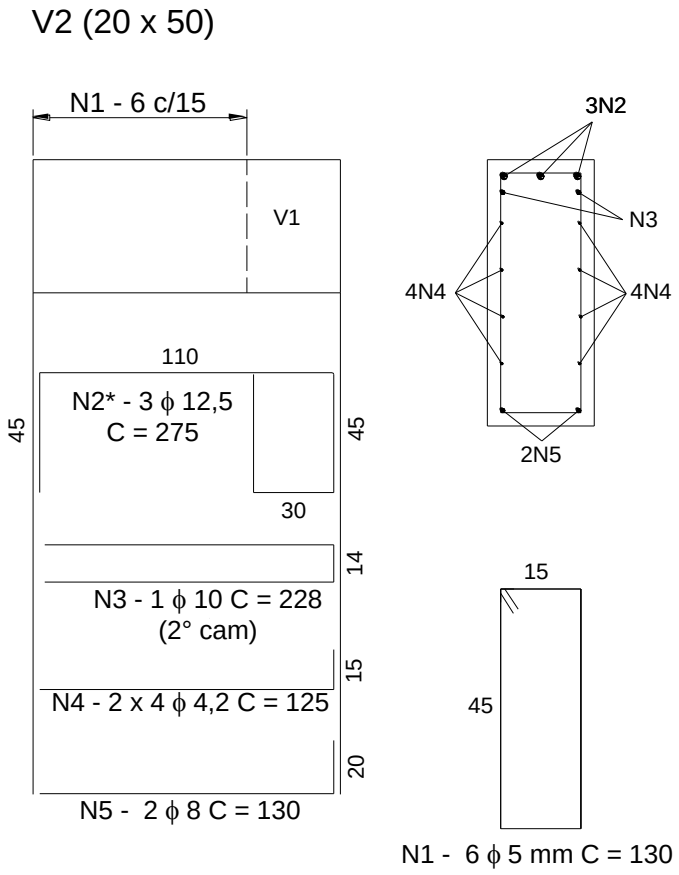


Figura 38 – Detalhamento final das armaduras da viga V2.

14.3. Dimensionamento da Viga V1 (35 x 50)

A viga V1 deve estar obrigatoriamente e perfeitamente engastada no pilar P1, como demonstrado no esquema estático (Figura 39). O carregamento consiste no próprio peso e nas ações provenientes da viga V2 (força vertical concentrada e momento torçor).

14.3.1. Esforços Solicitantes Máximos

Força cortante:

V_k = 4,375 . 1,65 + 52,4 = 59,6 kN

Momento fletor:

$$M_k = \frac{4{,}375 \cdot 1{,}65^2}{2} + 52{,}4 \cdot 1{,}65 = 92{,}42 \text{kN.m} \qquad , M_k = 9.242 \text{ kN.cm}$$

Momento de torção:

T_k = 4.863 kN.cm (constante ao longo da viga)

Verifica-se que os esforços solicitantes acima são idênticos àqueles obtidos no cálculo segundo o modelo de grelha (Figura 36).

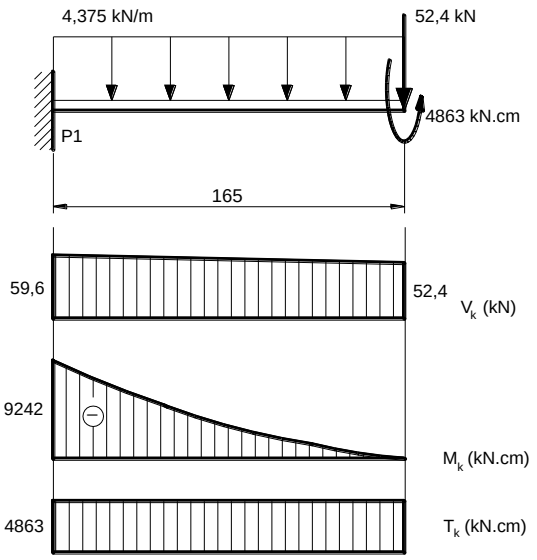


Figura 39 – Esquema estático, carregamento e esforços solicitantes na viga V1.

14.3.2. Dimensionamento à Flexão

A armadura mínima de flexão para seção retangular e concreto C25 tem taxa mínima de armadura $\rho_{mín}$ = 0,15 % conforme a Tabela A-6, portanto:

$A_{s,mín} = \rho_{mín} A_c = 0{,}0015 \,.\, 35 \,.\, 50 = 2{,}63 \text{ cm}^2$

O momento fletor solicitante característico máximo na viga V1 é – 9.242 kN.cm. O momento fletor de cálculo é:

$M_d = \gamma_f \; M_k = 1{,}4\,(-9.242) = -12.939$ kN.cm

Considerando a altura útil d = 46 cm tem-se:

$$K_c = \frac{b_w\, d^2}{M_d} = \frac{35 \cdot 46^2}{12.939} = 5{,}7$$

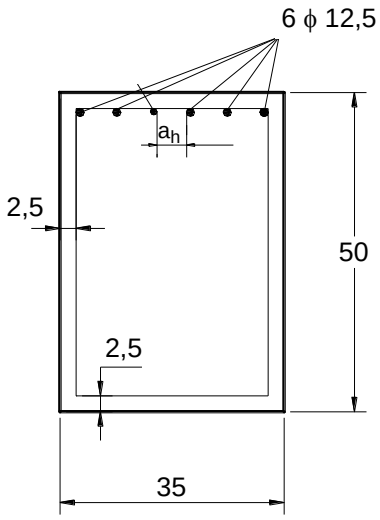
da Tabela A-1 e com concreto C25: $\beta_x = 0{,}16 \le 0{,}45$ (ok!), $K_s = 0{,}025$ e domínio 2.

$$A_s = K_s \frac{M_d}{d} = 0{,}025 \frac{12.939}{46} = 7{,}03 \text{cm}^2 \ge A_{s,mín} = 2{,}63 \text{ cm}^2 \quad \text{(ok!)}$$

6 ϕ 12,5 (7,50 cm^2), ver Tabela A-3, ou 4 ϕ 16 (8,00 cm^2)

Supondo ϕ_t = 10 mm, o espaçamento livre entre as barras é:

$$a_h = \frac{35 - \left[2\left(2{,}5 + 1{,}0\right) + 6 \cdot 1{,}25\right]}{5} = 4{,}1 \text{ cm}$$



espaço livre suficiente para a passagem da agulha do vibrador supondo ϕ_{ag} = 25 mm.

A posição do centro de gravidade da armadura é:

a_{cg} = 2,5 + 1,0 + 1,25/2 = 4,1 cm (foi adotado 4 cm para determinação da altura útil)

14.3.3. Armadura de Pele

A armadura de pele não é necessária porque a viga não tem altura superior a 60 cm. A armadura para a torção que será colocada nas faces laterais da viga poderá também contribuir para evitar fissuras por retração do concreto.

14.3.4. Dimensionamento à Força Cortante

Como já feito para a viga V2, no cálculo da armadura transversal será considerado o Modelo de Cálculo II, com ângulo θ de 38°, com aplicação de equações simplificadas para estribos verticais.

$V_k = 59{,}6$ kN $\rightarrow$ $V_{Sd} = \gamma_f \,.\, V_k = 1{,}4 \,.\, 59{,}6 = 83{,}4$ kN

a) Verificação das diagonais de compressão

Na Tabela A-5, para o concreto C25 determina-se a força cortante máxima:

$V_{Rd2} = 0{,}87\, b_w \,.\, d \,.\, \text{sen}\,\theta \,.\, \cos\,\theta = 0{,}87 \,.\, 35 \,.\, 46 \,.\, \text{sen}\, 38° \,.\, \cos 38° = 679{,}5$ kN

$V_{Sd} = 83{,}4 \leq V_{Rd2} = 679{,}5$ kN $\rightarrow$ ok! portanto, não ocorrerá o esmagamento do concreto nas diagonais de compressão.

b) Cálculo da armadura transversal

Na mesma Tabela A-5, para o concreto C25 a equação para determinar a força cortante correspondente à armadura mínima é:

$V_{Sd,mín} = 0{,}040.\, b_w \,.\, d \,.\, \text{cotg}\,\theta + V_{c1}$

Com V_{c0} :

$$V_{c0} = 0{,}6\, f_{ctd}\, b_w\, d = 0{,}6\left(0{,}7\,\frac{0{,}3\sqrt[3]{25^2}}{10\,.\,1{,}4}\right)35\,.\,46 = 123{,}9 \text{ kN}$$

como $V_{Sd} = 83{,}4$ kN < $V_{c0} = 123{,}9$ kN tem-se que $V_{c1} = V_{c0} = 123{,}9$ kN

$V_{Sd,mín} = 0{,}040.\, 35\,.\,46\,.\,\text{cotg}\, 38° + 123{,}9 = 206{,}3 \text{ kN}$

$V_{Sd} = 83{,}4 \text{ kN} < V_{Sd,mín} = 206{,}3 \text{ kN}$ $\rightarrow$ portanto, deve-se dispor a armadura transversal mínima.

Considerando aço CA-50 a armadura mínima é:

$$A_{sw,mín} = \frac{20\, f_{ct,m}}{f_{ywk}}\, b_w \quad (\text{cm}^2/\text{m}),\ \text{com}\ f_{ct,m} = 0{,}3\sqrt[3]{f_{ck}{}^2} = 0{,}3\sqrt[3]{25^2} = 2{,}56 \text{ MPa}$$

$$A_{sw,mín} = \frac{20\,.\,0{,}256}{50}\,35 = 3{,}58 \text{ cm}^2/\text{m} = 0{,}0358 \text{ cm}^2/\text{cm}$$

c) Detalhamento da armadura transversal

- Diâmetro do estribo: $5 \text{ mm} \leq \phi_t \leq b_w/10$ $\rightarrow$ $\phi_t \leq 350/10 \leq 35$ mm

- Espaçamento máximo entre os estribos:

$0{,}67 V_{Rd2} = 0{,}67 \,.\, 679{,}5 = 455{,}3$ kN

$V_{Sd,máx} = 83{,}4 < 455{,}3$ kN $\rightarrow$ $s \leq 0{,}6\, d \leq 30$ cm

$0{,}6\ d = 0{,}6\ .\ 46 = 27{,}6$ cm $\rightarrow$ Portanto, $s_{máx} = 27{,}6$ cm

- Espaçamento máximo entre os ramos verticais dos estribos:

$0{,}20V_{Rd2} = 0{,}20\ .\ 679{,}5 = 135{,}9$ kN

$V_{Sd,máx} = 83{,}4$ kN $< 135{,}9$ kN $\rightarrow$ $s_{t,máx} = d = 46$ cm ≤ 80 cm

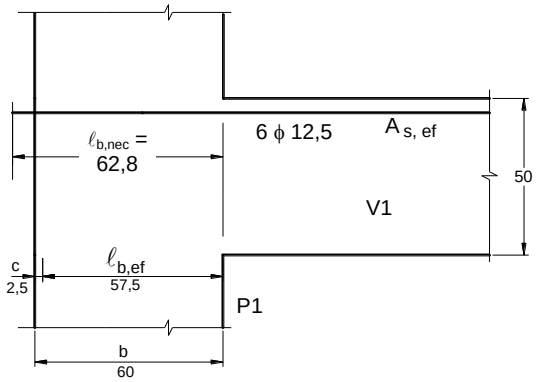
Portanto, como a viga tem largura de 35 cm, é possível fazer estribos com dois ramos. A Figura 40 mostra o detalhamento final dos estribos na viga, combinados com a armadura transversal para a torção.

14.3.5. Ancoragem da Armadura Longitudinal Negativa

A armadura longitudinal negativa calculada para a viga, de 7,03 cm^2, é a armadura a ancorar no pilar ($A_{s,anc}$), que tem seção transversal 35/60. Para essa área o arranjo de barras escolhido é composto de 6 ϕ 12,5, com área de 7,50 cm^2 ($A_{s,ef}$).

Conforme a Tabela A-7, para concreto C25, aço CA-50 (barra de alta aderência) e situação de má aderência para a armadura negativa, o comprimento de ancoragem básico (coluna sem gancho) é 67 cm para ϕ 12,5 mm. Devido à diferença entre as áreas de armadura calculada e efetiva, o comprimento de ancoragem necessário é:

$$\ell_{b,nec} = \ell_b \frac{A_{s,anc}}{A_{s,ef}} = 67\,\frac{7{,}03}{7{,}50} = 62{,}8\text{ cm}$$



E como mostrado nos cálculos da viga V2 tem-se:

$$\ell_{b,nec} \geq \begin{cases} \ell_{b,mín} = 20{,}1\text{ cm} \\ r + 5{,}5\phi = 10{,}0\text{ cm} \\ 6\text{ cm} \end{cases}$$

$\ell_{b,nec} = 62{,}8$ cm $\geq 20{,}1$ cm (ok!)

O comprimento de ancoragem efetivo do pilar é: $\ell_{b,ef} = b - c = 60 - 2{,}5 = 57{,}5$ cm. Verifica-se que o comprimento de ancoragem necessário é superior ao comprimento de ancoragem efetivo ($\ell_{b,nec} = 62{,}8$ cm $> \ell_{b,ef} = 57{,}5$ cm), que não possibilita fazer a ancoragem reta no pilar. A primeira alternativa para resolver o problema é fazer gancho na extremidade das barras, reduzindo o comprimento corrigido para:

$$\ell_{b,gancho} = 0{,}7 \cdot 62{,}8 = 44{,}0\text{ cm} \geq 20{,}1\text{ cm} \quad \text{(ok!)}$$

O comprimento de ancoragem com gancho é inferior ao comprimento de ancoragem efetivo ($\ell_{b,gancho} = 44{,}0$ cm $< \ell_{b,ef} = 57{,}5$ cm), o que possibilita fazer a ancoragem no pilar sem a necessidade de acréscimo de armadura, ou de grampos. Conclui-se que a ancoragem pode ser feita com 6 ϕ 12,5 com gancho na extremidade das barras, penetrando as barras no mínimo 44,0 cm dentro do pilar. No entanto, a favor da segurança, a armadura negativa pode ser estendida no comprimento de $\ell_{b,ef}$ dentro do pilar, como mostrado na Figura 40.

14.3.6. Dimensionamento à Torção

O momento de torção característico (T_k) é 4.863 kN.cm e o momento de cálculo é:

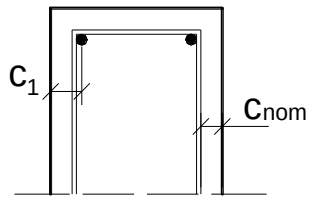
$T_{Sd} = \gamma_f\ .\ T_k = 1{,}4\ .\ 4863 = 6.808$ kN.cm

a) Verificação das diagonais comprimidas

Área da seção transversal: $A = b_w\ .\ h = 35\ .\ 50 = 1.750$ cm^2
Perímetro da seção transversal: $u = 2\ (b_w + h) = 2\ (35 + 50) = 170$ cm

A Eq. 19 e a Eq. 20 fornecem os limites para a espessura h_e da parede fina:

$$h_e \le \frac{A}{u} = \frac{1750}{170} = 10{,}3\,\text{cm} \qquad \text{e} \qquad h_e \ge 2\,c_1$$

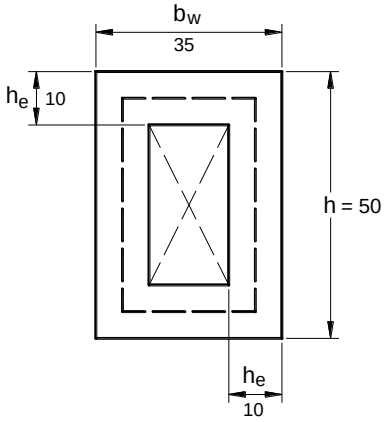


Supondo ϕ_ℓ = 12,5 mm, ϕ_t = 10 mm e com c_{nom} = 2,5 cm tem-se:

$c_1 = \phi_\ell/2 + \phi_t + c_{nom} = 1{,}25/2 + 1{,}0 + 2{,}5 = 4{,}125$ cm

$h_e \ge 2 \,.\, 4{,}125 = 8{,}3$ cm

Portanto, os limites para h_e são: 8,3 cm $\le h_e \le$ 10,3 cm. Será adotado h_e = 10,0 cm.



A área efetiva e o perímetro do eixo da parede fina são:

$A_e = (b_w - h_e) \,.\, (h - h_e) = (35 - 10) \,.\, (50 - 10) = 1.000$ cm^2

$u_e = 2\,[(b_w - h_e) + (h - h_e)] = 2\,[(35 - 10) + (50 - 10)] = 130$ cm

O momento torçor máximo, determinado pela Eq. 22, com ângulo θ (38°) igual ao aplicado no cálculo da viga à força cortante[18] é:

$T_{Rd,2} = 0{,}5\,\alpha_{v2}\,f_{cd}\,A_e\,h_e \text{ sen } 2\,\theta = 0{,}5\,(1 - 25/250) \,.\, (2{,}5/1{,}4)\,1000 \,.\, 10 \,.\, \text{sen } 2 \,.\, 38° = 7.797$ kN.cm

Para não ocorrer o esmagamento do concreto nas diagonais comprimidas de concreto, conforme a Eq. 34 deve-se ter:

$$\frac{V_{Sd}}{V_{Rd2}} + \frac{T_{Sd}}{T_{Rd2}} \le 1$$

Como calculado no item c4.1, os valores de V_{Rd2} e V_{Sd} são 679,5 kN e 83,4 kN, respectivamente. Aplicando a Eq. 34 tem-se:

$$\frac{83{,}4}{679{,}5} + \frac{6.808}{7.797} = 0{,}996 \le 1{,}0 \quad \rightarrow \text{ ok!}$$

Como a equação foi satisfeita não ocorrerá o esmagamento do concreto nas bielas de compressão. Caso resultasse valor superior à unidade, haveria a necessidade de se fazer alguma alteração. O aumento da largura ou da altura da viga são soluções comumente utilizadas na prática, sendo que o aumento da largura da viga é muito mais efetivo em aumentar a resistência à torção. Porém, há restrição no caso de viga embutida em parede, pois a viga pode ficar aparente com uma largura maior que a da parede.

b) Cálculo das armaduras para torção

As armaduras mínimas para torção, longitudinal e transversal, são (Eq. 32):

$$A_{s\ell,\text{mín}} = \frac{20\,f_{ct,m}}{f_{ywk}}\,h_e = \frac{20\,.\,0{,}256}{50}\,10 = 1{,}03\,\text{cm}^2/\text{m}$$

[18] O ângulo θ deve ser igual ao utilizado no cálculo da armadura transversal para a força cortante.

$$A_{s,90mín} = \frac{20\, f_{ct,m}}{f_{ywk}}\, b_w = \frac{20\,.\,0{,}256}{50}\, 35 = 3{,}58 \text{ cm}^2/\text{m}$$

com $f_{ct,m} = 0{,}3\sqrt[3]{f_{ck}^{\;2}} = 0{,}3\sqrt[3]{25^2} = 2{,}56\,\text{MPa}$ (resistência média do concreto à tração direta).

Armadura longitudinal conforme a Eq. 27:

$$\frac{A_{s\ell}}{u_e} = \frac{T_{Sd}}{2\, A_e\, f_{ywd}\, tg\,\theta} = \frac{6.808}{2 \cdot 1000 \dfrac{50}{1{,}15}\; tg\,38°} = 0{,}1002 \text{cm}^2/\text{cm}$$

com u_e = 1 m = 100 cm $\rightarrow$ $A_{s\ell}$ = 10,02 cm^2/m $\geq A_{s\ell,mín}$ = 1,03 cm^2/m $\rightarrow$ ok!

Armadura transversal composta por estribos a 90° conforme a Eq. 24:

$$\frac{A_{s,90}}{s} = \frac{T_{Sd}}{2\, A_e\, f_{ywd}}\, tg\,\theta = \frac{6.808}{2 \cdot 1000 \dfrac{50}{1{,}15}}\, tg\,38° = 0{,}0612 \text{cm}^2/\text{cm}$$

e para 1 m (100 cm) de comprimento da viga: $A_{s,90}$ = 6,12 cm^2/m $\geq A_{s,90mín}$ = 3,58 cm^2/m $\rightarrow$ ok!

Conforme a treliça espacial, mostrada na Figura 32, $A_{s,90}$ é a área de um ramo vertical de um estribo fechado com dois ramos verticais, e ele deve estar contido dentro da parede fina, ou seja, dentro da espessura h_e .

c) Detalhamento das armaduras

c1) Armadura longitudinal

A área de armadura longitudinal a ser distribuída ao longo do vão da viga pode ser obtida pela soma das armaduras de flexão e de torção. Como se observa nos diagramas de momentos fletores e momentos torçores (Figura 36 e Figura 39), por simplicidade pode ser analisada apenas a seção onde ocorrem simultaneamente os momentos máximos (M e T), que é a seção de apoio (engaste da viga no pilar). A armadura longitudinal total, determinada na seção de apoio, pode ser estendida ao longo de todo o vão, até a extremidade livre, a favor da segurança, dado que o momento fletor diminui.

A armadura longitudinal total, considerando apenas a torção, é aquela relativa ao perímetro u_e :

$$\frac{A_{s\ell}}{u_e} = 0{,}1002 \text{cm}^2/\text{cm} \quad \rightarrow \quad \text{com } u_e = 130{,}0 \text{ cm:} \quad A_{s\ell,tot} = 0{,}1002\,.\,130{,}0 = 13{,}03 \text{ cm}^2$$

Esta área deve ser distribuída nas quatro faces da seção retangular da viga, proporcionalmente, conforme a NBR 6118, e observe que relativamente a u_e , que é o perímetro do eixo da parede fina, cuja espessura neste caso é h_e .

Face superior:

- da flexão: A_s = 7,03 cm^2
- da torção: $A_s = (b_w - h_e)\, A_{s\ell}$ = (35 – 10) 0,1002 = 2,51 cm^2
- $A_{s,total}$ = 7,03 + 2,51 = 9,54 cm^2 (8 ϕ 12,5 $\rightarrow$ 10,00 cm^2)

Face inferior:

- da flexão: A_s = 0,00 cm^2
- da torção: $A_s = (b_w - h_e)\, A_{s\ell}$ = (35 – 10) 0,1002 = 2,51 cm^2
- $A_{s,total}$ = 2,51 cm^2 (4 ϕ 10 mm $\rightarrow$ 3,20 cm^2)

Faces laterais:

- $A_{s,total} = (h - h_e)\ A_{s\ell} = (50 - 10)\ 0{,}1002 = 4{,}01\ cm^2$ (5 ϕ 10 mm → 4,00 cm^2)

É importante ressaltar que devem ser dispostos 5 ϕ 10 mm em ambas as faces laterais da viga. Esta armadura pode atuar também para restringir as fissuras no concreto por efeito de retração, não sendo necessário acrescentar armadura de pele, embora neste caso a norma não a exija, porque a viga não tem altura superior a 60 cm.

Para uma conferência da armadura longitudinal de torção, pode-se determinar a armadura total em função da armadura calculada para as faces da viga:

$A_{s\ell,tot} = 2(2{,}51 + 4{,}01) = 13{,}04\ cm^2$ → ok!

c2) Armadura transversal

A área total de estribos verticais é calculada pela soma das áreas relativas à força cortante e à torção. A armadura para a força cortante resultou igual à armadura mínima, de 0,0358 cm^2/cm. Considerando o estribo composto por dois ramos verticais, e que a área mínima para a força cortante, para um ramo vertical, é 0,0358/2 = 0,0179 cm^2/cm, a armadura transversal total é:

$$\frac{A_{s,tot}}{s} = \frac{A_{sw,1ramo}}{s} + \frac{A_{s,90}}{s} = 0{,}0179 + 0{,}0612 = 0{,}0791 cm^2/cm$$

O diâmetro do estribo para a torção deve ser igual ou superior a 5 mm e inferior a $b_w/10$ = 350/10 = 35 mm. Fazendo estribo fechado de dois ramos com diâmetro de 6,3 mm (1 ϕ 6,3 mm → 0,31 cm^2) tem-se:

$$\frac{0{,}31}{s} = 0{,}0791 \quad \rightarrow \quad s = 3{,}9\ cm \le s_{máx} = 27{,}6\ cm^{(ver\ nota\ 19)} \quad \rightarrow \text{ ok! (com } s_{máx} \text{ definido no item c4.3)}$$

O espaçamento resultou muito pequeno. Fazendo com diâmetro de 8 mm (1 ϕ 8 mm → 0,50 cm^2) encontra-se:

$$\frac{0{,}50}{s} = 0{,}0791 \quad \rightarrow \quad s = 6{,}3\ cm \le s_{máx} = 27{,}6\ cm \quad \rightarrow \text{ ok!}$$

O espaçamento ainda está pequeno. Fazendo com diâmetro de 10 mm (1 ϕ 10 mm → 0,80 cm^2) encontra-se:

$$\frac{0{,}80}{s} = 0{,}0791 \quad \rightarrow \quad s = 10{,}1\ cm \le s_{máx} = 27{,}6\ cm \quad \rightarrow \text{ ok!}$$

portanto, será adotado estribo com dois ramos ϕ 10 mm c/10 cm (ver Figura 40).

14.3.7. Detalhamento Final das Armaduras

A Figura 40 mostra o detalhamento final das armaduras da viga V1. Como visto, as armaduras para o momento fletor, para a força cortante e para a torção foram calculadas separadamente e somadas na fase final.

O comprimento do gancho do lado esquerdo das barras N2 foi aumentado de 10 cm (8ϕ = 8 . 1,25 = 10 cm) para 40 cm, para garantir uma melhor ancoragem da armadura no pilar. Esta armadura substitui o arranjo de 6 ϕ 12,5, conforme definido no item 14.3.2.

O gancho de 40 cm na extremidade direita das barras N2 visa reforçar a superfície de topo da viga V1, na ligação com a viga V2. Os ganchos nas extremidades dos estribos da V1 devem ser inclinados a 45°, como prescrito pela NBR 6118, e com comprimento de 5 ϕ ≥ 5 cm.

[19] O espaçamento entre os estribos deve ser suficiente para a passagem da agulha do vibrador, com uma folga. Recomenda-se que seja de pelo menos 7 a 8 cm, para facilitar a penetração do concreto.

O espaçamento entre as barras longitudinais para torção não deve superar 35 cm, o que está atendido conforme se verifica no detalhamento (ver item 12.7).

Como a viga V2 está apoiada na viga V1, convém posicionar as barras N2 da V2 sobre as barras N2 da V1, obedecendo ao cobrimento de concreto.

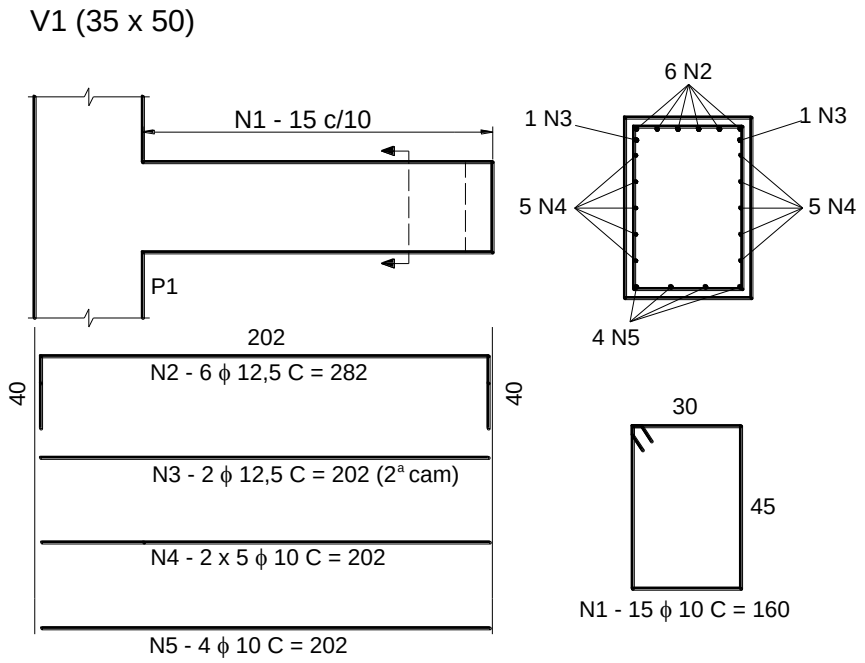


Figura 40 – Detalhamento final das armaduras da viga V1.

15. EXEMPLO NUMÉRICO 2

Este exemplo refere-se ao projeto estrutural de uma laje em balanço (marquise) engastada na viga de apoio. A marquise tem a função arquitetônica de proteger o hall de entrada de uma edificação. A Figura 41 mostra uma perspectiva da estrutura, a Figura 42 mostra a planta de fôrma, a Figura 43 mostra um corte da laje da marquise e a Figura 44 mostra o pórtico do qual a viga V1 faz parte. Para a estrutura pede-se calcular e dimensionar as armaduras da viga V1.[20]

As seguintes informações são conhecidas:

a) marquise (estrutura em balanço composta pela laje L3 e as vigas V2, V3 e V6) acessível a pessoas apenas para serviços de construção e manutenção;
b) edificação inserida em Classe de Agressividade Ambiental II (Tabela 6.1 da NBR 6118), o que leva a $f_{ck} \geq 25$ MPa e relação a/c $\leq 0,60$ (Tabela 7.1 da NBR 6118), $c_{nom} = 3,0$ cm para $\Delta c = 10$ mm (Tabela 7.2 da NBR 6118). Será adotado o concreto C30 ($f_{ck} = 30$ MPa), o qual é maior que o mínimo exigido (C25), e assim o cobrimento pode ser reduzido em 0,5 cm, assim $c_{nom} = c = 2,5$ cm;[21]
c) o coeficiente de ponderação das ações permanentes e variáveis (γ_f) será tomado como 1,4 (Tabela 11.1 da NBR 6118). O coeficiente de ponderação do concreto (γ_c) será tomado como 1,4 e o do aço (γ_s) como 1,15 (Tabela 12.1 da NBR 6118);
d) lajes e vigas da marquise em concreto aparente (sem revestimentos);
e) carga das lajes internas (L1 e L2) na viga V1: $p_{laje} = 5,0$ kN/m;
f) sobre toda extensão da viga V1 há uma parede de alvenaria de bloco cerâmico de oito furos, com espessura final de 23 cm (2,0 cm de revestimento de argamassa de cada lado), altura de 2,60 m, com peso específico (γ_{alv}) de 3,2 kN/m^2;

[20] Este exemplo toma como base aquele apresentado em GIONGO (1994).
[21] A NBR 6118 (item 7.4.7) prescreve que: "*Para concretos de classe de resistência superior ao mínimo exigido, os cobrimentos definidos na Tabela 7.2 podem ser reduzidos em até 5 mm*." Portanto, como o concreto escolhido (C30) é de classe superior ao mínimo exigido (C25), o cobrimento pode ser diminuído em 0,5 cm, ou seja, de 3,0 para 2,5 cm. Essa possível diminuição fica a critério do projetista. Sabe-se que a espessura e a qualidade do concreto do cobrimento são os fatores mais importantes para garantir proteção à armadura contra a corrosão.

g) peso específico do concreto com armadura passiva: γ_{concr} = 25 kN/m^3. Aços CA-50 e CA-60;
h) espessura média de 3,0 cm para a camada de impermeabilização e regularização sobre a laje da marquise (L3), com argamassa de peso específico $\gamma_{arg,imp}$ = 21 kN/m^3;
i) vigas V2, V3 e V6 são consideradas sem função estrutural, como componentes da estética da marquise;
j) a ação do vento e os esforços solicitantes decorrentes serão desprezados por se tratar de uma edificação de baixa altura (apenas dois pavimentos), em região não sujeita a ventos de alta intensidade.

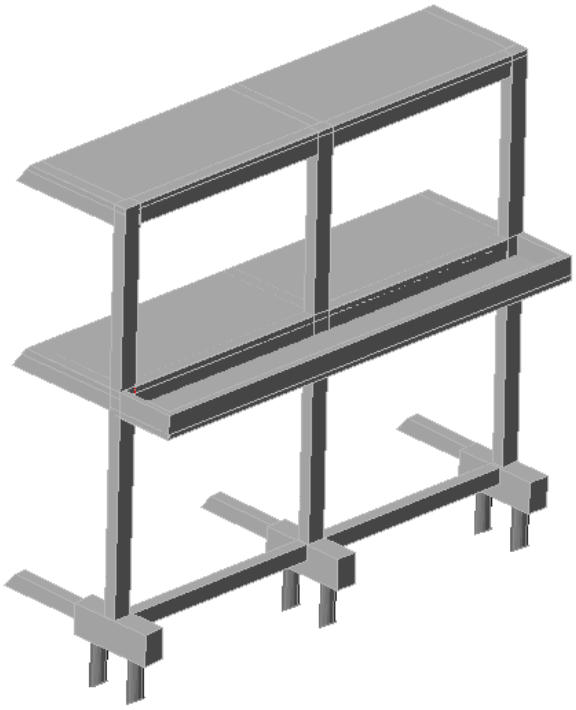


Figura 41 – Perspectiva da estrutura.

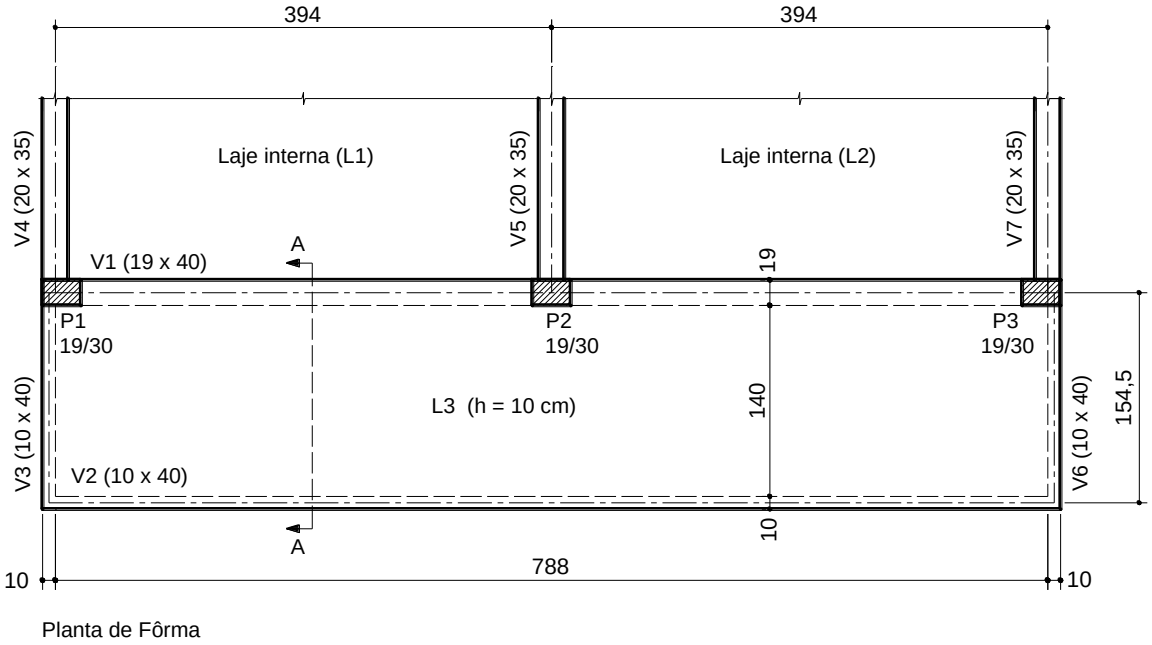


Figura 42 – Planta de fôrma da estrutura. [22]

[22] A planta de fôrma da estrutura é desenhada com o observador posicionado no nível inferior à estrutura que se quer mostrar e olhando para cima. Como as vigas V1, V3 e V6 são invertidas, os traços de uma das faces das vigas estão desenhados com linha tracejada.

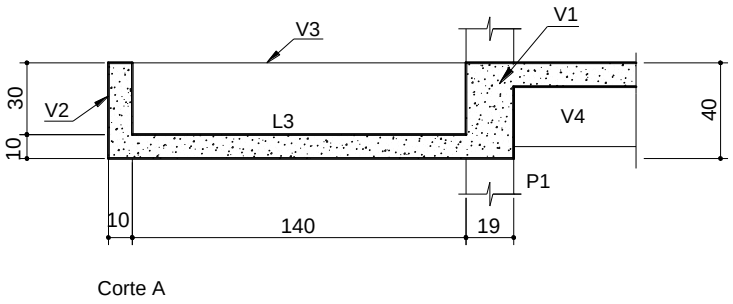


Figura 43 – Desenho em corte da marquise.

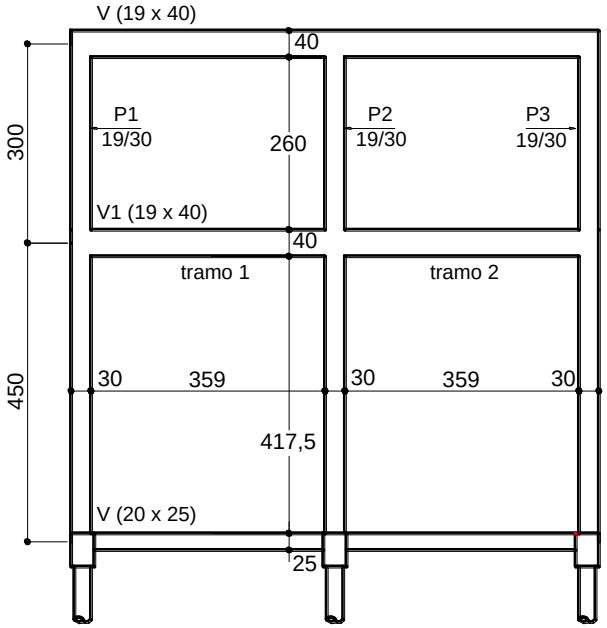


Figura 44 – Vista do pórtico com a viga V1.

RESOLUÇÃO

Como a laje (L3) da marquise em balanço está em um nível inferior ao das lajes internas (L1 e L2) na edificação, não é possível considerar alguma vinculação entre as lajes, ou seja, a laje em balanço, não tendo continuidade física com as lajes internas, não pode ser considerada engastada nas lajes internas. A única alternativa neste caso é engastar a laje L3 na viga V1.

A flexão na laje em balanço age como momento de torção externo aplicado uniformemente distribuído ao longo da viga V1, o que origina o esforço solicitante de momento de torção (T) na viga, o qual deve ser obrigatoriamente considerado no projeto e dimensionamento da V1, ainda que as lajes internas L1 e L2 restrinjam a torção aplicada na V1.

Os momentos de torção (T) na viga V1 tornam-se momentos fletores atuantes nos pilares P1, P2 e P3, devendo ser computados no dimensionamento desses pilares.

No caso de se desejar evitar a torção na viga V1, uma solução possível seria prolongar as vigas V4, V5 e V7 até a extremidade livre da laje L3 em balanço, que passariam a ser responsáveis pelo equilíbrio da laje. A laje, por sua vez, subdividida em duas, passaria a atuar como duas lajes apoiadas nas vigas de borda, sem engastamento na viga V1, e portanto, sem atuação de torção na viga. Outra solução seria o engastamento da laje L3 nas lajes internas L1 e L2, possível apenas se as lajes estivessem com a face superior no mesmo nível, o que também eliminaria a torção na viga V1.

Inicialmente será apresentado o dimensionamento da laje L3, e em seguida o dimensionamento da viga V1.

15.1. Dimensionamento da Laje L3

Na laje ocorrem ações uniformemente distribuídas na área da laje e linearmente distribuídas no contorno externo da laje, representadas pelas cargas das vigas V2, V3 e V6. A altura da laje L3 é de 10 cm.

15.1.1. Ações Uniformemente Distribuídas na Área

As cargas atuantes na laje são as seguintes:
- peso próprio: $g_{pp} = 25 \,.\, 0{,}10 = 2{,}50$ kN/m^2
- impermeabilização: $g_{imp} = 21 \,.\, 0{,}03 = 0{,}63$ kN/m^2
- ação variável: $q = 0{,}5$ kN/m^2 (laje sem acesso público)
- **CARGA TOTAL (p) = 3,63 kN/m^2**

15.1.2. Ações Uniformemente Distribuídas no Contorno

No contorno da laje L3 há a ação do peso próprio das vigas V2, V3 e V6, em concreto aparente:

- $g_{pp,vigas} = 25 \,.\, 0{,}10 \,.\, 0{,}30 = 0{,}75$ kN/m

15.1.3. Cálculo dos Esforços Solicitantes

A laje L3 está engastada na viga V1, e como a laje é armada em uma direção ($\lambda = \ell_y / \ell_x = 798/153 = 5{,}2 > 2$), os esforços solicitantes são calculados supondo-se a laje como viga de largura unitária (1 m), Figura 45.

Com vão livre ℓ_o de 150 cm, o vão efetivo da laje é:

$$a_1 \le \begin{cases} t_1/2 = 19/2 = 9{,}5\,\text{cm} \\ 0{,}3\,h = 0{,}3 \cdot 10 = 3\,\text{cm} \end{cases} \qquad \therefore\ a_1 = 3 \text{ cm} \ ,(a_2 = 0)$$

$\ell_{ef} = \ell_o + a_1 = 150 + 3 = 153$ cm

Os esforços solicitantes máximos são:

$$M = -\left(\frac{3{,}63 \cdot 1{,}53^2}{2} + 0{,}75 \cdot 1{,}48\right) = -5{,}36\,\text{kN.m/m}$$

$V = -(3{,}63 \,.\, 1{,}53 + 0{,}75) = -6{,}30$ kN/m

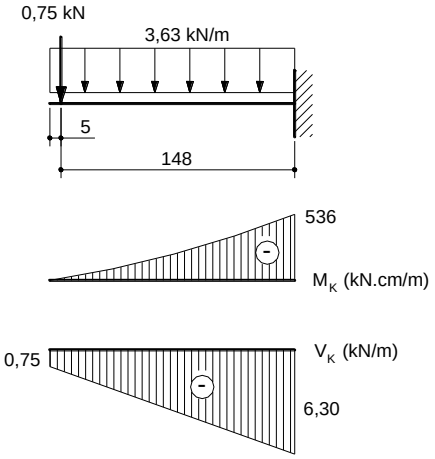


Figura 45 – Esquema estático, carregamento e esforços solicitantes máximos na laje L3.

15.1.4. Verificação da Laje à Força Cortante

A laje deve ser verificada quanto à necessidade ou não de armadura transversal. De modo geral as lajes maciças com cargas totais baixas, como neste caso, não requerem armadura transversal, e por isso, o cálculo não será apresentado.[23]

15.1.5. Determinação da Armadura Longitudinal de Flexão

Considerando que a laje L3 terá uma argamassa de impermeabilização assentada na face superior, para proteção da laje e principalmente da armadura negativa, o cobrimento será considerado 2,0 cm. Supondo ϕ de 6,3 mm, a altura útil d é:

[23] No seguinte texto está apresentada a formulação da NBR 6118 para verificação de lajes maciças à força cortante: BASTOS, P.S. *Lajes de Concreto Armado*. Bauru/SP, Universidade Estadual Paulista (UNESP), Out/2023, 114p. Disponível em (17/10/23): http://wwwp.feb.unesp.br/pbastos/pag_concreto1.htm

d = h – c – ϕ/2 = 10 – 2,0 – 0,63/2 = 7,7 cm

A determinação da armadura principal negativa, posicionada perpendicularmente ao eixo longitudinal da viga V1 e junto à face superior da laje, considerando a altura útil **d** é:

$$K_c = \frac{b_w\, d^2}{M_d} = \frac{100 \cdot 7{,}7^2}{(1{,}4 \cdot 536)} = 7{,}9$$

da Tabela A-1 para concreto C30: $\beta_x = 0{,}09 \leq 0{,}45$ (ok!), $K_s = 0{,}024$ e dom. 2.

$$A_s = K_s \frac{M_d}{d} = 0{,}024 \frac{(1{,}4 \cdot 536)}{7{,}7} = 2{,}34\,\text{cm}^2/\text{m}$$

ϕ 6,3 c/13 cm (2,42 cm²/m, ver Tabela A-11)

A armadura negativa da laje, calculada como viga, considerando os valores contidos na Tabela A-6 e na Tabela A-9, para concreto C30, deve ter o valor mínimo de:

$$A_{s,\text{mín}} = 0{,}15\,\%\, b_w\, h = \frac{0{,}15}{100} 100 \cdot 10 = 1{,}50\,\text{cm}^2/\text{m} < A_s = 2{,}34\ \text{cm}^2/\text{m}$$

O espaçamento máximo para laje armada em uma direção deve atender a:

$$s \leq \begin{cases} 2h = 2 \cdot 10 = 20\,\text{cm} \\ 20\,\text{cm} \end{cases} \qquad \therefore\ s_{\text{máx}} = 20\ \text{cm}$$

Na direção secundária (perpendicular à direção principal), a laje armada em uma direção deve ter uma armadura de distribuição, de área:

$$A_{s,\text{distr}} \geq \begin{cases} 0{,}2A_s = 0{,}2 \cdot 2{,}34 = 0{,}47\,\text{cm}^2/\text{m} \\ 0{,}9\,\text{cm}^2/\text{m} \\ 0{,}5A_{s,\text{mín}} = 0{,}5 \cdot 1{,}50 = 0{,}75\,\text{cm}^2/\text{m} \end{cases} \qquad \therefore\ A_{s,\text{distr}} = 0{,}90\ \text{cm}^2/\text{m}$$

ϕ 4,2 c/15 cm (0,92 cm²/m), obedecendo ao espaçamento máximo de 33 cm entre as barras.

15.1.6. Detalhamento Final das Armaduras

O detalhamento esquemático das armaduras dimensionadas está na Figura 46. Deve-se observar que a armadura principal da laje em balanço é posicionada junto à face superior, isto é, onde ocorrem as tensões normais de tração. A armadura principal da laje deve ser cuidadosamente ancorada na viga V1, onde está engastada.[24] O detalhe em gancho das barras N1 no interior da viga V1 garante a necessária ancoragem.

A armadura inferior (barras N3) não é necessária ao equilíbrio da laje, podendo ser dispensada. No entanto, nas lajes em balanço a sua colocação pode ser útil para aumentar a segurança da laje numa eventual ruína, além de aumentar a ductilidade e diminuir a flecha da laje, que deve ser verificada no caso de um projeto completo.[25]

[24] A ancoragem da armadura principal da laje pode ser avaliada de modo semelhante às vigas.

[25] A flecha da laje L3, por ser uma laje em balanço, deve ser cuidadosamente avaliada. No seguinte texto há a formulação e exemplos de aplicação: BASTOS, P.S.S. *Lajes de Concreto Armado*. Bauru/SP, Universidade Estadual Paulista (UNESP), Out/2023, 114p. Disponível em (17/10/23): http://wwwp.feb.unesp.br/pbastos/pag_concreto1.htm

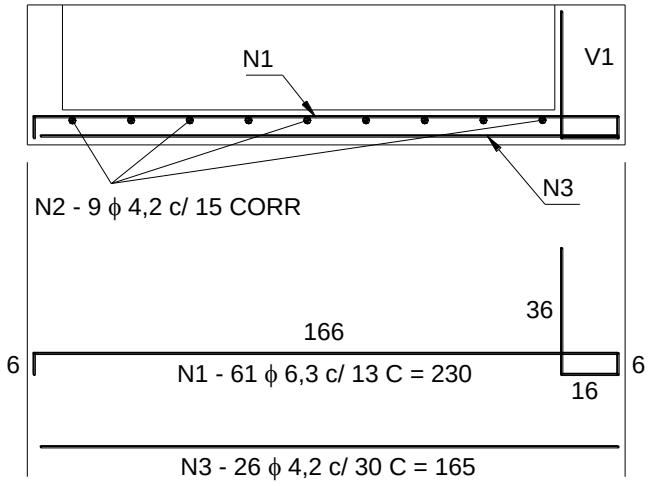


Figura 46 – Detalhamento esquemático das armaduras da laje.

15.2. Dimensionamento da Viga V1 (19 x 40)

Sobre a viga V1 atuam ações provenientes do peso próprio, da parede de alvenaria existente, das lajes internas L1 e L2 do edifício e da laje L3 em balanço (reação de apoio e momento fletor na seção de engastamento da laje, que leva à torção da viga). Todas essas ações são uniformemente distribuídas ao longo do comprimento da viga.

15.2.1. Ações a Considerar

- peso próprio: g_{pp} = 25 . 0,19 . 0,40 = 1,90 kN/m
- parede: g_{par} = 3,2 . 2,60 = 8,32 kN/m
- laje L3 (marquise): p_{laje} = 6,30 kN/m
- laje interna (L1 ou L2): p_{laje} = 5,0 kN/m
- **CARGA TOTAL (p) = 21,52 kN/m**

15.2.2. Esforços Solicitantes Internos

O modelo adotado para o esquema estrutural da viga, para a determinação dos momentos fletores e torçores e forças cortantes, é aquele que considera a viga vinculada aos pilares extremos por meio de engastes elásticos (molas). Para a avaliação dos momentos torçores há que se considerar os dois tramos da viga engastados nos pilares P1, P2 e P3.

A viga V1 é simétrica em geometria e carregamento, de modo que os vãos livres e efetivos dos dois tramos são iguais.

vão livre: ℓ_o = 394 + 10 – 30 – 15 = 359 cm

$$a_1 \le \begin{cases} t_1/2 = 30/2 = 15\,\text{cm} \\ 0{,}3\,h = 0{,}3 \cdot 40 = 12\,\text{cm} \end{cases} \qquad \therefore\ a_1 = 12 \text{ cm} = a_2$$

$\ell_{ef} = \ell_o + a_1$ = 359 + 12 +12 = 383 cm

O apoio intermediário da viga (pilar P2) pode ser considerado como um apoio simples, pois de acordo com o esquema mostrado na Figura 44 tem-se que o comprimento equivalente do lance inferior do pilar é ℓ_e = 450 cm e $\ell_e/4$ = 450/4 = 112,5 cm. Como a dimensão do pilar na direção da viga (b_{int} = 30 cm) é

menor que $\ell_e/4$ (112,5 cm) pode considerar o pilar intermediário como um apoio simples. Caso b_{int} resultasse maior que $\ell_e/4$, os dois tramos da viga deveriam ser considerados engastados no pilar P2.[26]

A Figura 47 mostra o esquema estático da viga, com os carregamentos atuantes, vãos efetivos, numeração das barras e nós, etc. Para determinação dos esforços solicitantes na viga pode ser utilizado algum programa computacional com essa finalidade, como o programa Ftool.[27]

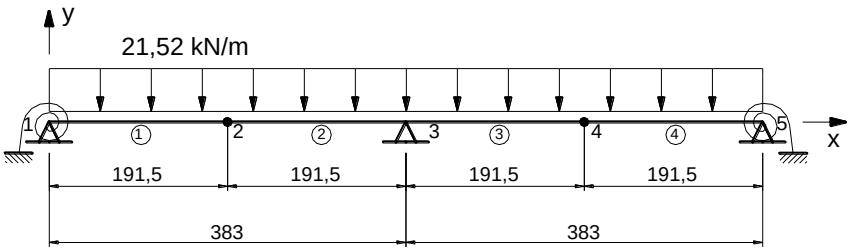


Figura 47 – Esquema estático, carregamento e numeração dos nós e barras da viga V1.

Considerando que os pilares extremos P1 e P3, nos quais a viga se encontra vinculada, estão engastados na estrutura de fundação (bloco de duas estacas e vigas baldrames), o coeficiente de rigidez do lance inferior do pilar será tomado como $4EI/\ell/2$.[28] A rigidez da mola que vincula a viga a esses pilares é avaliada por: $K_{mola} = K_{p,inf} + K_{p,sup}$.

Supondo a viga trabalhando em serviço no Estádio II (já fissurada), para o módulo de elasticidade do concreto será considerado o valor secante. O módulo de elasticidade tangente na origem pode ser avaliado pela seguinte expressão (NBR 6118, item 8.2.8):

$$E_{ci} = \alpha_E\, 5600\sqrt{f_{ck}} = 1{,}2\,.\,5600\sqrt{30} = 36.807 \text{ MPa} = 3.680.7 \text{ kN/cm}^2$$

com $\alpha_E = 1{,}2$ para brita de basalto (ou diabásio).

O módulo de elasticidade secante (E_{cs}) é avaliado por:

$$E_{cs} = \alpha_i\, E_{ci} \qquad \text{, com} \quad \alpha_i = 0{,}8 + 0{,}2\frac{f_{ck}}{80} \le 1{,}0$$

$$\alpha_i = 0{,}8 + 0{,}2\frac{30}{80} = 0{,}875 \le 1{,}0 \qquad \rightarrow \text{ ok!}$$

$$E_{cs} = 0{,}875\,.\,3680{,}7 \cong 3.221 \text{ kN/cm}^2$$

O momento de inércia, dos lances inferior e superior dos pilares P1 e P3, é:

$$I_{p,sup} = I_{p,inf} = \frac{b\,h^3}{12} = \frac{19\,.\,30^3}{12} = 42.750 \text{ cm}^4$$

Observe que a dimensão do pilar considerada ao cubo é aquela coincidente com a direção do eixo longitudinal da viga. Os coeficientes de rigidez dos lances inferior e superior dos pilares são:

$$K_{p,inf} = \frac{4EI}{\ell/2} = \frac{4\cdot 3221\cdot 42750}{450/2} = 2.447.960 \text{ kN.cm}$$

$$K_{p,sup} = \frac{4EI}{\ell/2} = \frac{4\cdot 3221\cdot 42750}{300/2} = 3.671.940 \text{ kN.cm}$$

[26] Ver BASTOS, P.S. *Vigas de Concreto Armado - Dimensionamento, flecha e fissuração*. Bauru/SP, Universidade Estadual Paulista (UNESP), Abril/2024, 173p. Disponível em (29/04/24): http://wwwp.feb.unesp.br/pbastos/pag_concreto2.htm

[27] Para o exemplo foi aplicado o programa para cálculo de pórtico plano, chamado PPLAN4, de CORRÊA et al. (1992).

[28] Quando o pilar for considerado apoiado na estrutura de fundação, o coeficiente de rigidez poderá ser tomado como $3EI/\ell_e$. Pilares sobre blocos de uma estaca devem ser considerados simplesmente apoiados (articulados).

Rigidez da mola:

$K_{mola} = K_{p,inf} + K_{p,sup} = 2.447.960 + 3.671.940 = 6.119.900$ kN.cm

Para determinação dos esforços solicitantes na viga foi aplicado o programa FTOOL[29], conforme a A viga mostrada na Figura 47. A

Figura 48 mostra a tela do programa, e a Figura 49 mostra o esquema estático com os vínculos, distâncias e carregamento na viga. A Figura 50 mostra os diagramas de forças cortantes e de momentos fletores (valores característicos máximos) obtidos no programa. Na Figura 50 também estão incluídos os esforços de torção (T), provocados pelo momento fletor na laje em balanço (5,36 kN.m), que é momento de torção externo na viga.

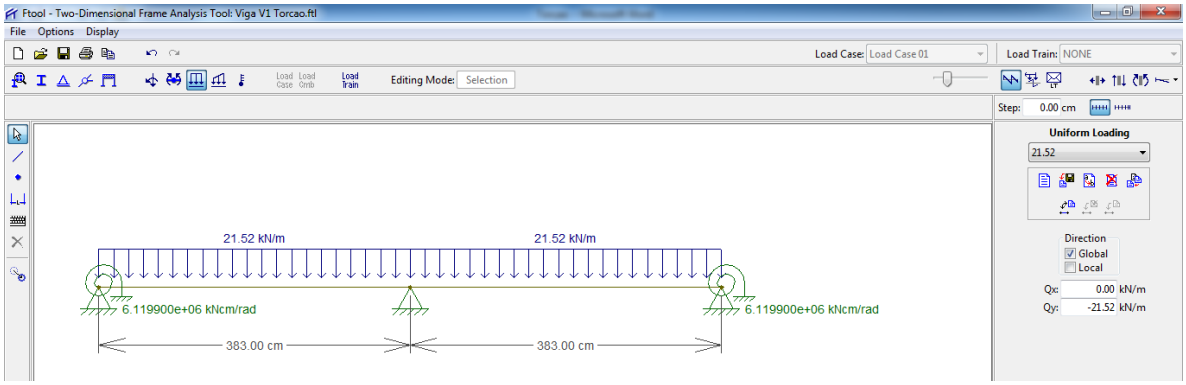


Figura 48 – Tela da viga V1 no Ftool. (FTOOL, https://www.ftool.com.br/Ftool)

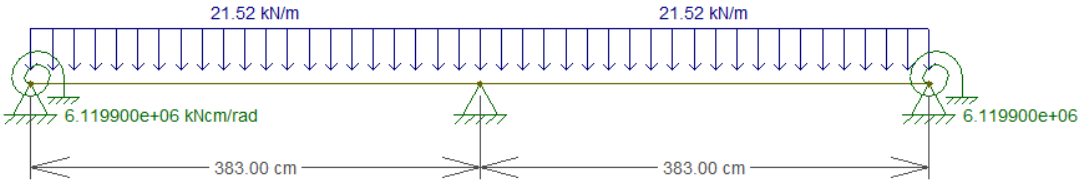


Figura 49 – Esquema estático com os vínculos, distâncias e carga uniformemente distribuída na viga V1. (FTOOL, https://www.ftool.com.br/Ftool)

Os momentos de torção máximos nos apoios são calculados considerando-se cada tramo, individualmente, biengastado nas extremidades. Conforme mostrado na Figura 50 o momento de torção máximo é:

$$T_k = \frac{5{,}36 \cdot 3{,}83}{2} = 10{,}26 \text{ kN.m} = 1.026 \text{ kN.cm}$$

Serão dimensionadas as armaduras longitudinal e transversal, para os esforços solicitantes de força cortante e momentos fletores e torçores.

[29] FTOOL, versão 4.00.04 (jan/18). Disponível em (6/07/2021): https://www.ftool.com.br/Ftool

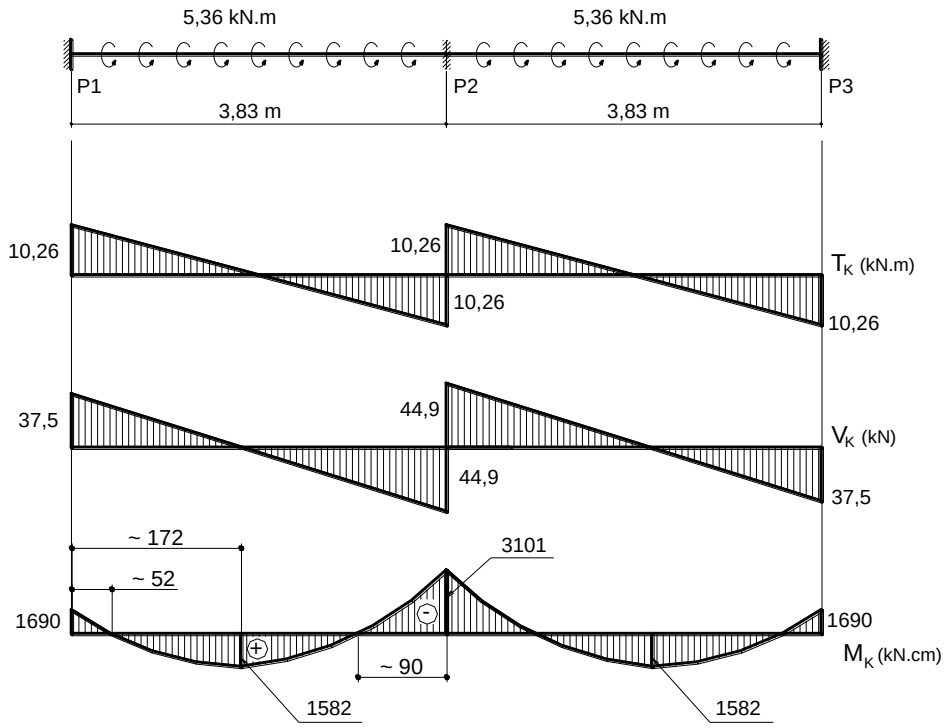


Figura 50 – Diagramas de momentos torçores (T_k , kN.cm), forças cortantes (V_k , kN) e momentos fletores (M_k , kN.cm) na viga V1. (FTOOL, https://www.ftool.com.br/Ftool)

15.2.3. Armadura Mínima de Flexão

Conforme a Tabela A-6, para seção retangular e concreto C30 a taxa mínima de armadura ($\rho_{mín}$) deve ser de 0,15 % A_c , portanto:

$A_{s,mín}$ = 0,0015 . 19 . 40 = 1,14 cm^2

15.2.4. Armadura de Pele

A armadura de pele não é necessária, dado que a viga não tem altura superior a 60 cm. Para a viga com largura de 19 cm e a altura de 40 cm não devem surgir fissuras por efeito de retração do concreto.

15.2.5. Dimensionamento das Armaduras Longitudinais Negativas

a) Apoio interno (P2)

Os momentos fletores característico e de cálculo são:

M_k = – 3.101 kN.cm → $M_d = \gamma_f \; M_k$ = 1,4 (– 3.101) = – 4.341 kN.cm

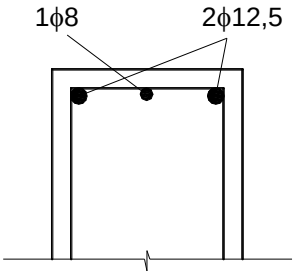
Por simplicidade e porque o momento fletor negativo no apoio do pilar P2 é pequeno, não será feita redução de M para δM. Para a altura da viga de 40 cm será adotada a altura útil de 36 cm. A laje em balanço (L3) está comprimida pelo momento fletor negativo, de modo que pode contribuir com a viga e forma uma viga de seção L. A largura colaborante proporcionada pela laje, conforme a NBR 6118, é:[30]

b_3 = 0,10 (0,6 . 383) = 23 cm

A largura colaborante é: $b_f = b_w + b_3$ = 19 + 23 = 42 cm

[30] Ver BASTOS, P.S. *Flexão Normal Simples - Vigas*. Bauru/SP, Universidade Estadual Paulista (UNESP), out/2023, 74p. Disponível em (26/03/24): https://wwwp.feb.unesp.br/pbastos/concreto1/FlexaoSimples.pdf

$$K_c = \frac{b_f\ d^2}{M_d} = \frac{42\,.\,36^2}{4.341} = 12{,}5$$



para o concreto C30 na Tabela A-1: $\beta_x = x/d = 0{,}06 \leq 0{,}45$ (ok!), $K_s = 0{,}024$ e domínio 2.

Ainda resulta que $0{,}8x < h_f = 10$ cm, e o cálculo é de seção L como se fosse retangular b_f . h. A armadura resulta:

$$A_s = K_s\,\frac{M_d}{d} = 0{,}024\frac{4.341}{36} = 2{,}89\,\text{cm}^2 > A_{s,\text{mín}} = 1{,}14\ \text{cm}^2$$

2 ϕ 12,5 + 1 ϕ 8 (2,50 + 0,50 = 3,00 cm^2) ou 4 ϕ 10 mm (3,20 cm^2)

A distância livre horizontal entre as barras deve ser superior a 25 mm, a fim de permitir a passagem da agulha do vibrador. Supondo o diâmetro do estribo igual a 6,3 mm, a distância livre resulta:

$$a_h = \frac{19 - \left[2\left(2{,}5 + 0{,}63\right) + 2\,.\,1{,}25 + 0{,}8\right]}{2} = 4{,}7\ \text{cm}$$

distância mais que suficiente para a passagem da agulha do vibrador. A distância da base da viga ao CG da armadura é:

a_{cg} = 2,5 + 0,63 + 1,25/2 = 3,8 cm ≅ 4,0 cm (valor adotado)

b) Apoios extremos (P1 e P3)

Os momentos fletores característico e de cálculo são:

M_k = – 1.690 kN.cm → $M_d = \gamma_f\,.\,M_k$ = 1,4 (– 1.690) = – 2.366 kN.cm

Considerando seção L com b_f = 42 cm e d = 36 cm:

$$K_c = \frac{b_f\ d^2}{M_d} = \frac{42\,.\,36^2}{2.366} = 23{,}0$$

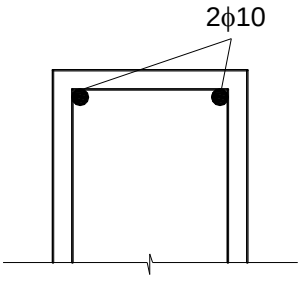


Tabela A-1 com concreto C30: $\beta_x = x/d = 0{,}04 \leq 0{,}45$ (ok!), $K_s = 0{,}023$, domínio 2, e $0{,}8x < h_f$. A armadura é:

$$A_s = K_s\,\frac{M_d}{d} = 0{,}023\frac{2.366}{36} = 1{,}51\,\text{cm}^2 > A_{s,\text{mín}} = 1{,}14\ \text{cm}^2$$

2 ϕ 10 mm (1,60 cm^2)

15.2.6. Dimensionamento da Armadura Longitudinal Positiva

Os momentos fletores característico e de cálculo são:

M_k = 1.582 kN.cm → $M_d = \gamma_f\,.\,M_k$ = 1,4 . 1582 = 2.215 kN.cm

Considerando que as lajes internas (L1 e L2) sejam também maciças de concreto, no dimensionamento ao momento fletor positivo máximo pode-se considerar a contribuição da laje para formar uma seção L, dado que a laje está comprimida:

$b_1 = 0{,}10\ (0{,}6\ .\ 383) = 23$ cm $\rightarrow$ $b_f = b_w + b_1 = 19 + 23 = 42$ cm

$$K_c = \frac{b_f\ d^2}{M_d} = \frac{42\,.\,36^2}{2.215} = 11{,}1$$

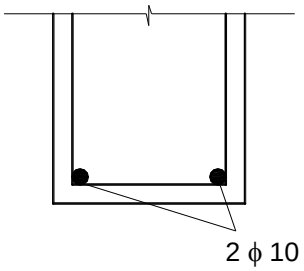


Tabela A-1 com concreto C30: $\beta_x = x/d = 0{,}06 \leq 0{,}45$ (ok!), $K_s = 0{,}024$, domínio 2, e $0{,}8x < h_f$. A armadura é:

$$A_s = K_s\ \frac{M_d}{d} = 0{,}024\frac{2.215}{36} = 1{,}48\,\text{cm}^2 > A_{s,mín} = 1{,}14\ \text{cm}^2$$

2 ϕ 10 mm (1,60 cm^2)

15.2.7. Dimensionamento da Armadura Transversal à Força Cortante

A resolução da viga à força cortante será feita mediante as equações simplificadas desenvolvidas em BASTOS (2023).[31] Será adotado o Modelo de Cálculo I (θ = 45°) para a inclinação da diagonais comprimidas.

a) Pilar interno P2

As forças cortantes característica e de cálculo são:

$V_k = 44{,}9$ kN.cm $\rightarrow$ $V_{Sd} = \gamma_f\ .\ V_k = 1{,}4\ .\ 44{,}9 = 62{,}9$ kN

a1) Verificação das diagonais de compressão

Da Tabela A-4, para o concreto C30, determina-se a força cortante máxima:

$V_{Rd2} = 0{,}51\ b_w\ d = 0{,}51\ .\ 19\ .\ 36 = 348{,}8$ kN

$V_{Sd} = 62{,}9$ kN $\leq V_{Rd2} = 348{,}8$ kN $\rightarrow$ ok!

$\therefore$ não ocorrerá esmagamento do concreto nas diagonais de compressão.

a2) Cálculo da armadura transversal

Da mesma Tabela A-4, para o concreto C30 a equação para determinar a força cortante correspondente à armadura mínima é:

$V_{Sd,mín} = 0{,}132\ b_w\ d = 0{,}132\ .\ 19\ .\ 36 = 90{,}3$ kN

$V_{Sd} = 62{,}9$ kN $< V_{Sd,mín} = 90{,}3$ kN $\rightarrow$ portanto, deve-se dispor a armadura transversal mínima

A armadura mínima é calculada pela equação:

$$A_{sw,mín} = \frac{20\,f_{ct,m}}{f_{ywk}}\,b_w \quad (\text{cm}^2/\text{m}),\ \text{com}\ f_{ct,m} = 0{,}3\sqrt[3]{f_{ck}^{\ 2}} = 0{,}3\sqrt[3]{25^2} = 2{,}56\,\text{MPa}$$

[31] BASTOS, P.S. *Dimensionamento de vigas de concreto armado à força cortante*. Bauru/SP, Universidade Estadual Paulista (UNESP), nov/2023, 77p. Disponível em (26/03/24): http://wwwp.feb.unesp.br/pbastos/pag_concreto2.htm

$$A_{sw,mín} = \frac{20\,.\,0{,}256}{50}19 = 1{,}95\,cm^2/m$$

A força cortante de cálculo nos pilares extremos (V_{Sd} = 52,5 kN) é também menor que a força cortante mínima, o que significa que a armadura mínima deve se estender ao longo dos dois tramos da viga V1.

a3) Detalhamento da armadura transversal

- Diâmetro do estribo: 5 mm $\leq \phi_t \leq b_w/10$ $\rightarrow$ $\phi_t \leq 190/10 \leq 19$ mm
- Espaçamento máximo:[32]

$0{,}67\ V_{Rd2} = 0{,}67\ .\ 348{,}8 = 233{,}7$ kN

$V_{Sd,máx} = 62{,}9$ kN < 233,7 kN $\rightarrow$ $s \leq 0{,}6d \leq 30$ cm

$0{,}6d = 0{,}6\ .\ 36 = 21{,}6$ cm $\rightarrow$ Portanto, $s_{máx} = 21{,}6$ cm

15.2.8. Ancoragem das Armaduras Longitudinais

a) Armadura positiva nos pilares extremos P1 e P3

Como a viga tem simetria de carregamento e geometria, a ancoragem nos pilares P1 e P3 é idêntica.

Valor da decalagem do diagrama de momentos fletores (a_ℓ) segundo o Modelo de Cálculo I, para estribos verticais:[33]

$$a_\ell = 0{,}5d\,\frac{V_{Sd,máx}}{(V_{Sd,máx} - V_c)} \leq d \qquad \text{, com } a_\ell \geq 0{,}5d$$

Na Flexão Simples, $V_c = V_{c0} = 0{,}6 f_{ctd}\, b_w\, d = 0{,}6\ .\ 0{,}145\ .\ 19\ .\ 36 = 59{,}5$ kN

$$f_{ctd} = \frac{f_{ctk,inf}}{\gamma_c} = \frac{0{,}7\,f_{ct,m}}{\gamma_c} = \frac{0{,}7\,.\,0{,}3}{\gamma_c}\sqrt[3]{f_{ck}^{\ 2}} = \frac{0{,}7\,.\,0{,}3}{1{,}4}\sqrt[3]{30^2} = 1{,}45 \text{ MPa} = 0{,}145 \text{ kN/cm}^2$$

$$a_\ell = 0{,}5\,.\,36\,\frac{52{,}5}{(52{,}5 - 59{,}5)} = 18\frac{52{,}5}{-7}$$

a fração resultou com valor negativo, portanto, $a_\ell = 0{,}5d = 18$ cm.

A armadura a ancorar no apoio é:

$$A_{s,anc} = \frac{a_\ell}{d}\frac{V_{Sd}}{f_{yd}} = \frac{18}{36}\frac{52{,}5}{(50/1{,}15)} = 0{,}60\,cm^2$$

A armadura calculada a ancorar no apoio deve atender à armadura mínima:

$$A_{s,anc} \geq \begin{cases} \frac{1}{3}A_{s,vão} & \text{se } M_{apoio} = 0 \text{ ou negativo de valor } |M_{apoio}| \leq 0{,}5M_{vão} \\ \frac{1}{4}A_{s,vão} & \text{se } M_{apoio} = \text{negativo e de valor } |M_{apoio}| > 0{,}5M_{vão} \end{cases}$$

Sendo $|M_{d,apoio}| = 1{,}4\ (-1.690) = -2.366$ kN.cm, e $M_{d,vão} = 1{,}4\ .\ 1582 = 2.215$ kN.cm, fica:

[32] Deve ser verificado também o espaçamento entre os ramos verticais dos estribos ($s_{t,máx}$).

[33] BASTOS, P.S. *Ancoragem e emenda de armaduras*. Bauru/SP, Universidade Estadual Paulista (UNESP), mar/2024, 26p. Disponível em (26/03/24): http://wwwp.feb.unesp.br/pbastos/pag_concreto2.htm

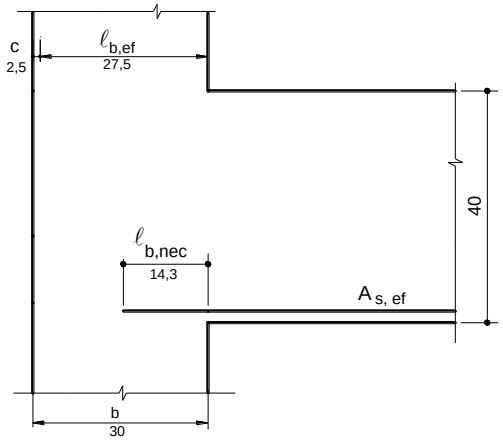
$\left|M_{d,apoio}\right| = \left|-2.366\right|$ kN.cm > $M_{d,vão}/2$ = 2.215/2 = 1.107 kN.cm

Portanto, $A_{s,anc} \geq 1/4\ A_{s,vão}$ = 1,48/4 = 0,37 cm^2

$A_{s,anc}$ = 0,60 cm^2 $\geq$ 1/4 $A_{s,vão}$ = 0,37 cm^2 $\rightarrow$ ok! portanto, ancorar 0,60 cm^2

A armadura positiva do vão adjacente é composta por 2 ϕ 10 mm (1,60 cm^2), barras que deverão ser obrigatoriamente estendidos até os apoios. Portanto, $A_{s,ef}$ = 1,60 cm^2 > $A_{s,anc}$ = 0,60 cm^2.

O comprimento de ancoragem básico (ℓ_b), conforme a Tabela A-7, para barra com diâmetro de 10 mm, concreto C30, aço CA-50, região de boa aderência e sem gancho, é 33 cm. O comprimento de ancoragem necessário resulta:



$$\ell_{b,nec} = \ell_b \frac{A_{s,anc}}{A_{s,ef}} = 33\frac{0,60}{1,60} = 12,4\,\text{cm}$$

O comprimento de ancoragem necessário deve atender a um comprimento de ancoragem mínimo:

$$\ell_{b,nec} \geq \begin{cases} \ell_{b,mín} \\ r + 5,5\phi \\ 6\,\text{cm} \end{cases} \quad \text{, com } \ell_{b,mín}\text{:}$$

$$\ell_{b,mín} \geq \begin{cases} 0,3\ell_b = 0,3\,.\,33 = 9,9\,\text{cm} \\ 10\,\phi = 10\,.\,1,0 = 10,0\,\text{cm} \\ 10\,\text{cm} \end{cases} \qquad \therefore\ \ell_{b,mín} = 10,0\ \text{cm}$$

O diâmetro do pino de dobramento (D) (com D determinado na Tabela A-10) vale 5ϕ. O raio r resulta:

r = D/2 = 5ϕ/2 = 5 . 1,0/2 = 2,5 cm

r + 5,5ϕ = 2,5 + 5,5 . 1,0 = 8,0 cm

Assim tem-se:

$$\ell_{b,nec} \geq \begin{cases} \ell_{b,mín} = 10,0\,\text{cm} \\ r + 5,5\phi = 8,0\,\text{cm} \\ 6\,\text{cm} \end{cases} \qquad \therefore\ \ell_{b,nec} = 12,4\ \text{cm} \geq 10,0\ \text{cm} \ \rightarrow\ \text{ok!}$$

O comprimento de ancoragem efetivo no apoio é:

$\ell_{b,ef}$ = b – c = 30 – 2,5 = 27,5 cm

Verifica-se que o comprimento de ancoragem necessário (sem gancho) é inferior ao comprimento de ancoragem efetivo ($\ell_{b,corr}$ = 12,4 cm < $\ell_{b,ef}$ = 27,5 cm). Isto significa que é possível fazer a ancoragem reta, no comprimento de 12,4 cm. A favor da segurança as duas barras serão estendidas até a face externa do pilar, obedecido o cobrimento, como mostrado na Figura 53 (barras N5).[34]

[34] Para uma melhor ancoragem e a favor da segurança o gancho pode ser feito na extremidade das barras.

b) Armadura positiva no pilar intermediário P2

Estendendo 2 ϕ 10 (1,60 cm^2) da armadura longitudinal positiva até o pilar intermediário, esta armadura deve ser superior à mínima.

Sendo $|M_{d,apoio}| = 1,4\ (-3.101) = -4.341$ kN.cm, e $M_{d,vão} = 1,4 \cdot 1582 = 2.215$ kN.cm, fica:

$$\left|M_{d,apoio}\right| = \left|-4.341\right| \text{ kN.cm} > M_{d,vão}/2 = 2.215/2 = 1.107 \text{ kN.cm}$$

Portanto, $A_{s,\,anc} \geq 1/4\ A_{s,vão} = 1,48/4 = 0,37\ cm^2$

$A_{s,ef} = 1,60\ cm^2 > 1/4\ A_{s,vão} = 0,37\ cm^2$

As duas barras de 10 mm devem se estender pelo menos 10ϕ além da face do apoio.

c) Armadura negativa nos pilares extremos P1 e P3

A armadura negativa proveniente do engastamento elástico da viga nos pilares extremos deve penetrar até próximo à face externa do pilar, respeitando-se a espessura do cobrimento, e possuir um gancho direcionado para baixo, com comprimento de pelo menos 35ϕ. Para diâmetro de 10 mm, o diâmetro de dobramento deve ser de 15ϕ, como indicado na Figura 51.

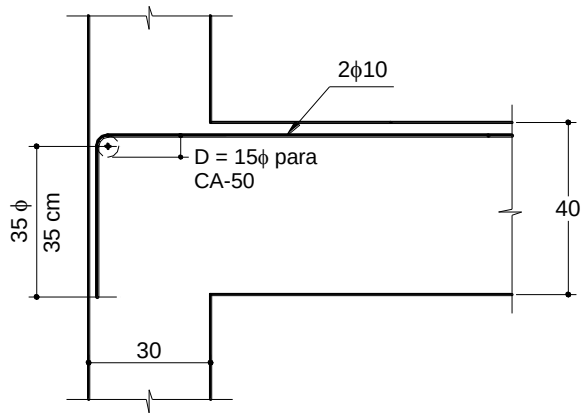


Figura 51 – Ancoragem da armadura negativa nos pilares extremos.

15.2.9. Dimensionamento à Torção

O momento de torção característico (T_k) é 1.026 kN.cm e o momento de cálculo é:

$T_{Sd} = \gamma_f \cdot T_k = 1,4 \cdot 1026 = 1.436$ kN.cm

A armadura transversal para a força cortante foi dimensionada segundo o Modelo de Cálculo I (θ = 45°), ângulo que também deve ser considerado no dimensionamento da viga à torção.

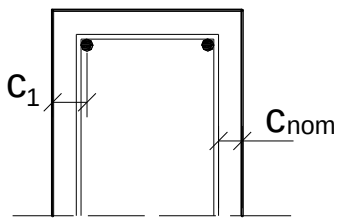
a) Verificação das diagonais comprimidas

Área da seção transversal: $A = b_w \cdot h = 19 \cdot 40 = 760\ cm^2$

Perímetro da seção transversal: $u = 2\ (b_w + h) = 2\ (19 + 40) = 118$ cm

A Eq. 19 e a Eq. 20 fornecem os limites para a espessura h_e da parede fina:

$$h_e \le \frac{A}{u} = \frac{760}{118} = 6{,}4\,\text{cm} \qquad \text{e} \qquad h_e \ge 2c_1$$



Com c = 2,5 cm e supondo ϕ_ℓ = 12,5 mm e ϕ_t = 8 mm tem-se:

$c_1 = \phi_\ell/2 + \phi_t + c_{nom} = 1{,}25/2 + 0{,}8 + 2{,}5 = 3{,}925$ cm

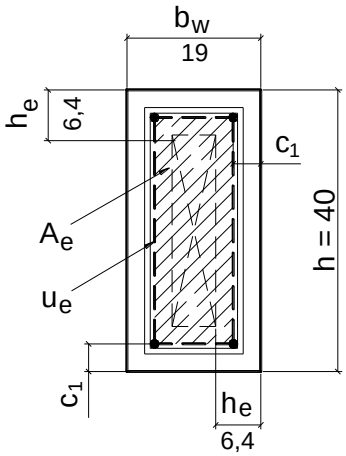
$h_e \ge 2c_1 \ge 2 \,.\, 3{,}925 \ge 7{,}9$ cm

Portanto, os limites para h_e são: 7,9 cm $\le h_e \le$ 6,4 cm, ou seja: $h_e \le$ 6,4 cm e $h_e \ge$ 7,9 cm, de modo que não é possível adotar um valor para h_e que atenda aos limites.

Na torção, para resolver o problema, aumentar a largura da viga é a solução mais efetiva, embora outras soluções sejam possíveis. Uma nova largura pode ser determinada fazendo $h_e = A/u = 2c_1 = 7{,}9$ cm, que é o valor máximo para h_e . Com A/u = 7,9 resulta a largura de 26 cm, e 7,9 cm $\le h_e \le$ 7,9 cm, que resolve o problema, com a seção 26 x 40. Resta verificar se o projeto arquitetônico permite a viga com esta largura.

No caso, por exemplo, de não ser permitido aumentar a largura de 19 cm, a altura necessária para resolver o problema é de 94 cm, o que também resulta 7,9 cm $\le h_e \le$ 7,9 cm. Conclui-se, portanto, que aumentar a altura da viga não é uma solução eficiente.

Quando ocorre $A/u < 2c_1$ e não se deseja fazer alterações na seção transversal, a NBR 6118 permite adotar:



$h_e = A/u \le b_w - 2c_1$

$h_e = A/u = 6{,}4$ cm $\le b_w - 2c_1 = 19 - 2 \,.\, 3{,}925 = 11{,}2$ cm $\rightarrow$ ok!

$\therefore\ h_e = 6{,}4$ cm

A área A_e é então definida pelos eixos das barras dos cantos (respeitando-se o cobrimento exigido nos estribos):

$A_e = (b_w - 2c_1) \,.\, (h - 2c_1) = (19 - 7{,}9) \,.\, (40 - 7{,}9) = 356{,}3\ \text{cm}^2$

Neste caso, o perímetro da área equivalente A_e deve ser tomado como:

$u_e = 2\,[(b_w - 2c_1) + (h - 2c_1)] = 2\,[(19 - 7{,}9) + (40 - 7{,}9)] = 86{,}4$ cm

O momento torçor máximo, determinado pela Eq. 22, com ângulo θ = 45° (igual ao ângulo aplicado no cálculo da viga à força cortante, no caso o Modelo de Cálculo I) é:

$T_{Rd,2} = 0{,}5\ \alpha_{v2}\ f_{cd}\ A_e\ h_e\ \text{sen}\ 2\,\theta = 0{,}5\ (1 - 30/250) \,.\, (3{,}0/1{,}4)\ 356{,}3 \,.\, 6{,}4 \,.\, \text{sen}\ 2 \,.\, 45° = 2.150{,}0$ kN.cm

Para não ocorrer esmagamento das bielas comprimidas de concreto, conforme a Eq. 34 deve-se ter:

$$\frac{V_{Sd}}{V_{Rd2}} + \frac{T_{Sd}}{T_{Rd2}} \le 1$$

Como o momento de torção (T) tem valor máximo igual nos três apoios, a verificação das diagonais de compressão será feita para a força cortante máxima atuante na viga ($V_{Sd,P2}$ = 62,9 kN no pilar P2). A força cortante máxima calculada para a viga é V_{Rd2} = 294,1 kN, e substituindo os valores encontra-se:

$$\frac{62{,}9}{294{,}1} + \frac{1.436}{2.150{,}0} = 0{,}88 \le 1{,}0 \quad \rightarrow \quad \text{ok!}$$

Como a equação foi satisfeita, não ocorrerá o esmagamento do concreto nas diagonais de compressão.

b) Cálculo das armaduras

As armaduras mínimas para torção, longitudinal e transversal, são (Eq. 32):

$$A_{s\ell,mín} = \frac{20\, f_{ct,m}}{f_{ywk}}\, h_e = \frac{20 \,.\, 0{,}290}{50}\, 6{,}4 = 0{,}74\, cm^2/m$$

$$A_{s,90mín} = \frac{20\, f_{ct,m}}{f_{ywk}}\, b_w = \frac{20 \,.\, 0{,}290}{50}\, 19 = 2{,}20\ cm^2/m$$

com $f_{ct,m} = 0{,}3\sqrt[3]{f_{ck}^{\ 2}} = 0{,}3\sqrt[3]{30^2} = 2{,}90\,MPa$ (resistência média do concreto à tração direta).

Armadura longitudinal conforme a Eq. 27:

$$\frac{A_{s\ell}}{u_e} = \frac{T_{Sd}}{2\, A_e\, f_{ywd}\, tg\,\theta} = \frac{1.436}{2 \cdot 356{,}3\, \dfrac{50}{1{,}15}\ tg\,45°} = 0{,}0463 cm^2/cm$$

com u_e = 100 cm, $A_{s\ell}$ = 4,63 $cm^2/m \geq A_{s\ell,mín}$ = 0,66 cm^2/m $\rightarrow$ ok!

Armadura transversal (estribos) conforme a Eq. 24:

$$\frac{A_{s,90}}{s} = \frac{T_{Sd}}{2\, A_e\, f_{ywd}}\, tg\,\theta = \frac{1.436}{2 \cdot 356{,}3\, \dfrac{50}{1{,}15}}\, tg\,45° = 0{,}0463 cm^2/cm$$

com s = 100 cm, $A_{s,90}$ = 4,63 $cm^2/m \geq A_{s,90mín}$ = 1,95 cm^2/m $\rightarrow$ ok!

c) Detalhamento das armaduras

c1) Armadura longitudinal

A área de armadura longitudinal, em cada face da seção retangular da viga, é obtida pela soma das armaduras longitudinais de flexão e de torção. Deve ser feita uma análise dos diagramas de momentos fletores e de momentos torçores, de forma a que a armadura longitudinal final "cubra" tanto os momentos fletores quanto os torçores, conforme suas variações ao longo dos tramos. Se analisados os diagramas mostrados na Figura 50, observa-se que o momento de torção máximo (T) ocorre nos apoios, e diminui em direção ao centro do tramo. Assim, por simplicidade, podem ser analisadas as seções correspondentes aos apoios (pilares), combinando-se as armaduras longitudinais de flexão e de torção nessas seções.

Observe que a armadura longitudinal de torção foi calculada em função de u_e , que neste caso não é o perímetro do eixo da parede fina, e sim o perímetro da área equivalente A_e , delimitada pelos eixos das barras longitudinais dos cantos da seção transversal. Portanto, A_e e u_e foram calculados em função de c_1 (distância do centro da barra do canto à face da seção), e não em função de h_e .

Pilares P1 e P3:

Face superior:

- da flexão: A_s = 1,51 cm^2
- da torção: $A_s = (b_w - 2c_1)\, A_{s\ell}$ = (19 – 7,9) 0,0463 = 0,51 cm^2
- $A_{s,total}$ = 1,51 + 0,51 = 2,02 cm^2 (3 ϕ 10 = 2,40 cm^2)

Face inferior:

- da flexão: A_s = 0,60 cm^2 ($A_{s,anc}$)

- da torção: $A_s = (b_w - 2c_1)\ A_{s\ell} = (19 - 7{,}9)\ 0{,}0463 = 0{,}51\ cm^2$
- $A_{s,total} = 0{,}60 + 0{,}51 = 1{,}11\ cm^2$ (esta armadura será atendida pela armadura longitudinal positiva do vão, que se estende até os apoios extremos - 2 ϕ 10 mm $\rightarrow$ 1,60 cm^2)

Faces laterais:

- $A_{s,total} = (h - 2c_1)\ A_{s\ell} = (40 - 7{,}9)\ 0{,}0463 = 1{,}49\ cm^2$ (3 ϕ 8 mm $\rightarrow$ 1,50 cm^2). Esta armadura contribui também para evitar possíveis fissuras causadas pela retração do concreto.

A armadura longitudinal total, considerando apenas a torção, é aquela relativa ao perímetro u_e :

$$\frac{A_{s\ell}}{u_e} = 0{,}0463 cm^2/cm \quad \rightarrow \quad \text{com } u_e = 86{,}4 \text{ cm: } A_{s\ell,tot} = 0{,}0463.86{,}4 = 4{,}00\, cm^2$$

Para uma conferência, pode-se determinar a armadura total em função da armadura calculada para as faces da viga:

$A_{s\ell,tot} = 2(0{,}51 + 1{,}49) = 4{,}00\ cm^2 \quad \rightarrow$ ok!

Pilar P2 (ambos os tramos da viga adjacentes ao pilar, devido à simetria)

Face superior:

- da flexão: $A_s = 2{,}89\ cm^2$
- da torção: $A_s = (19 - 7{,}9)\ 0{,}0463 = 0{,}51\ cm^2$
- $A_{s,total} = 2{,}89 + 0{,}51 = 3{,}40\ cm^2$ (3 ϕ 12,5 $\rightarrow$ 3,75 cm^2)

Face inferior:

- da flexão: $A_s = 0{,}37\ cm^2$ ($A_{s,anc}$)
- da torção: $A_s = (19 - 7{,}9)\ 0{,}0463 = 0{,}51\ cm^2$
- $A_{s,total} = 0{,}37 + 0{,}51 = 0{,}88\ cm^2$ (esta armadura será atendida pela armadura longitudinal positiva do vão, que se estende até o apoio intermediário - 2 ϕ 10 mm $\rightarrow$ 1,60 cm^2)

Faces laterais:

- $A_{s,total} = (h - h_e)\ A_{s\ell} = (40 - 7{,}9)\ 0{,}0463 = 1{,}49\ cm^2$ (3 ϕ 8 mm $\rightarrow$ 1,50 cm^2)

c2) Armadura transversal

A área total de estribos verticais é calculada com a soma das áreas relativas à força cortante e à torção. A armadura para a força cortante resultou igual à armadura mínima, de 0,0195 cm^2/cm, ao longo de toda a viga.

Considerando o estribo composto por dois ramos verticais, e que a área mínima relativa à força cortante para um ramo é 0,0195/2 = 0,00975 cm/cm^2, a armadura transversal total é:

$$\frac{A_{s,tot}}{s} = \frac{A_{sw,1ramo}}{s} + \frac{A_{s,90}}{s} = 0{,}00975 + 0{,}0463 = 0{,}0561\ cm^2/cm$$

onde $A_{s,90}$ representa a área de um ramo vertical do estribo.

O diâmetro do estribo deve ser superior a 5 mm e inferior a $b_w/10$ = 190/10 = 19 mm. Supondo estribo fechado de dois ramos com diâmetro de 5 mm (1 ϕ 5 mm $\rightarrow$ 0,20 cm^2) tem-se:

$$\frac{0{,}20}{s} = 0{,}0561$$

s = 3,7 cm < $s_{máx}$ = 21,6 cm (este espaçamento máximo é válido para a força cortante e para a torção).

O espaçamento resultou muito pequeno. Considerando o estribo com diâmetro de 6,3 mm fica:

$$\frac{0{,}31}{s} = 0{,}0561 \qquad \rightarrow \qquad s = 5{,}5 \text{ cm} < s_{máx} = 21{,}6 \text{ cm}$$

O espaçamento também resultou pequeno. Considerando o estribo com diâmetro de 8 mm fica:

$$\frac{0{,}50}{s} = 0{,}0561 \qquad \rightarrow \qquad s = 8{,}9 \text{ cm} \cong 9 \text{ cm} < s_{máx} = 21{,}6 \text{ cm}$$

Portanto, pode-se dispor estribos ϕ 8 mm c/9 cm em toda a extensão dos vãos livres dos dois tramos da viga, a favor da segurança. A rigor, as regiões próximas ao centro dos tramos pode ter uma armadura transversal menor, onde os esforços solicitantes V e T são menores (ver Figura 50). A Figura 53 mostra o detalhamento final das armaduras da viga V1.

15.2.10. Cobrimento do Diagrama de Momentos Fletores

A decalagem (a_ℓ) do diagrama de momentos fletores de cálculo foi determinada como 18 cm (ver item b5.1). O "cobrimento" do diagrama de momentos fletores deve ser feito apenas para a armadura negativa no pilar P2, porque as armaduras positivas dos vãos têm apenas duas barras, que devem se estender obrigatoriamente até os apoios. As armaduras longitudinais mostradas na Figura 52 consideram a flexão e a torção, ou seja, as armaduras somadas.

Os comprimentos de ancoragem básicos (sem gancho) para barras ϕ 10 e 12,5 mm, em região de má aderência, aço CA-50 e concreto C30, conforme a Tabela A-7, são respectivamente 48 e 60 cm.

A Figura 52 mostra o cobrimento do diagrama de momentos fletores de cálculo. Como a viga é simétrica o "cobrimento" foi feito sobre um tramo apenas.

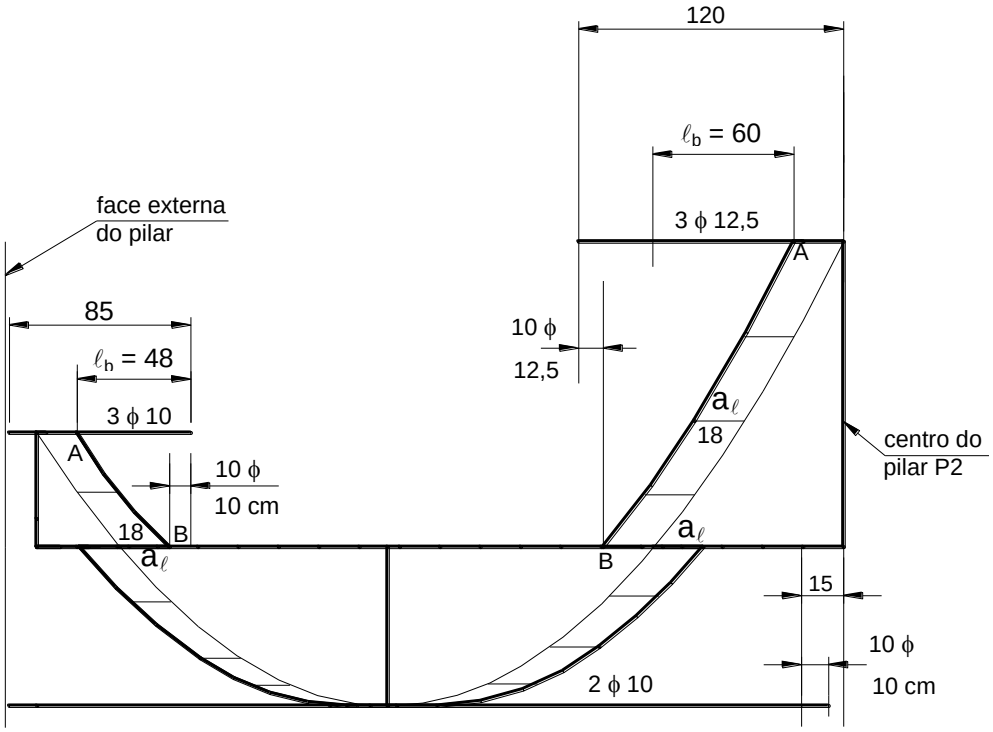


Figura 52 – Esquema do cobrimento do diagrama de momentos fletores de cálculo.

15.2.11. Detalhamento Final das Armaduras

A Figura 53 mostra o detalhamento final das armaduras da viga V1. As barras N5 foram estendidas até as faces do pilar intermediário (P2) com o propósito de melhorar a ancoragem dessas barras, dado que elas trabalham também à torção.

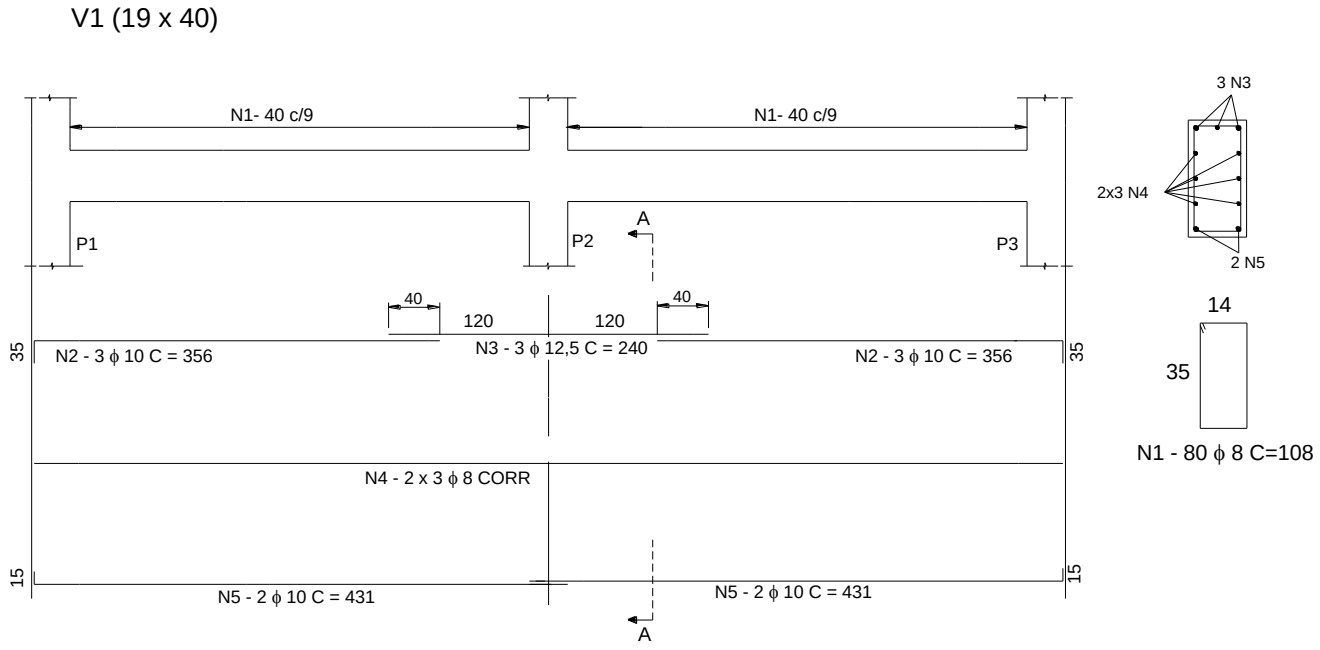


Figura 53 – Detalhamento final das armaduras da viga V1.

16. EXEMPLO NUMÉRICO 3

A Figura 54, Figura 55 e Figura 56 mostram a planta de fôrma de um pavimento, a estrutura em três dimensões e um corte esquemático da estrutura de concreto de uma edificação com dois pavimentos. Essa estrutura simples já teve as vigas VS1 e VS2 dimensionadas (BASTOS, 2024),[35] e agora a viga VS1 tem seu traçado modificado com o objetivo de introduzir esforços internos de torção, bem como também o concreto foi alterado do C30 para o C35. O propósito do exemplo é dimensionar e detalhar as armaduras das vigas VS1 e VS6, ambas submetidas à momento de torção.

São conhecidos:

- coeficientes de ponderação: $\gamma_c = \gamma_f = 1{,}4$; $\gamma_s = 1{,}15$;
- peso específico do Concreto Armado: $\gamma_{conc} = 25$ kN/m^3 ; aço CA-50;
- conforme NBR 6120: argamassa de revestimento com $\gamma_{arg,rev} = 19$ kN/m^3 e argamassa de contrapiso com $\gamma_{arg,contr} = 21$ kN/m^3;
- edificação inserida em área urbana de cidade, Classe de Agressividade Ambiental II (Tabela 6.1 da NBR 6118), o que leva a $f_{ck} \geq 25$ MPa e relação a/c $\leq 0{,}60$ (Tabela 7.1 da NBR 6118), $c_{nom} = 3{,}0$ cm para $\Delta c = 10$ mm (Tabela 7.2 da NBR 6118). Será adotado o concreto C35 ($f_{ck} = 35$ MPa), o qual é maior que o mínimo exigido (C25), e assim o cobrimento pode ser reduzido em 0,5 cm, assim $c_{nom} = c = 2{,}5$ cm.[36]

OBSERVAÇÕES:

[35] BASTOS, P.S. *Vigas de Concreto Armado - Dimensionamento, flecha e fissuração*. Bauru/SP, Universidade Estadual Paulista (UNESP), Abril/2024, 173p. Disponível em (29/04/24): http://wwwp.feb.unesp.br/pbastos/pag_concreto2.htm

[36] A NBR 6118 (item 7.4.7) prescreve que: "*Para concretos de classe de resistência superior ao mínimo exigido, os cobrimentos definidos na Tabela 7.2 podem ser reduzidos em até 5 mm*." Portanto, como o concreto escolhido (C35) é de classe superior ao mínimo exigido (C25), o cobrimento pode ser diminuído em 0,5 cm, ou seja, de 3,0 para 2,5 cm. Essa possível diminuição fica a critério do projetista. Sabe-se que a espessura e a qualidade do concreto do cobrimento são os fatores mais importantes para garantir proteção à armadura contra a corrosão.

a) há uma parede de vedação em toda a extensão das vigas VS1 e VS6, constituída por blocos cerâmicos de oito furos (dimensões de 9 x 19 x 19 cm), espessura final de 23 cm e altura de 2,40 m, com carga por metro quadrado de área de 3,20 kN/m^2, valor esse que considera os diferentes pesos específicos do bloco cerâmico e das argamassas de assentamento (1 cm) e de revestimento (1,5 cm);[37]
b) a laje é do tipo pré-fabricada treliçada, com altura total de 16 cm e peso próprio de 2,33 kN/m^2;
c) ação variável (carga acidental da NBR 6120 - q) nas lajes de 2,0 kN/m^2;
d) revestimento (piso final) em porcelanato sobre a laje, com γ_{piso} = 0,20 kN/m^2;
e) espessura do revestimento inferior da laje = 1,5 cm; espessura do contrapiso = 3,0 cm;
f) a ação do vento e os esforços solicitantes decorrentes serão desprezados por se tratar de uma edificação de baixa altura (apenas dois pavimentos), em região não sujeita a ventos de alta intensidade.

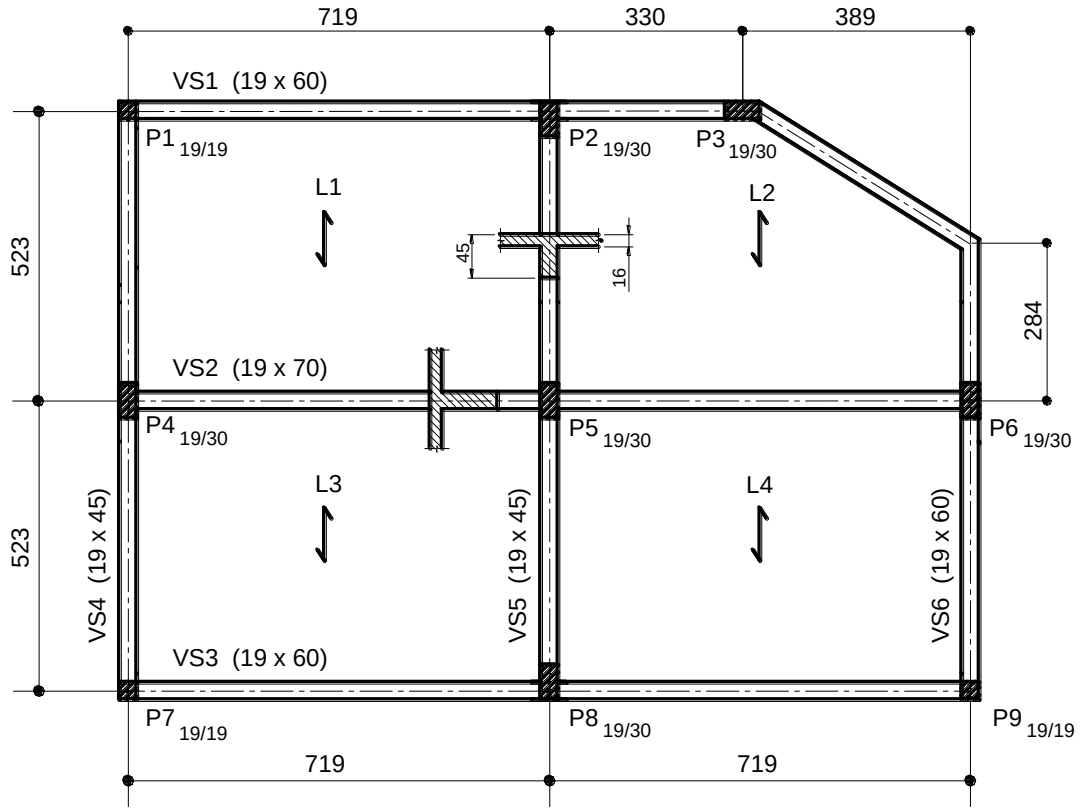


Figura 54 – Planta de fôrma do pavimento superior com as vigas VS1 e VS6.

[37] Valores encontrados em GIONGO, J.S. *Concreto armado: projeto estrutural de edifícios*. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos, Usp, Dep. de Estruturas. 1994.

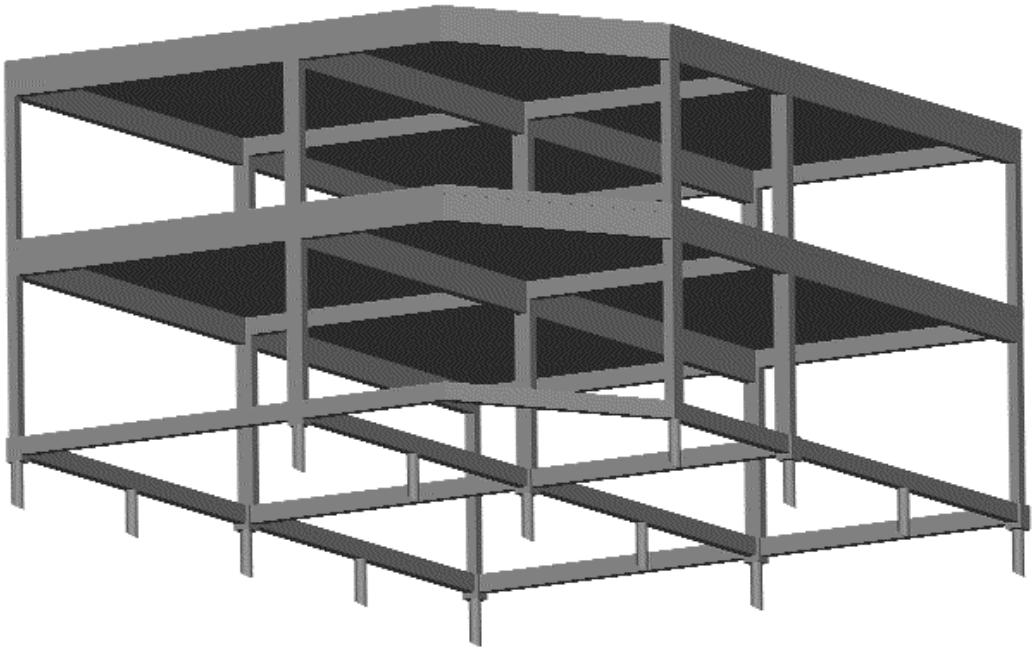


Figura 55 – Perspectiva da estrutura.

RESOLUÇÃO

Todas as vigas do pavimento superior serão representadas segundo um modelo de grelha (Figura 58), para a determinação dos esforços solicitantes e deslocamentos verticais (flechas). As vigas serão consideradas vinculadas aos pilares extremos por meio de engastes elásticos.

Devido à mudança de direção que existe nos tramos finais das vigas VS1 e VS6, entre os pilares P3 e P6, surgem esforços de torção nesses tramos.

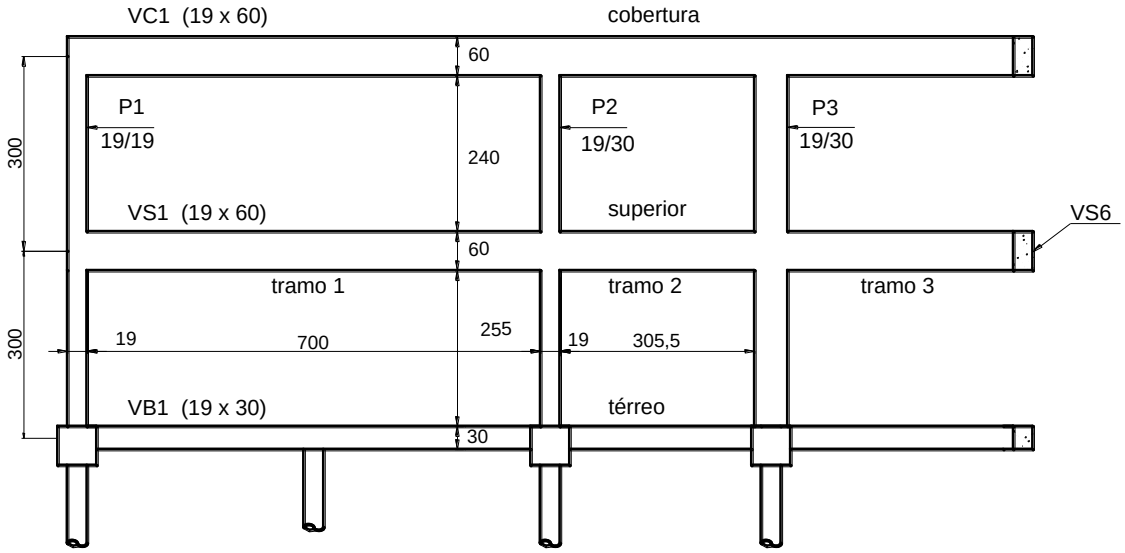


Figura 56 – Vista em elevação do pórtico que contém a viga VS1.

16.1. Vãos Efetivos

Por questão de simplicidade e porque o erro cometido será pequeno e a favor da segurança, na discretização dos nós da grelha os apoios verticais (pilares) serão considerados no centro geométrico dos

pilares. Essa simplificação leva a vãos para as vigas um pouco maiores que aqueles que resultariam caso se considerassem os vão efetivos exatos. O modelo de grelha está mostrado na Figura 58.

16.2. Estimativa da Altura das Vigas

A largura das vigas foi adotada igual à dimensão do bloco cerâmico de oito furos, assentado na posição "deitada", ou seja, na dimensão de 19 cm. Para a estimativa da altura da viga VS1 foi aplicada a seguinte equação, relativa ao tramo de maior vão:

$$h = \frac{\ell_{ef}}{12} = \frac{719}{12} = 59{,}9 \text{ cm} \qquad \therefore \text{ h = 60 cm}$$

A viga VS6, embora não tenha as nervuras das lajes pré-fabricadas apoiadas sobre ela, terá a mesma seção transversal da VS1, isto é, 19 x 60 cm, porque no trabalho conjunto das duas vigas no trecho onde ocorre a mudança de direção, o tramo final da viga VS1 trabalhará de certa forma apoiando-se sobre o tramo final da VS6, o que vai acarretar uma alta solicitação de flexão nessa viga na seção sobre o pilar P6.

Quanto à instabilidade lateral, como as vigas têm lajes apoiadas em toda a extensão dos vãos, a estabilidade está garantida.

16.3. Cargas nas Lajes e nas Vigas

Como se pode observar na Figura 54, existe o carregamento das lajes L1 e L2 sobre a viga VS1, pois as nervuras da laje nela se apoiam. Na viga VS6 as lajes L2 e L4 aplicam apenas uma pequena parcela de carga, dado que as nervuras das lajes não se apoiam sobre a viga.

16.3.1. Lajes

Para as lajes de piso do pavimento superior considerou-se a laje do tipo pré-fabricada treliçada, com altura total de 16 cm e peso próprio de 2,33 kN/m^2. A carga total por m^2 de área da laje é:

- peso próprio:	g_{pp} = 2,33 kN/m^2
- revestimento argam. inferior:	$g_{arg,rev}$ = 19 . 0,015 = 0,29 kN/m^2
- arg. regularização (contrapiso):	$g_{arg,contr}$ = 21 . 0,03 = 0,63 kN/m^2
- piso final (porcelanato):	g_{piso} = 0,20 kN/m^2
- ação variável:	q = 2,00 kN/m^2
CARGA TOTAL:	**p_{laje} = 5,45 kN/m^2**

16.3.2. Viga VS1

Considerando a carga total na viga consistindo de uma parede apoiada sobre toda extensão (composta por blocos cerâmicos de oito furos, espessura final de 23 cm e altura de 2,40 m, e peso específico 3,20 kN/m^2), da laje pré-fabricada com carga total de 5,45 kN/m^2 e comprimento de 5,325 m (distância entre o centro da viga VS2 e a face externa da viga VS1), e o peso próprio da viga (com seção transversal de 19 x 60 cm), o carregamento total atuante nos tramos entre os pilares P1 e P3 é:

- peso próprio:	g_{pp} = 25 . 0,19 . 0,60 = 2,85 kN/m
- parede de alvenaria:	g_{par} = 3,20 . 2,40 = 7,68 kN/m
- laje:	p_{laje} = 5,45 . (5,325/2) = 14,51 kN/m
CARGA TOTAL:	**p = 25,04 kN/m**

No tramo onde ocorre a mudança de direção (trecho inclinado entre o pilar P3 e a viga VS6), com comprimento de 389 cm, a carga da laje na VS1 foi diminuída proporcionalmente à diminuição do comprimento das nervuras da laje pré-fabricada (Figura 57). O vão entre o pilar P3 e a viga VS6 (389 cm) foi dividido ao meio para separar dois trechos de carga, com as nervuras da laje tendo os comprimentos médios de 474 cm e 341 cm. A carga da laje sobre a viga VS1 foi calculada segundo esses comprimentos médios. Os comprimentos médios de laje de 474 cm e 341 cm resultaram nas seguintes cargas:

$$p_{474} = 2{,}85 + 7{,}68 + 5{,}45\frac{(4{,}74 + 0{,}095)}{2} = 23{,}72 \text{ kN/m}$$

$$p_{341} = 2{,}85 + 7{,}68 + 5{,}45\frac{(3{,}41 + 0{,}095)}{2} = 20{,}09 \text{ kN/m}$$

A carga de 23,72 kN/m foi aplicada na barra 12 da grelha mostrada na Figura 58, e a carga de 20,09 kN/m foi aplicada na barra 13. No arquivo de dados de entrada da grelha, mostrado no Anexo B3, pode-se observar essas cargas nas barras no comando CBR.[38]

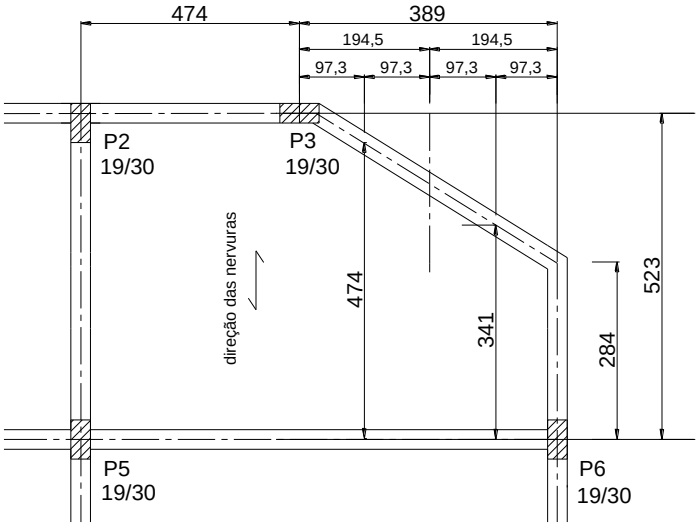


Figura 57 – Comprimentos médios considerados para as nervuras da laje no tramo inclinado da viga VS1.

16.3.3. Viga VS6

A carga da laje na viga foi calculada como sendo a correspondente à largura de uma lajota, com 30 cm. A carga atuante na viga VS6 é:[39]

- peso próprio:	g_{pp} = 25 . 0,19 . 0,60 = 2,85 kN/m
- parede de alvenaria:	g_{par} = 3,20 . 2,40 = 7,68 kN/m
- laje:	g_{laje} = 5,45 . 0,30 = 1,64 kN/m
CARGA TOTAL:	**p = 12,17 kN/m**

16.4. Modelo de Grelha para as Vigas do Pavimento

A NBR 6118 considera que as vigas contínuas, quando calculadas individualmente e separadas do restante da estrutura, tenham a vinculação obrigatoriamente considerada com os pilares de apoio, especialmente com os pilares extremos.

No caso dos pilares internos pode ser utilizado o critério seguinte. O comprimento equivalente dos pilares (ℓ_e), tomado de eixo a eixo das vigas na base e no topo, é de 300 cm (ver Figura 56). De acordo com a NBR 6118 e mostrado em BASTOS (2024),[40] para definição do tipo de vínculo da viga com pilares internos, deve-se comparar a dimensão do pilar na direção da viga (b_{int}) com $\ell_e/4$ (300/4 = 75 cm). Dos pilares internos com b_{int} = 19 cm tem-se os pilares P2/P5/P8, e com b_{int} = 30 cm os pilares P3/P4/P5/P6, e na comparação:

[38] Essas cargas também podem ser observadas no Anexo B4, que mostra os resultados do programa de grelha, na parte relativa à "GERACAO DE CARGAS EM BARRAS".

[39] A carga p = 12,17 kN/m foi aplicada nas barras 14 e 15 da grelha mostrada na Figura 58. No arquivo de dados de entrada da grelha (ver Anexo B3), pode-se observar essas cargas nas barras no comando CBRG. Também pode ser observada no Anexo B4, que mostra os resultados do programa de grelha, na parte relativa à "GERACAO DE CARGAS EM BARRAS".

[40] BASTOS, P.S. *Vigas de Concreto Armado - Dimensionamento, flecha e fissuração*. Bauru/SP, Universidade Estadual Paulista (UNESP), Abril/2024, 173p. Disponível em (29/04/24): http://wwwp.feb.unesp.br/pbastos/pag_concreto2.htm

b_{int} = 19 cm < $\ell_e/4$ = 75 cm

b_{int} = 30 cm < $\ell_e/4$ = 75 cm

Portanto, todos os pilares internos podem ser considerados como apoios simples para todas as vigas.

No caso dos pilares extremos, neste exemplo as vigas serão consideradas vinculadas aos pilares por meio de engastes elásticos, via rigidez de mola. O pilar P3 será considerado como apoio simples e não engaste elástico, devido à continuidade da viga VS1 com o tramo inclinado.

Para determinação dos esforços solicitantes segundo o modelo de grelha pode ser utilizado um programa computacional com essa finalidade. Para o exemplo foi aplicado o programa GPLAN4, de CORRÊA et al. (1992).[41] A Figura 58 mostra o modelo de grelha representativo das vigas do pavimento superior, com a numeração dos nós e barras.[42] No total são 16 nós e 19 barras. Alguns nós, posicionados no meio de algumas barras, foram introduzidos apenas para fornecerem uma indicação de flecha nas vigas.

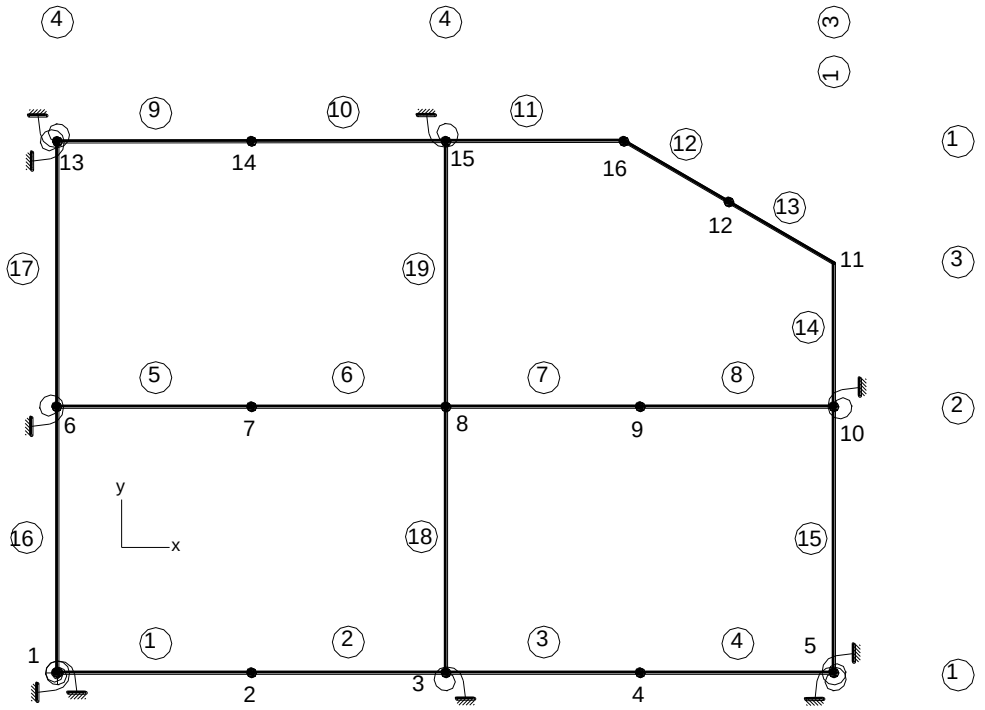


Figura 58 – Numeração dos nós, das barras, das propriedades das barras e indicação dos engastes elásticos nos pilares extremos.

16.4.1. Rigidez de Mola

A rigidez da mola dos engastes elásticos pode ser avaliada pela equação: $K_{mola} = K_{p,sup} + K_{p,inf}$. Como os comprimentos equivalentes dos lances inferior e superior e a seção transversal dos pilares extremos são idênticos, as rigidezes dos lances inferior e superior são iguais e podem ser calculadas como:[43]

$$K_{p,sup} = K_{p,inf} = \frac{4\,EI}{\ell/2}$$

A rigidez da mola vale portanto: $K_{mola} = \dfrac{8\,EI}{\ell/2}$

[41] O programa e o manual do GPLAN4 (ou GPLAN5 dependendo da versão do programa operacional) encontram-se disponíveis em (17/10/23): http://wwwp.feb.unesp.br/pbastos/pag_concreto2.htm

[42] Os números externos no desenho indicam as propriedades das barras.

[43] BASTOS, P.S. *Vigas de Concreto Armado - Dimensionamento, flecha e fissuração*. Bauru/SP, Universidade Estadual Paulista (UNESP), Abril/2024, 173p. Disponível em (29/04/24): http://wwwp.feb.unesp.br/pbastos/pag_concreto2.htm

Supondo a viga trabalhando em serviço no Estádio II (já fissurada), para o módulo de elasticidade do concreto será considerado o valor secante. O módulo tangente na origem pode ser avaliado pela seguinte expressão (NBR 6118, item 8.2.8):

$$E_{ci} = \alpha_E\ 5600\sqrt{f_{ck}} = 1{,}2\,.\,5600\sqrt{35} = 39.756 \text{ MPa} = 3.975{,}6 \text{ kN/cm}^2$$

com α_E = 1,2 para brita de basalto (ou diabásio).

O módulo de elasticidade secante (E_{cs}) é avaliado por:

$E_{cs} = \alpha_i\ E_{ci}$, com $\alpha_i = 0{,}8 + 0{,}2\dfrac{f_{ck}}{80} \leq 1{,}0$

$$\alpha_i = 0{,}8 + 0{,}2\frac{35}{80} = 0{,}8875 \leq 1{,}0 \ \rightarrow \text{ ok!}$$

E_{cs} = 0,8875 . 3975,6 = 3.528 kN/cm^2

Para o módulo de elasticidade transversal (G - NBR 6118, item 8.2.9) pode-se considerar a relação:

$$G_c = \frac{E_{cs}}{2{,}4} = \frac{3.528}{2{,}4} = 1.470 \text{ kN/cm}^2$$

O momento de inércia dos lances inferior e superior dos pilares P1, P7 e P9 (seção 19/19) é:

$$I_{p,sup} = I_{p,inf} = \frac{19\,.\,19^3}{12} = 10.860 \text{ cm}^4$$

Rigidez da mola:[44]

$$K_{mola} = \frac{8\,EI}{\ell/2} = \frac{8\,.\,3528.10860}{300/2} = 2.043.418 \text{ kN.cm}$$

O momento de inércia dos lances inferior e superior dos pilares P4 e P6 (seção 19/30), considerando a direção da viga VS2, é:

$$I_{p,sup} = I_{p,inf} = \frac{30\,.\,19^3}{12} = 17.148 \text{ cm}^4 \quad \rightarrow \quad K_{mola} = \frac{8\,EI}{\ell/2} = \frac{8\,.\,3528.17148}{300/2} = 3.226.568 \text{ kN.cm}$$

O momento de inércia dos lances inferior e superior dos pilares P2 e P8 (seção 19/30), considerando a direção da viga VS5, é:

$$I_{p,sup} = I_{p,inf} = \frac{19\,.\,30^3}{12} = 42.750 \text{ cm}^4 \quad \rightarrow \quad K_{mola} = \frac{8\,EI}{\ell/2} = \frac{8\,.\,3528.\,42750}{\frac{300}{2}} = 8.043.840 \text{ kN.cm}$$

16.4.2. Arquivo de Dados

Para o arquivo de dados de entrada da grelha seguiram-se as recomendações contidas no manual de utilização do programa computacional GPLAN4.[45] O arquivo de dados de entrada para o programa GPLAN4 está mostrado no Anexo B3.

---

[44] Se as dimensões e comprimento equivalente dos pilares forem diferentes nos lances inferior e superior, os valores devem ser calculados individualmente para cada lance.

[45] CORRÊA, M.R.S. ; RAMALHO, M.A. ; CEOTTO, L.H. *Sistema PPLAN3/GPLAN3 – Manual de utilização.* São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos – USP, Departamento de Engenharia de Estruturas, 1992, 80p. Disponível em (17/10/23): http://wwwp.feb.unesp.br/pbastos/pag_concreto2.htm

Para o módulo de elasticidade do concreto adotou-se o valor calculado de 3.528 kN/cm^2, e para o módulo de elasticidade transversal (G) o valor de 1.470 kN/cm^2.

Nas barras com mudança de direção (12, 13 e 14) é necessário considerar o momento de inércia à torção. Nas demais barras onde possa existir torção de compatibilidade, a NBR 6118 permite desconsiderar, e assim apenas um pequeno valor foi adotado para não causar problema no processamento do programa (foi considerado o valor de 100).

Os momentos de inércia à torção (J) das barras 12, 13 e 14 foram calculados com a Eq. 39 e a Tabela 2, considerando a seção transversal 19 x 60 cm:

$$n = \frac{b}{h} = \frac{19}{60} = 0{,}317$$

$$J = j\, b^3 h = 0{,}266 \cdot 19^3 \cdot 60 = 109.470 \text{cm}^4$$

16.4.3. Esforços Solicitantes

A Figura 59 e a Figura 60 mostram os diagramas de esforços solicitantes característicos (forças cortantes, momentos fletores e momentos torçores) obtidos no programa GPLAN4 para as vigas VS1 e VS6, respectivamente. A listagem completa dos resultados calculados pelo programa encontra-se no Anexo B4.

A flecha calculada (deslocamentos z) pelo programa para os nós 2 (0,3 cm), 7 (0,3 cm), 11 (0,5 cm), 12 (0,4 cm) e 14 (0,4 cm), embora não sendo exatamente as flechas máximas das vigas, servem como valores indicativos da deslocabilidade vertical. A maior flecha, de 0,5 cm no nó 11 é menor que a flecha máxima permitida pela NBR 6118, de 10 mm para a situação de "*Efeitos em elementos não estruturais*", considerando que sobre a viga existirá uma parede de alvenaria. Conclui-se que a seção transversal adotada para a viga é suficiente.

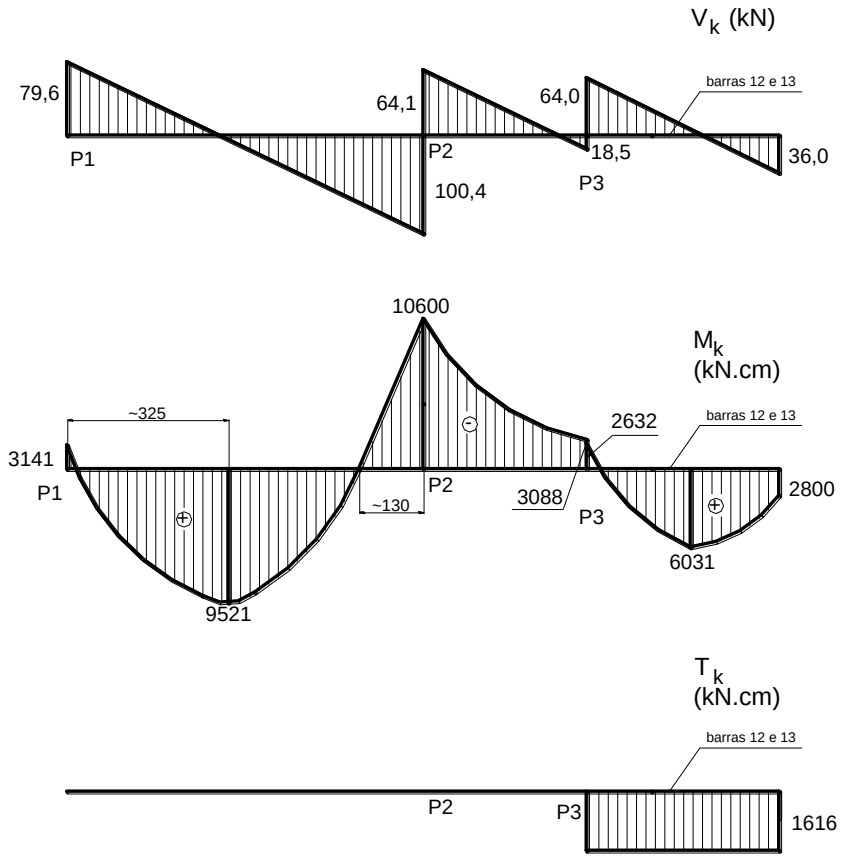


Figura 59 – Diagrama de esforços solicitantes característicos na viga VS1.

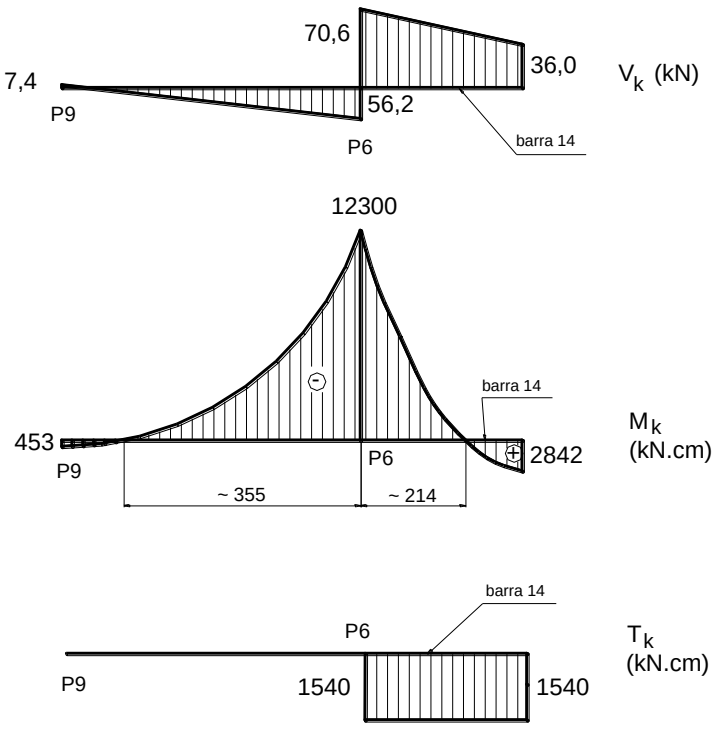


Figura 60 – Diagrama de esforços solicitantes característicos na viga VS6.

16.5. Dimensionamento da Viga VS1 (19 x 60)

Serão dimensionadas as armaduras longitudinais e transversais, para os esforços solicitantes máximos de M, V e T, mostrados na Figura 59.

16.5.1. Armadura Mínima de Flexão

Conforme a Tabela A-6, para seção retangular e concreto C35, a taxa mínima de armadura ($\rho_{mín}$) deve ser de 0,164 % A_c , portanto:

$A_{s,mín}$ = 0,00164 . 19 . 60 = 1,87 cm^2

16.5.2. Armadura de Pele

A armadura de pele não é necessária, dado que a viga não tem altura superior a 60 cm (NBR 6118). No entanto, a fim de evitar fissuras de retração que possam surgir na viga, será colocada uma armadura de pele com área de 0,05 % A_c (área da armadura de pele conforme a NB1/78), em cada face da viga:

$A_{s,pele}$ = 0,0005 . 19 . 60 = 0,57 cm^2

4 ϕ 4,2 mm (0,56 cm^2) em cada face, distribuídos ao longo da altura (ver Figura 65). Como opção tem-se 3 ϕ 5 mm (0,60 cm^2).

16.5.3. Armaduras Longitudinais Negativas

Normalmente a armadura longitudinal é calculada apenas para os momentos fletores máximos, positivos e negativos. No dimensionamento à flexão a contribuição da capa (mesa) das lajes pré-fabricadas treliçadas não será considerada para formar seções L ou T.

a) Apoio pilar interno P2

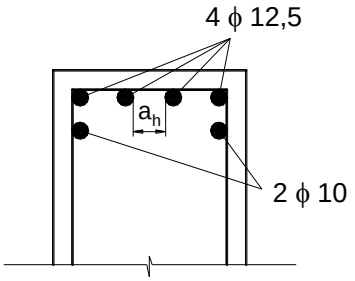
Como o momento fletor negativo é apenas um pouco maior que o momento fletor máximo positivo no tramo esquerdo, não será feita a redução de M para δM, como permitida pela NBR 6118.

Momentos fletores característico e de cálculo:

$M_k = -10.600$ kN.cm $\rightarrow$ $M_d = \gamma_f \,.\, M_k = 1{,}4\,(-10.600) = -14.840$ kN.cm

Para a altura da viga de 60 cm será adotada a altura útil de 56 cm:

$$K_c = \frac{b_w\, d^2}{M_d} = \frac{19\,.\,56^2}{14.840} = 4{,}0$$



da Tabela A-1 para concreto C35: $\beta_x = x/d = 0{,}16 \leq 0{,}45$ (ok!), $K_s = 0{,}025$ e dom. 2.

$$A_s = K_s\,\frac{M_d}{d} = 0{,}025\,\frac{14.840}{56} = 6{,}63\ \text{cm}^2 > A_{s,mín} = 1{,}87\ \text{cm}^2$$

4 ϕ 12,5 mm (5,00 cm^2) + 2 ϕ 10 mm (1,60 cm^2) $\rightarrow$ total = 6,60 cm^2

Considerando que o vibrador de agulha que será aplicado no adensamento do concreto tenha agulha com diâmetro de 25 mm, a distância livre horizontal entre as barras da primeira fiada deve superar 25 mm. Supondo estribo com diâmetro de 6,3 mm e c = 2,5 cm, para o detalhamento mostrado a distância livre resulta:

$$a_h = \frac{19 - \left[2\,(2{,}5 + 0{,}63) + 4\,.\,1{,}25\right]}{3} = 2{,}6\ \text{cm} = 26\ \text{mm}$$

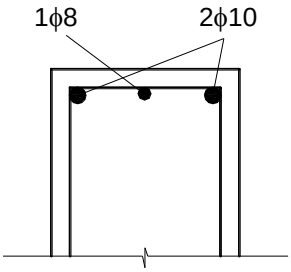
distância suficiente para a passagem da agulha do vibrador.

b) Apoio pilar interno P3

Neste pilar, devido aos esforços de torção e mudança na direção dos tramos, ocorrem dois diferentes valores para o momento fletor negativo. O cálculo será feito para o maior valor, de – 3.088 kN.cm.

Momento fletor de cálculo:

$M_d = \gamma_f \,.\, M_k = 1{,}4\,(-3.088) = -4.323$ kN.cm



$$K_c = \frac{b_w\, d^2}{M_d} = \frac{19\,.\,56^2}{4.323} = 13{,}8$$

da Tabela A-1 para concreto C35: $\beta_x = x/d = 0{,}04 \leq 0{,}45$ (ok!), $K_s = 0{,}023$ e dom. 2.

$$A_s = K_s\,\frac{M_d}{d} = 0{,}023\,\frac{4323}{56} = 1{,}78\ \text{cm}^2 < A_{s,mín} = 1{,}87\ \text{cm}^2$$

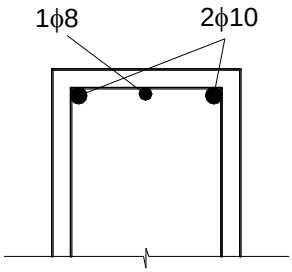
2 ϕ 10 mm + 1 ϕ 8 mm (2,10 cm^2)

c) Apoio pilar extremo P1

Momentos fletores característico e de cálculo:

$M_k = -3.141$ kN.cm $\rightarrow$ $M_d = \gamma_f \,.\, M_k = 1{,}4\,(-3.141) = -4.397$ kN.cm

$$K_c = \frac{b_w\ d^2}{M_d} = \frac{19.56^2}{4.397} = 13{,}6$$



da Tabela A-1 para concreto C35: $\beta_x = x/d = 0{,}04 \leq 0{,}45$ (ok!), $K_s = 0{,}023$ e dom. 2.

$$A_s = K_s\ \frac{M_d}{d} = 0{,}023\frac{4.397}{56} = 1{,}81\ cm^2 < A_{s,mín} = 1{,}87\ cm^2$$

2 ϕ 10 mm + 1 ϕ 8 mm (2,10 cm^2)

16.5.4. Armaduras Longitudinais Positivas

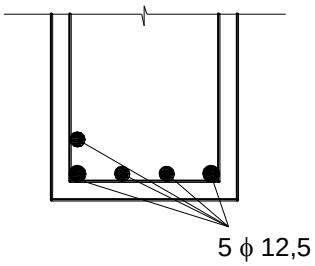
a) Entre os pilares P1 e P2

Como a laje adjacente à viga é do tipo nervurada pré-fabricada, com capa de concreto de espessura 4 cm, normalmente não se considera a contribuição dessa capa de pequena espessura para formar a mesa da seção T, de modo que a viga será calculada como seção retangular.

Momentos fletores característico e de cálculo:

$M_k = 9.521$ kN.cm $\rightarrow$ $M_d = \gamma_f\ .\ M_k = 1{,}4\ .\ 9521 = 13.329$ kN.cm

$$K_c = \frac{b_w\ d^2}{M_d} = \frac{19.56^2}{13.329} = 4{,}5$$



da Tabela A-1 para concreto C35: $\beta_x = x/d = 0{,}14 \leq 0{,}45$ (ok!), $K_s = 0{,}024$ e dom. 2.

$$A_s = K_s\ \frac{M_d}{d} = 0{,}024\frac{13.329}{56} = 5{,}71\ cm^2 > A_{s,mín} = 1{,}87\ cm^2$$

5 ϕ 12,5 (6,25 cm^2)

b) Entre os pilares P2 e P3

Os momentos fletores no tramo entre os pilares P2 e P3 resultaram negativos no modelo de grelha (ver Figura 59). Neste caso é importante verificar a ocorrência de momento fletor positivo, conforme exige a NBR 6118, fazendo o tramo isolado, como mostrado na Figura 61. O pilar P3 será considerado apoio simples devido à mudança de direção dos tramos nesse pilar.

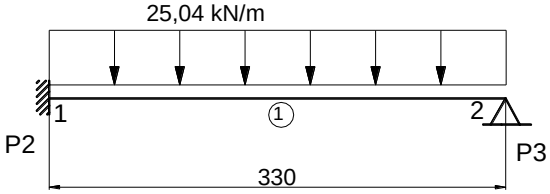


Figura 61 – Esquema estático, carregamento e numeração dos nós e barra para obtenção do momento fletor positivo considerando engaste perfeito no apoio interno P2 da viga VS1.

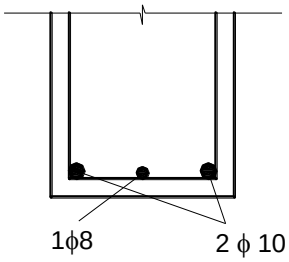
O arquivo de dados de entrada no programa PPLAN4 está apresentado no Anexo B5. O relatório com os resultados encontra-se no Anexo B6.

O momento fletor positivo máximo para o esquema mostrado na Figura 58 resulta 1.909 kN.cm. Esse momento deve ser considerado no dimensionamento da armadura longitudinal positiva do tramo.

Momentos fletores característico e de cálculo:

M_k = 1.909 kN.cm (ver Anexo B5) → $M_d = \gamma_f \cdot M_k$ = 1,4 . 1909 = 2.673 kN.cm

$$K_c = \frac{b_w\ d^2}{M_d} = \frac{19 \cdot 56^2}{2.673} = 22{,}3$$



da Tabela A-1 para concreto C35: $\beta_x = x/d = 0{,}03 \leq 0{,}45$ (ok!), $K_s = 0{,}023$ e dom. 2.

$$A_s = K_s\ \frac{M_d}{d} = 0{,}023 \frac{2.673}{56} = 1{,}10\ \text{cm}^2 < A_{s,mín} = 1{,}87\ \text{cm}^2$$

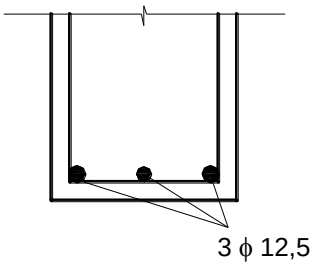
2 ϕ 10 mm (1,60 cm^2) + 1 ϕ 8 mm (0,50 cm^2) → total = 2,10 cm^2

c) À direita do pilar P3

Momentos fletores característico e de cálculo:

M_k = 6.031 kN.cm → $M_d = \gamma_f \cdot M_k$ = 1,4 . 6031 = 8.443 kN.cm

$$K_c = \frac{b_w\ d^2}{M_d} = \frac{19 \cdot 56^2}{8.443} = 7{,}1$$



da Tabela A-1 para concreto C35: $\beta_x = x/d = 0{,}09 \leq 0{,}45$ (ok!), $K_s = 0{,}024$ e dom. 2.

$$A_s = K_s\ \frac{M_d}{d} = 0{,}024 \frac{8.443}{56} = 3{,}62\ \text{cm}^2 > A_{s,mín} = 1{,}87\ \text{cm}^2$$

3 ϕ 12,5 (3,75 cm^2)

16.5.5. Armadura Transversal à Força Cortante para o Tramo à Esquerda do Pilar Interno P2

O dimensionamento à força cortante será feito com as equações simplificadas apresentadas em BASTOS (2023).[46] Será considerado o Modelo de Cálculo I (θ = 45° - ângulo de inclinação das diagonais de compressão). O cálculo está apresentado apenas para a força cortante máxima na viga VS1.

Forças cortantes característica e de cálculo:

V_k = 100,4 kN.cm → $V_{Sd} = \gamma_f \cdot V_k$ = 1,4 . 100,4 = 140,6 kN

a) Verificação das diagonais de compressão

Na Tabela A-4 para o concreto C35 determina-se a força cortante máxima:

$V_{Rd2} = 0{,}58\ b_w\ d$ = 0,58 . 19 . 56 = 617,1 kN

$V_{Sd} = 140{,}6 \leq V_{Rd2} = 617{,}1$ kN → ok!, não ocorrerá o esmagamento do concreto nas diagonais de compressão.

[46] BASTOS, P.S. *Dimensionamento de vigas de concreto armado à força cortante*. Bauru/SP, Universidade Estadual Paulista (UNESP), nov/2023, 77p. Disponível em (26/03/24): http://wwwp.feb.unesp.br/pbastos/pag_concreto2.htm

b) Cálculo da armadura transversal

Na Tabela A-4 para o concreto C35 a equação para determinar a força cortante correspondente à armadura mínima é:

$V_{Sd,mín} = 0{,}147\ b_w\ d = 0{,}147\ .\ 19\ .\ 56 = 156{,}4$ kN

$V_{Sd} = 140{,}6 < V_{Sd,mín} = 156{,}4$ kN $\rightarrow$ portanto, deve-se dispor a armadura mínima transversal.

Como todas as demais forças cortantes atuantes são menores que V_k de 100,4 kN, conclui-se que todos os tramos devem ter a armadura transversal mínima.

A armadura mínima é calculada pela equação:

$$A_{sw,mín} = \frac{20\, f_{ct,m}}{f_{ywk}}\, b_w \quad (\text{cm}^2/\text{m}),\ \text{com}\ f_{ct,m} = 0{,}3\sqrt[3]{f_{ck}^{\ 2}} = 0{,}3\sqrt[3]{35^2} = 3{,}21\text{MPa}$$

$$A_{sw,mín} = \frac{20\,.\,0{,}321}{50}\,19 = 2{,}44\ \text{cm}^2/\text{m}$$

c) Detalhamento da armadura transversal

- Diâmetro do estribo: $5\ \text{mm} \le \phi_t \le b_w/10 \rightarrow \phi_t \le 190/10 \le 19$ mm
- Espaçamento máximo:

$0{,}67\ V_{Rd2} = 0{,}67\ .\ 617{,}1 = 413{,}5$ kN

$V_{Sd} = 140{,}6 < 413{,}5$ kN $\rightarrow$ $s \le 0{,}6\ d \le 30$ cm

$0{,}6\ d = 0{,}6\ .\ 56 = 33{,}6$ cm $\rightarrow$ portanto, $s_{máx} = 30$ cm

- Espaçamento transversal entre os ramos verticais do estribo:

$0{,}20\ V_{Rd2} = 0{,}20\ .\ 617{,}1 = 123{,}4$ kN

$V_{Sd} = 140{,}6 > 123{,}4$ kN $\rightarrow$ $s_t \le 0{,}6\ d \le 35$ cm

$0{,}6\ d = 0{,}6\ .\ 56 = 33{,}6$ cm $\rightarrow$ portanto, $s_{t,máx} = 33{,}6$ cm

d) Detalhamento da armadura transversal

No tramo da viga VS1 do lado esquerdo do pilar P2 tem-se $A_{sw} = A_{sw,mín} = 2{,}44\ \text{cm}^2/\text{m} = 0{,}0244\ \text{cm}^2/\text{cm}$. Considerando estribo vertical composto por dois ramos e diâmetro de 5 mm (1ϕ 5 mm $\rightarrow$ 0,20 cm^2), tem-se:

$$\frac{A_{sw}}{s} = 0{,}0244\text{cm}^2/\text{cm} \quad \rightarrow \quad \frac{0{,}40}{s} = 0{,}0244 \quad \rightarrow \quad s = 16{,}4\ \text{cm} \le s_{máx} = 30\ \text{cm} \quad (\text{ok!})$$

portanto, estribo ϕ 5 mm c/16 cm para os tramos (ver a Figura 65).

16.5.6. Ancoragem das Armaduras Longitudinais

a) Armadura positiva no pilar extremo P1

As forças cortantes característica e de cálculo na viga na posição do pilar P1 é:

$V_k = 79{,}6$ kN $\rightarrow$ $V_{Sd} = 1{,}4\ .\ 79{,}6 = 111{,}4$ kN

Valor da decalagem do diagrama de momentos fletores (a_ℓ) segundo o Modelo de Cálculo I, para estribos verticais:

$$a_\ell = 0{,}5d\,\frac{V_{Sd,máx}}{(V_{Sd,máx} - V_c)} \le d \qquad \text{, com } a_\ell \ge 0{,}5d$$

Na Flexão Simples, $V_c = V_{c0} = 0{,}6 f_{ctd}\, b_w\, d = 0{,}6 \,.\, 0{,}160 \,.\, 19 \,.\, 56 = 102{,}1$ kN

$$f_{ctd} = \frac{f_{ctk,inf}}{\gamma_c} = \frac{0{,}7\, f_{ct,m}}{\gamma_c} = \frac{0{,}7 \,.\, 0{,}3}{\gamma_c}\sqrt[3]{f_{ck}^{\,2}} = \frac{0{,}7 \,.\, 0{,}3}{1{,}4}\sqrt[3]{35^2} = 1{,}60 \text{ MPa} = 0{,}160 \text{ kN/cm}^2$$

$$a_\ell = 0{,}5 \,.\, 56\,\frac{111{,}4}{(111{,}4 - 102{,}1)} = 335{,}4 \text{ cm} \le d = 56 \text{ cm} \qquad \rightarrow \text{ portanto } a_\ell = 56 \text{ cm}$$

A armadura a ancorar no apoio é:

$$A_{s,anc} = \frac{a_\ell}{d}\,\frac{V_{Sd}}{f_{yd}} = \frac{56}{56}\,\frac{111{,}4}{50/1{,}15} = 2{,}56 \text{ cm}^2$$

A armadura a ancorar no apoio deve atender à armadura mínima:

$$A_{s,anc} \ge \begin{cases} \dfrac{1}{3} A_{s,vão} & \text{se } M_{apoio} = 0 \text{ ou negativo de valor } |M_{apoio}| \le 0{,}5 M_{vão} \\ \dfrac{1}{4} A_{s,vão} & \text{se } M_{apoio} = \text{negativo e de valor } |M_{apoio}| > 0{,}5 M_{vão} \end{cases}$$

Sendo $M_{d,apoio} = 1{,}4 \,.\, 3141 = 4.397$ kN.cm e $M_{d,vão} = 1{,}4 \,.\, 9.521 = 13.329$ kN.cm fica:

$$|M_{d,apoio}| = |-4.397| \text{ kN.cm} < M_{d,vão}/2 = 13.329/2 = 6.665 \text{ kN.cm}$$

Portanto, $A_{s,anc} \ge 1/3\ A_{s,vão} = 5{,}71/3 = 1{,}90$ cm^2

$A_{s,anc} = 2{,}56$ cm$^2 \ge 1/3\ A_{s,vão} = 1{,}90$ cm^2 $\rightarrow$ ok!

Se resultar $A_{s,anc}$ menor que o valor mínimo, deve-se seguir nos cálculos com $A_{s,anc}$ igual ao valor mínimo (1/3 ou 1/4 do $A_{s,vão}$).

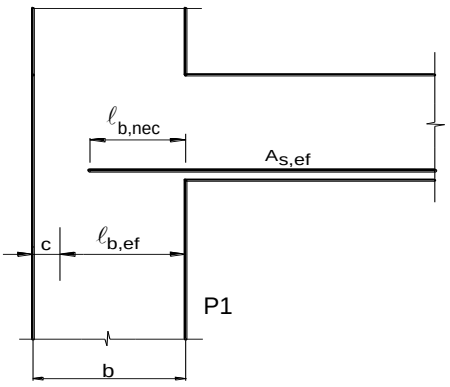
A armadura positiva do vão adjacente ao pilar é composta por 5 ϕ 12,5 mm, onde 2 ϕ 12,5 posicionados nos vértices dos estribos devem ser obrigatoriamente estendidos até os apoios (pilares). Portanto, pode-se considerar que as barras 2 ϕ 12,5 ($A_{s,ef} = 2{,}50$ cm^2) atendem a área necessária a ancorar, de 2,56 cm^2. A armadura a ancorar deve penetrar no pilar no comprimento de ancoragem necessário ($\ell_{b,nec}$).

Conforme a Tabela A-7, o comprimento de ancoragem básico (sem gancho), para barra de diâmetro 12,5 mm, concreto C35, aço CA-50 e em região de boa aderência, é 38 cm.

O comprimento de ancoragem necessário é:

$$\ell_{b,nec} = \ell_b\,\frac{A_{s,anc}}{A_{s,ef}} = 38\,\frac{2{,}56}{2{,}50} = 38{,}9 \text{ cm}$$

$$\ell_{b,nec} \ge \begin{cases} \ell_{b,mín} \\ r + 5{,}5\phi \\ 6 \text{ cm} \end{cases} \qquad \text{, com } \ell_{b,mín}\text{:}$$



$$\ell_{b,mín} \geq \begin{cases} 0{,}3\ell_b = 0{,}3 \,.\, 38 = 11{,}4 \text{ cm} \\ 10\phi = 10 \,.\, 1{,}25 = 12{,}5 \text{ cm} \\ 10 \text{ cm} \end{cases} \qquad \therefore\ \ell_{b,mín} = 12{,}5 \text{ cm}$$

Com D = diâmetro do pino de dobramento = 5ϕ (ver Tabela A-10) o raio do pino de dobramento é:

r = (D/2) = 5 ϕ/2 = 5 . 1,25/2 = 3,1 cm

r + 5,5 ϕ = 3,1 + 5,5 . 1,25 = 10,0 cm

$$\text{Portanto: } \ell_{b,nec} \geq \begin{cases} \ell_{b,mín} = 12{,}5 \text{ cm} \\ r + 5{,}5\phi = 10{,}0 \text{ cm} \\ 6 \text{ cm} \end{cases} \qquad \rightarrow\ \ell_{b,nec} = 38{,}9 \text{ cm} \geq 12{,}5 \text{ cm} \quad \rightarrow \text{ ok!}$$

O comprimento de ancoragem efetivo do apoio é:

$\ell_{b,ef}$ = b – c = 19 – 2,5 = 16,5 cm

Numa primeira análise verifica-se que o comprimento de ancoragem necessário é superior ao comprimento de ancoragem efetivo ($\ell_{b,nec}$ = 38,9 cm > $\ell_{b,ef}$ = 16,5 cm). Isto significa que não é possível fazer a ancoragem reta. A próxima tentativa de ancoragem é fazer o gancho na extremidade das barras. O comprimento de ancoragem com gancho, é:

$$\ell_{b,gancho} = 0{,}7 \,.\, 38{,}9 = 27{,}2 \text{ cm}$$

Verifica-se que mesmo com o gancho ainda não é possível fazer a ancoragem, pois o comprimento de ancoragem resultou maior que o comprimento de ancoragem efetivo: ($\ell_{b,gancho}$ = 27,2 cm > $\ell_{b,ef}$ = 16,5 cm). A próxima alternativa é aumentar a armadura longitudinal a ancorar no apoio, para $A_{s,corr}$, e supondo que não será colocado grampo adicional, fica:

$$A_{s,corr} = \frac{0{,}7\,\ell_b}{\ell_{b,ef}} A_{s,anc} = \frac{0{,}7 \cdot 38}{16{,}5} 2{,}56 = 4{,}13 \text{cm}^2$$

Para atender a armadura corrigida pode-se estender até o pilar as quatro barras da primeira fiada, ou seja, $A_{s,ef}$ = 5,00 cm^2 (4 ϕ 12,5), que atende com folga à armadura corrigida (Figura 62). O diâmetro D do pino de dobramento para a confecção do gancho é 5ϕ.[47] Ver na Figura 65 o detalhamento final das armaduras da viga.

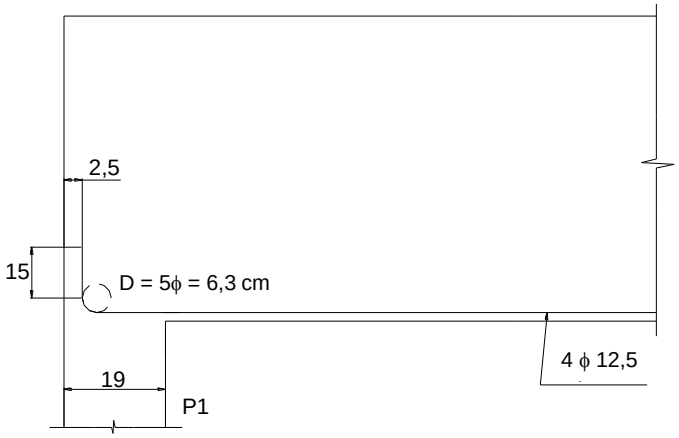


Figura 62 – Detalhe da ancoragem nos pilares extremos.

[47] Para execução de projetos em obra, os desenhos de armaduras devem mostrar as curvaturas de dobras de barras.

b) Armadura positiva nos pilares internos

Estendendo 2 ϕ 12,5 (dos vértices dos estribos) da armadura longitudinal positiva do vão até o pilar intermediário P2 ($A_{s,anc}$ = 2,50 cm^2), esta armadura deve ser superior à armadura mínima a ancorar:

Sendo $M_{d,apoio}$ = 1,4 . 10600 = 14.840 kN.cm e $M_{d,vão}$ = 1,4 . 9.521 = 13.329 kN.cm fica:

$$\left|M_{d,apoio}\right| = \left|-14.840\right| \text{ kN.cm} > M_{d,vão}/2 = 13.329/2 = 6.665 \text{ kN.cm}$$

Portanto, $A_{s,anc} \geq 1/4\ A_{s,vão}$ = 5,71/4 = 1,43 cm^2

$A_{s,anc}$ = 2,50 cm^2 > 1/4 $A_{s,vão}$ = 1,43 cm^2 $\rightarrow$ ok!

As duas barras de 12,5 mm devem se estender 10ϕ além da face do pilar.

No caso do tramo à esquerda do pilar P3, como o vão é pequeno, não há necessidade de interromper parte da armadura antes dos apoios, ou seja, pode-se estender até os apoios todas as barras da armadura longitudinal positiva (2 ϕ 10 + 1 ϕ 8 $\rightarrow$ 2,10 cm^2). Esta área deve ser superior à armadura mínima a ancorar, de 1/4 $A_{s,vão}$ = 1,10/4 = 0,28 cm^2.

Portanto, $A_{s,anc}$ = 2,10 cm^2 > 1/4 $A_{s,vão}$ = 0,28 cm^2 $\rightarrow$ ok!

No tramo à direita do pilar P3 tem-se:

Sendo $M_{d,apoio}$ = 1,4 . 2632 = 3.685 kN.cm e $M_{d,vão}$ = 1,4 . 6031 = 8.443 kN.cm fica:

$$\left|M_{d,apoio}\right| = \left|-3.685\right| \text{ kN.cm} < M_{d,vão}/2 = 8.443/2 = 4.222 \text{ kN.cm}$$

Portanto, $A_{s,anc} \geq 1/3\ A_{s,vão}$ = 3,62/3 = 1,21 cm^2

ancorando as duas barras dos vértices dos estribos: 2 ϕ 12,5 mm (2,50 cm^2), é atendida a área mínima de 1,21 cm^2.

Para a força cortante V_k = 100,4 kN no tramo à esquerda do pilar P2, o valor da decalagem do diagrama de momentos fletores (a_ℓ), segundo o Modelo de Cálculo I, é:

V_{Sd} = 1,4 . 100,4 = 140,6 kN

$$a_\ell = 0{,}5d\,\frac{V_{Sd,máx}}{(V_{Sd,máx} - V_c)} \leq d \qquad \text{, com } a_\ell \geq 0{,}5d$$

Na Flexão Simples, $V_c = V_{c0} = 0{,}6 f_{ctd}\, b_w\, d$ = 0,6 . 0,160 . 19 . 56 = 102,1 kN

$$f_{ctd} = \frac{f_{ctk,inf}}{\gamma_c} = \frac{0{,}7\, f_{ct,m}}{\gamma_c} = \frac{0{,}7\,.\,0{,}3}{\gamma_c}\sqrt[3]{f_{ck}^{\,2}} = \frac{0{,}7\,.\,0{,}3}{1{,}4}\sqrt[3]{35^2} = 1{,}60 \text{ MPa} = 0{,}160 \text{ kN/cm}^2$$

$$a_\ell = 0{,}5\,.\,56\,\frac{140{,}6}{(140{,}6 - 102{,}1)} = 102{,}2 \text{ cm} \leq d = 56 \text{ cm} \qquad \rightarrow \text{ portanto, } a_\ell = 56 \text{ cm}$$

este valor máximo será adotado para os demais tramos.

c) Armadura negativa no pilar extremo P1

A armadura negativa proveniente do engastamento elástico nos pilares extremos deve penetrar até próximo à face externa do pilar, respeitando-se a espessura do cobrimento, e possuir um gancho direcionado

para baixo, com comprimento de pelo menos 35ϕ. O diâmetro de dobramento deve ser de 15ϕ (para CA-50), como indicado na Figura 63.

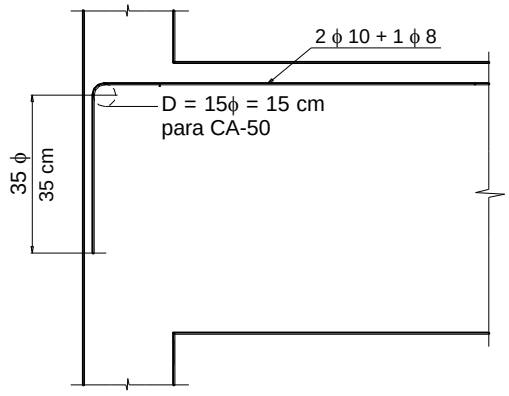


Figura 63 – Ancoragem da armadura negativa no pilar extremo P1.

16.5.7. Dimensionamento à Torção

O tramo à direita do pilar P3 está submetido ao momento de torção característico (T_k) de 1.616 kN.cm (ver Figura 59). O momento de torção de cálculo é:

$T_{Sd} = \gamma_f \cdot T_k = 1{,}4 \cdot 1616 = 2.262$ kN.cm

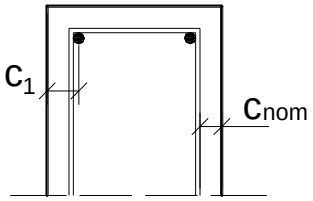
a) Verificação das diagonais comprimidas

Área da seção transversal: $A = b_w \cdot h = 19 \cdot 60 = 1.140$ cm^2

Perímetro da seção transversal: $u = 2\,(b_w + h) = 2\,(19 + 60) = 158$ cm

As Eq. 19 e 20 fornecem os limites para a espessura h_e da parede fina:

$$h_e \le \frac{A}{u} = \frac{1140}{158} = 7{,}2\,\text{cm} \qquad \text{e} \qquad h_e \ge 2c_1$$



Sendo c = 2,5 cm e supondo ϕ_ℓ = 12,5 mm e ϕ_t = 8 mm encontra-se:

$c_1 = \phi_\ell/2 + \phi_t + c_{nom} = 1{,}25/2 + 0{,}8 + 2{,}5 = 3{,}925$ cm

$h_e \ge 2c_1 = 2 \cdot 3{,}925 = 7{,}85$ cm

Portanto, os limites para h_e são: $7{,}85 \text{ cm} \le h_e \le 7{,}2$ cm, ou seja: $h_e \le 7{,}2$ cm e $h_e \ge 7{,}85$ cm. Não é possível adotar um valor para h_e que atenda aos limites.

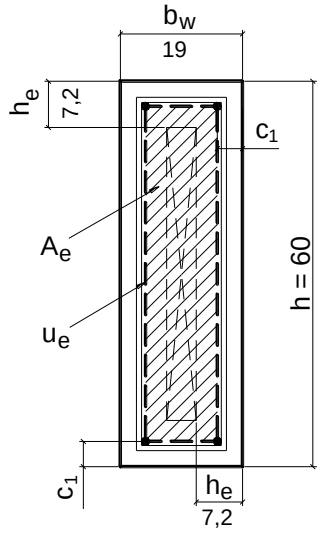
Neste caso, entre outras soluções, pode-se aumentar as dimensões da seção transversal da viga.[48] Porém, quando ocorre $A/u < 2c_1$ e não se deseja fazer alterações na seção transversal da viga, a NBR 6118 permite adotar:

[48] No caso de se aumentar a seção transversal da viga, a solução que melhor resolve o problema é aumentar a largura b_w (ver o Exemplo 2).

$h_e = A/u \leq b_w - 2c_1$

$h_e = A/u = 7{,}2 \text{ cm} \leq b_w - 2c_1 = 19 - 7{,}85 = 11{,}15 \text{ cm} \rightarrow$ ok!

$\therefore \; h_e = 7{,}2 \text{ cm}$



A área A_e deve ser definida pelos eixos das barras dos cantos (respeitando-se o cobrimento exigido nos estribos):

$A_e = (b_w - 2c_1) \,.\, (h - 2c_1) = (19 - 7{,}85) \,.\, (60 - 7{,}85) = 581{,}5 \text{ cm}^2$

O perímetro da área equivalente neste caso é:

$u_e = 2\,[(b_w - 2c_1) + (h - 2c_1)] = 2\,[(19 - 7{,}85) + (60 - 7{,}85)]$

$u_e = 126{,}6 \text{ cm}$

O momento torçor máximo, determinado pela Eq. 23, com ângulo θ (45°) igual ao aplicado no cálculo da viga à força cortante (Modelo de Cálculo I), é:

$T_{Rd,2} = 0{,}5\, \alpha_{v2}\, f_{cd}\, A_e\, h_e \text{ sen } 2\,\theta = 0{,}5\,(1 - 35/250) \,.\, (3{,}5/1{,}4)\; 581{,}5 \,.\, 7{,}2 \,.\, \text{sen } 2 \,.\, 45° = 4.500{,}8 \text{ kN.cm}$

Para não ocorrer esmagamento do concreto nas bielas comprimidas, conforme a Eq. 34 deve-se ter:

$$\frac{V_{Sd}}{V_{Rd2}} + \frac{T_{Sd}}{T_{Rd2}} \leq 1$$

Sendo V_{Rd2} = 617,1 kN e $V_{Sd,máx}$ = 89,6 kN (de V_k = 64,0 kN – do tramo direito no pilar P3), aplicando os valores numéricos na Eq. 34 fica:

$$\frac{89{,}6}{617{,}1} + \frac{2.262}{4.500{,}8} = 0{,}65 \leq 1{,}0 \quad \rightarrow \text{ ok!}$$

Como a equação foi satisfeita não ocorrerá o esmagamento do concreto nas diagonais de compressão.

b) Cálculo das armaduras

As armaduras mínimas para torção, longitudinal e transversal, são (Eq. 32):

$$A_{s\ell,mín} = \frac{20\, f_{ct,m}}{f_{ywk}}\, h_e = \frac{20 \,.\, 0{,}321}{50}\, 7{,}2 = 0{,}92 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$A_{s,90mín} = \frac{20\, f_{ct,m}}{f_{ywk}}\, b_w = \frac{20 \,.\, 0{,}321}{50}\, 19 = 2{,}44 \text{ cm}^2/\text{m}$$

com $f_{ct,m} = 0{,}3\sqrt[3]{f_{ck}^{\,2}} = 0{,}3\sqrt[3]{35^2} = 3{,}21 \text{MPa}$ (resistência média do concreto à tração direta).

Armadura longitudinal conforme a Eq. 27:

$$\frac{A_{s\ell}}{u_e} = \frac{T_{Sd}}{2\, A_e\, f_{ywd}\, \text{tg}\,\theta} = \frac{2.262}{2 \cdot 581{,}5 \dfrac{50}{1{,}15}\; \text{tg}\, 45°} = 0{,}0447 \text{ cm}^2/\text{cm}$$

com u_e = 100 cm, $A_{s\ell}$ = 4,47 cm²/m ≥ $A_{s\ell,mín}$ = 0,92 cm²/m → ok!

Armadura transversal (estribos) conforme a Eq. 24:

$$\frac{A_{s,90}}{s} = \frac{T_{Sd}}{2\,A_e\,f_{ywd}}\,tg\,\theta = \frac{2.262}{2\cdot 581{,}5\,\frac{50}{1{,}15}}\,tg\,45° = 0{,}0447 cm^2/cm$$

com s = 100 cm, $A_{s,90}$ = 4,47 cm²/m ≥ $A_{s,90mín}$ = 2,44 cm²/m → ok!

c) Detalhamento das armaduras

O diagrama de T_k na Figura 59 mostra que as armaduras para torção devem ser mantidas obrigatoriamente constantes ao longo do tramo, como mostradas no detalhamento final na Figura 65.

c1) Armadura longitudinal

A armadura longitudinal de torção pode ser combinada com a armadura longitudinal de flexão, considerando as seções onde ocorreram os momentos fletores máximos, no pilar P3 e no vão. A análise deve ser feita para cada uma das quatro faces da viga, mantendo-se a proporcionalidade de armadura.

Seção adjacente ao pilar P3:

Face superior:

- da flexão: A_s = 1,51 cm² (armadura de flexão calculada para M_k = – 2.632 kN.cm)
- da torção: $A_s = (b_w - 2c_1)\,A_{s\ell}$ = (19 – 7,85) 0,0447 = 0,50 cm²
- $A_{s,total}$ = 1,51 + 0,50 = 2,01 cm² (2 ϕ 12,5 → 2,50 cm²)

Na região sob momento fletor negativo a resistência será proporcionada por 2 ϕ 12,5, e no restante do tramo (sob momento fletor positivo) serão colocados 2 ϕ 8 mm, que atendem com folga a armadura necessária para torção (0,50 cm²), e as barras trabalham também como porta-estribos.

Face inferior:

- da flexão: A_s = 1,21 cm² (armadura mínima a ancorar no pilar P3)
- da torção: $A_s = (b_w - 2c_1)\,A_{s\ell}$ = (19 – 7,85) 0,0447 = 0,50 cm²
- $A_{s,total}$ = 1,21 + 0,50 = 1,71 cm²

Esta armadura será atendida pela armadura longitudinal positiva à direita do pilar P3, que será estendida do vão e ancorada no pilar: 3 ϕ 12,5 mm (3,75 cm²).

Faces laterais:

- $A_{s,total} = (h - 2c_1)\,A_{s\ell}$ = (60 – 7,85) 0,0447 = 2,33 cm² (3 ϕ 10 mm → 2,40 cm²). Esta armadura, em cada face, deve estender-se do pilar P3 até a intersecção com a viga VS6; essa armadura contribui também para evitar possíveis fissuras por retração do concreto.

Região do máximo momento fletor positivo:

Face superior:

- da flexão: A_s = 0,00 cm²
- da torção: A_s = (19 – 7,85) 0,0447 = 0,50 cm²

- $A_{s,total}$ = 0,50 cm^2 (2 ϕ 8 $\rightarrow$ 1,00 cm^2)

Face inferior:

- da flexão: A_s = 3,62 cm^2
- da torção: A_s = (19 – 7,85) 0,0447 = 0,50 cm^2
- $A_{s,total}$ = 3,62 + 0,50 = 4,12 cm^2 (3 ϕ 12,5 + 1 ϕ 8 $\rightarrow$ 4,25 cm^2)

Faces laterais:

- $A_{s,total}$ = (h – 2c$_1$) $A_{s\ell}$ = (60 – 7,85) 0,0447 = 2,33 cm^2 (3 ϕ 10 mm $\rightarrow$ 2,40 cm^2)

Para uma conferência pode-se calcular a armadura longitudinal total, considerando apenas a torção, relativa ao perímetro u_e :

$$\frac{A_{s\ell}}{u_e} = 0{,}0447 \text{cm}^2/\text{cm} \quad \rightarrow \quad \text{com } u_e = 126{,}6 \text{ cm: } A_{s\ell,tot} = 0{,}0447.126{,}6 = 5{,}66 \text{cm}^2$$

A armadura total, em função das áreas calculadas para as faces da viga, é:

$A_{s\ell,tot}$ = 2(0,50 + 2,33) = 5,66 cm^2 $\rightarrow$ ok!

c2) Armadura transversal

A área total de estribos verticais é calculada pela soma das áreas relativas à força cortante e à torção. A armadura para a força cortante máxima entre o pilar P3 e a interseção com a viga VS6 resultou na armadura mínima, de 0,0244 cm^2/cm.

Considerando o estribo composto por dois ramos verticais, e que a área relativa à força cortante para um ramo é 0,0244/2 = 0,0122 cm/m^2, a armadura transversal total é:

$$\frac{A_{s,total}}{s} = \frac{A_{sw,1ramo}}{s} + \frac{A_{s,90}}{s} = 0{,}0122 + 0{,}0447 = 0{,}0569 \text{cm}^2/\text{cm} = 5{,}69 \text{ cm}^2/\text{m}$$

onde $A_{s,90}$ representa a área de um ramo vertical do estribo.

O diâmetro mínimo para o estribo à torção é de 5 mm. Supondo estribo fechado de dois ramos verticais com diâmetro de 6,3 mm (1 ϕ 6,3 $\rightarrow$ 0,31 cm^2) tem-se:

$$\frac{0{,}31}{s} = 0{,}0569 \quad \rightarrow \quad s = 5{,}4 \text{ cm}$$

que é um espaçamento muito pequeno. Alterando o diâmetro para 8 mm (1 ϕ 8 $\rightarrow$ 0,50 cm^2) tem-se:

$$\frac{0{,}50}{s} = 0{,}0569 \quad \rightarrow \quad s = 8{,}8 \text{ cm} \leq s_{máx} = 30 \text{ cm} \quad \rightarrow \text{ ok!}$$

Portanto, pode-se escolher estribo ϕ 8 mm c/9 cm. Na Figura 65 encontra-se mostrado o detalhamento final das armaduras da viga VS1.

16.5.8. Cobrimento do Diagrama de Momentos Fletores

Conforme os cálculos da decalagem a_ℓ executados, pode-se considerar o valor de 56 cm (d) para todos os tramos, a ser aplicado no deslocamento do diagrama de momentos fletores de cálculo.

Os comprimentos de ancoragem básicos, para concreto C35 e conforme a Tabela A-7 (colunas sem gancho), são: para ϕ 10 mm (43 cm para má aderência e 30 cm para boa aderência), e para ϕ 12,5 mm (54 cm para má aderência e 38 cm para boa aderência).

A Figura 64 mostra o "cobrimento" do diagrama de momentos fletores de cálculo, feito para determinação do comprimento das barras das armaduras longitudinais, positivas e negativas.

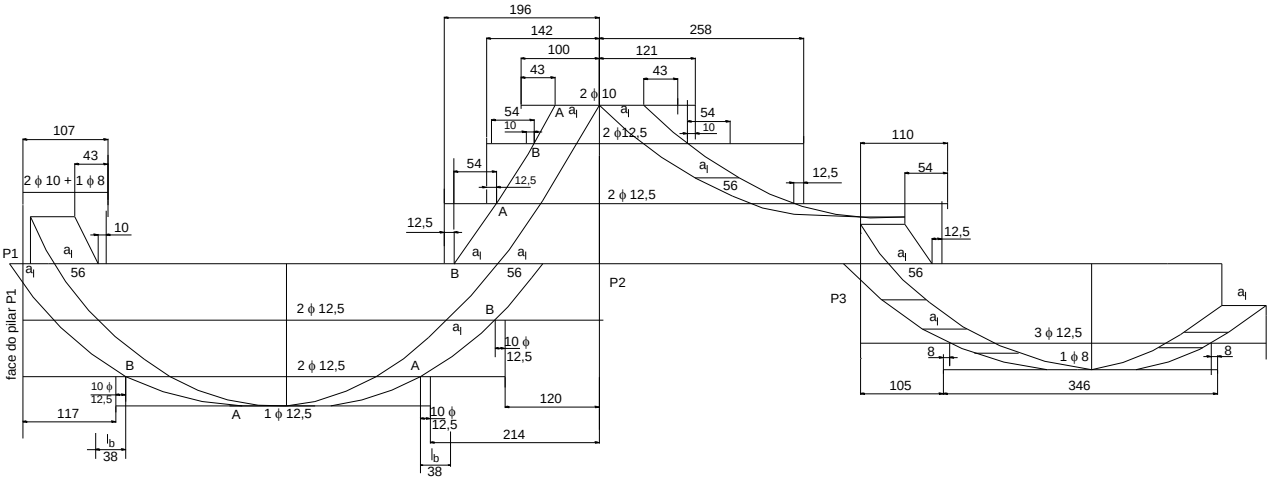


Figura 64 – Cobrimento do diagrama de momentos fletores de cálculo da viga VS1.

16.5.9. Detalhamento Final das Armaduras

A Figura 65 apresenta o detalhamento final das armaduras da viga. Este desenho é feito comumente na escala 1:50. O desenho do corte da seção transversal e do estribo é feito normalmente na escala de 1:25 ou 1:20.

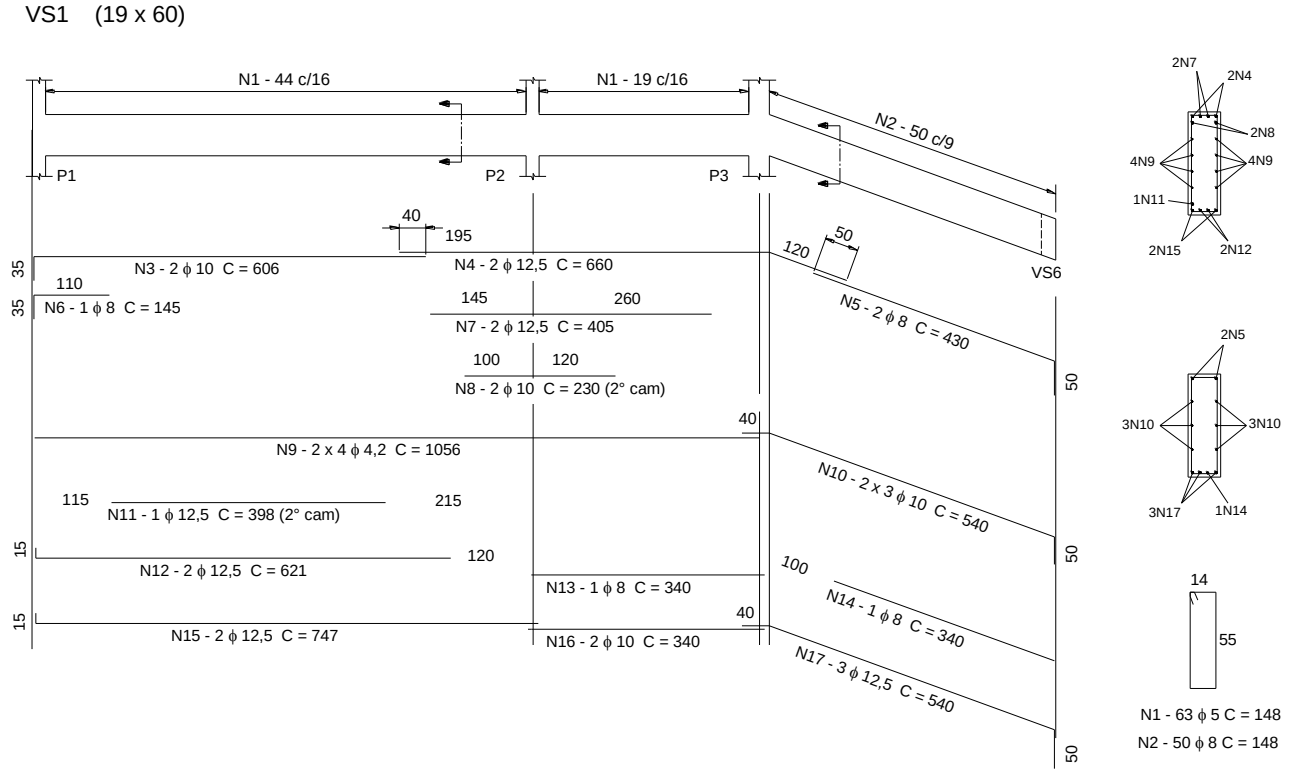


Figura 65 – Detalhamento final das armaduras da viga VS1.

16.6. Dimensionamento da Viga VS6 (19 x 60)

Serão dimensionadas as armaduras longitudinais e transversais para os esforços solicitantes internos máximos de M, V e T, como mostrados na Figura 60.

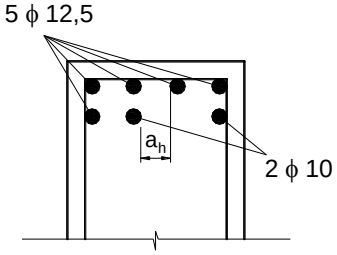
16.6.1. Armadura Longitudinal Negativa no Apoio Interno P6

Momentos fletores característicos e de cálculo:

$M_k = -12.300$ kN.cm $\rightarrow$ $M_d = \gamma_f \,.\, M_k = 1{,}4\,(-12.300) = -17.220$ kN.cm

Para a altura da viga de 60 cm será adotada a altura útil de 55 cm:

$$K_c = \frac{b_w\, d^2}{M_d} = \frac{19.55^2}{17.220} = 3{,}4$$



Da Tabela A-1: $\beta_x = x/d = 0{,}19 \le 0{,}45$ (ok!), $K_s = 0{,}025$ e dom. 2.

$$A_s = K_s\,\frac{M_d}{d} = 0{,}025\,\frac{17.220}{55} = 7{,}83\ \text{cm}^2 > A_{s,mín} = 1{,}87\ \text{cm}^2$$

5 ϕ 12,5 (6,25 cm^2) + 2 ϕ 10 (1,60 cm^2) $\rightarrow$ total = 7,85 cm^2

Supondo que o concreto será adensado com um vibrador com diâmetro de agulha de 25 mm, a distância livre horizontal entre as barras longitudinais das camadas superiores deve ser superior a esse diâmetro. Considerando estribo com diâmetro de 5 mm, para o detalhamento mostrado, a distância livre entre as barras da primeira camada resulta:

$$a_h = \frac{19 - [2\,(2{,}5 + 0{,}5) + 4\,.\,1{,}25]}{3} = 2{,}7\ \text{cm}$$

distância suficiente para a passagem da agulha do vibrador. Supondo que o centro de gravidade da armadura esteja posicionado 0,5 cm abaixo da face inferior das barras da primeira camada, a distância entre a face tracionada e o CG é:

$a_{cg} = 2{,}5 + 0{,}5 + 1{,}25 + 0{,}5 = 4{,}8$ cm (valor compatível com a altura útil d = 55 cm)

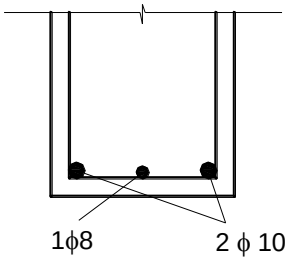
16.6.2. Armadura Longitudinal Positiva à Direita do Pilar P6

Momentos fletores característicos e de cálculo:

$M_k = 2.842$ kN.cm $\rightarrow$ $M_d = \gamma_f \,.\, M_k = 1{,}4\,.\,2842 = 3.979$ kN.cm

Com altura útil d = 56 cm:

$$K_c = \frac{b_w\, d^2}{M_d} = \frac{19.56^2}{3.979} = 15{,}0$$



da Tabela A-1: $\beta_x = x/d = 0{,}04 \le 0{,}45$ (ok!), $K_s = 0{,}023$ e dom. 2.

$$A_s = K_s\,\frac{M_d}{d} = 0{,}023\,\frac{3.979}{56} = 1{,}63\ \text{cm}^2 < A_{s,mín} = 1{,}87\ \text{cm}^2 \quad \rightarrow \quad 2\ \phi\ 10 + 1\ \phi\ 8\ (\text{total} = 2{,}10\ \text{cm}^2)$$

16.6.3. Armadura Longitudinal Positiva Entre os Pilares P9 e P6

Para verificação do momento fletor positivo máximo na viga VS6, entre os pilares P9 e P6, será calculado o momento considerando o tramo engastado no pilar P6 e com engaste elástico no pilar P9 (Figura 66). A rigidez da mola relativa ao pilar P9, com seção 19/19 é de 2.043.418 kN.cm, valor já determinado.

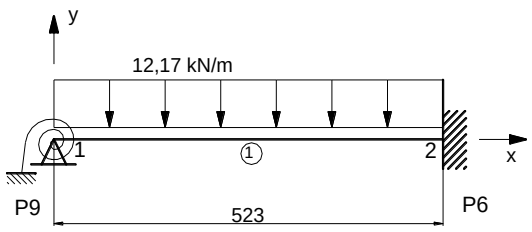


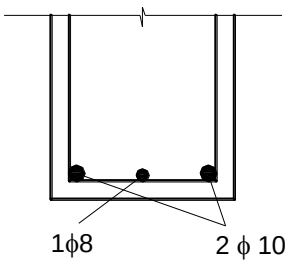
Figura 66 – Esquema estático, carregamento e numeração dos nós e barras para obtenção do momento fletor positivo considerando engaste perfeito no apoio intermediário (P6) da viga VS6.

O arquivo de dados de entrada no programa PPLAN4 está apresentado no Anexo B7. O relatório com os resultados encontra-se no Anexo B8.

O máximo momento fletor positivo para o esquema mostrado na Figura 59 resulta 2.129 kN.cm, muito superior ao valor de 453 kN.cm calculado segundo o modelo de grelha. Aliás, o tramo apresenta-se sob momentos fletores negativos em quase toda a extensão. No dimensionamento da armadura positiva do tramo deve ser considerado o maior valor, conforme indicado na NBR 6118. Os momentos fletores característicos e de cálculo são:

M_k = 2.129 kN.cm $\rightarrow$ $M_d = \gamma_f \,.\, M_k$ = 1,4 . 2129 = 2.981 kN.cm

$$K_c = \frac{b_w\, d^2}{M_d} = \frac{19.56^2}{2.981} = 20{,}0$$



da Tabela A-1: $\beta_x = x/d = 0{,}03 \leq 0{,}45$ (ok!), $K_s = 0{,}023$ e dom. 2.

$$A_s = K_s\,\frac{M_d}{d} = 0{,}023\frac{2.981}{56} = 1{,}22\ \text{cm}^2 < A_{s,mín} = 1{,}87\ \text{cm}^2$$

2 ϕ 10 + 1 ϕ 8 (total = 2,10 cm^2)

16.6.4. Armadura Transversal à Força Cortante

Na viga VS6 a força cortante máxima é V_k = 70,6 kN (V_{Sd} = 98,8 kN), valor menor que a força cortante mínima calculada ($V_{Sd,mín}$ = 156,4 kN), o que leva à armadura transversal mínima em toda extensão da VS6 ($A_{sw,mín}$ = 2,44 cm^2/m).

16.6.5. Ancoragem das Armaduras Longitudinais

a) Armadura positiva no pilar extremo P9

No pilar extremo P9 existe um pequeno momento fletor positivo (453 kN.cm), para o qual deve existir uma armadura de flexão resistente. A armadura mínima de flexão do tramo adjacente (2 ϕ 10 + 1 ϕ 8) pode ser estendida até o pilar e é mais do que suficiente para resistir a este momento fletor. Por simplicidade e a favor da segurança pode-se estender as três barras até o pilar P9, fazendo-se o gancho na extremidade das barras (ver Figura 68).

b) Armadura positiva no pilar interno P6

A armadura mínima a ancorar no pilar, tomando o tramo à direita que está sob momento fletor positivo, é:

$$\left|M_{d,apoio}\right| = \left|-17.220\right|\ \text{kN.cm} > M_{d,vão}/2 = 3.979/2 = 1.990\ \text{kN.cm}$$

Portanto, $A_{s,anc} \geq 1/4\ A_{s,vão}$ = 1,63/4 = 0,41 cm^2

As armaduras positivas de flexão dos dois tramos adjacentes ao pilar P6 ($2\ \phi\ 10 + 1\ \phi\ 8 \rightarrow 2{,}10\ cm^2$) atendem à armadura mínima a ancorar. As barras devem estender-se 10ϕ além da face do pilar.

Para a força cortante máxima de V_k = 70,6 kN no pilar P6, o valor da decalagem do diagrama de momentos fletores (a_ℓ), segundo o Modelo de Cálculo I, é:

V_{Sd} = 1,4 . 70,6 = 98,8 kN

$$a_\ell = 0{,}5d\,\frac{V_{Sd,máx}}{(V_{Sd,máx} - V_c)} \le d \qquad \text{, com } a_\ell \ge 0{,}5d$$

Na flexão simples, $V_c = V_{c0} = 0{,}6 f_{ctd}\, b_w\, d$ = 0,6 . 0,160 . 19 . 56 = 102,1 kN

$$f_{ctd} = \frac{f_{ctk,inf}}{\gamma_c} = \frac{0{,}7\, f_{ct,m}}{\gamma_c} = \frac{0{,}7\,.\,0{,}3}{\gamma_c}\sqrt[3]{f_{ck}^{\ 2}} = \frac{0{,}7\,.\,0{,}3}{1{,}4}\sqrt[3]{35^2} = 1{,}60 \text{ MPa} = 0{,}160 \text{ kN/cm}^2$$

Como V_{Sd} é menor que V_{c0} , deve ser tomado $a_\ell \ge 0{,}5d$ = 0,5 . 56 = 28 cm, valor a ser adotado para os dois tramos adjacentes ao pilar P6.

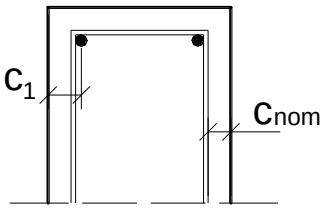
16.6.6. Dimensionamento à Torção

No tramo final da VS6 ocorre o momento de torção característico (T_k) de 1.540 kN.cm, constante ao longo do tramo. O momento de torção de cálculo é:

$T_{Sd} = \gamma_f\ .\ T_k$ = 1,4 . 1540 = 2.156 kN.cm

Os valores de A e u são os mesmos já calculados para a viga VS1, pois a seção transversal é idêntica: A = 1.140 cm^2 e u = 158 cm. As Eq. 19 e 20 fornecem os limites para a espessura h_e da parede fina:

$$h_e \le \frac{A}{u} = \frac{1140}{158} = 7{,}2\,\text{cm} \qquad \text{e} \qquad h_e \ge 2c_1$$

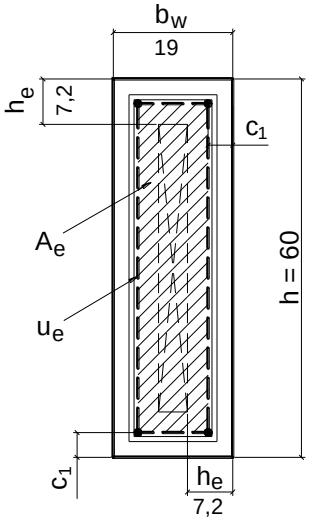


Sendo c = 2,5 cm e supondo ϕ_ℓ = 12,5 mm e ϕ_t = 8 mm encontra-se:

$c_1 = \phi_\ell/2 + \phi_t + c_{nom}$ = 1,25/2 + 0,8 + 2,5 = 3,925 cm

$h_e \ge 2c_1$ = 2 . 3,925 = 7,85 cm

Portanto, os limites para h_e são: 7,85 cm $\le h_e \le$ 7,2 cm, ou seja: $h_e \le$ 7,2 cm e $h_e \ge$ 7,85 cm. Não é possível adotar um valor para h_e que atenda aos limites. Neste caso, onde ocorreu $A/u < 2c_1$, foram apresentadas soluções nos exemplos anteriores para resolver o problema. Uma solução é fornecida pela NBR 6118, que permite adotar:



$h_e = A/u \le b_w - 2c_1$

$h_e = A/u$ = 7,2 cm $\le b_w - 2c_1$ = 19 – 7,85 = 11,15 cm $\rightarrow$ ok!

$\therefore\ h_e$ = 7,2 cm

A área A_e é definida pelos eixos das barras dos cantos (respeitando o cobrimento exigido nos estribos):

$A_e = (b_w - 2c_1)\ .\ (h - 2c_1)$ = (19 – 7,85) . (60 – 7,85) = 581,5 cm^2

O perímetro da área equivalente é:

$u_e = 2\,[(b_w - 2c_1) + (h - 2c_1)] = 2\,[(19 - 7{,}85) + (60 - 7{,}85)] = 126{,}6$ cm

O momento torçor máximo, determinado pela Eq. 23, com ângulo θ (45°) igual ao aplicado no cálculo da viga à força cortante, considerando o Modelo de Cálculo I, é:

$T_{Rd,2} = 0{,}5\ \alpha_{v2}\ f_{cd}\ A_e\ h_e \text{ sen } 2\,\theta = 0{,}5\ (1 - 35/250)\ .\ (3{,}5/1{,}4)\ 581{,}5\ .\ 7{,}2\ .\ \text{sen } 2\ .\ 45 = 4.500{,}8$ kN.cm

Para não ocorrer esmagamento das bielas comprimidas de concreto, conforme a Eq. 34 deve-se ter:

$$\frac{V_{Sd}}{V_{Rd2}} + \frac{T_{Sd}}{T_{Rd2}} \le 1$$

Sendo $V_{Rd2} = 617{,}1$ kN e $V_{Sd,máx} = 1{,}4\ .\ 70{,}6 = 98{,}8$ kN (força cortante máxima atuante no tramo com torção), aplicando os valores numéricos na Eq. 34 fica:

$$\frac{98{,}8}{617{,}1} + \frac{2.156}{4.500{,}8} = 0{,}64 \le 1{,}0 \quad \rightarrow \quad \text{ok!}$$

Como a equação foi satisfeita não ocorrerá o esmagamento do concreto nas diagonais de compressão.

a) Cálculo das armaduras

As armaduras mínimas para torção, já calculadas para a viga VS1, são:

$A_{s\ell,mín} = 0{,}92$ cm²/m e $A_{s,90mín} = 2{,}44$ cm²/m

Armadura longitudinal conforme a Eq. 27:

$$\frac{A_{s\ell}}{u_e} = \frac{T_{Sd}}{2\,A_e\,f_{ywd}\,\text{tg}\,\theta} = \frac{2156}{2 \cdot 581{,}5\,\dfrac{50}{1{,}15}\ \text{tg}\,45} = 0{,}0426\,\text{cm}^2/\text{cm}$$

com $u_e = 100$ cm, $A_{s\ell} = 4{,}26$ cm²/m $\ge A_{s\ell,mín} = 0{,}92$ cm²/m $\rightarrow$ ok!

Armadura transversal (estribos) conforme a Eq. 24:

$$\frac{A_{s,90}}{s} = \frac{T_{Sd}}{2\,A_e\,f_{ywd}}\,\text{tg}\,\theta = \frac{2156}{2 \cdot 581{,}5\,\dfrac{50}{1{,}15}}\,\text{tg}\,45 = 0{,}0426\,\text{cm}^2/\text{cm}$$

com s = 100 cm, $A_{s,90} = 4{,}26$ cm²/m $\ge A_{s,90mín} = 2{,}44$ cm²/m $\rightarrow$ ok!

b) Detalhamento das armaduras

b1) Armadura longitudinal

Analisando os diagramas de momentos fletores e momentos torçores, mostrados na Figura 60, observa-se que pode ser considerada somente a seção onde ocorre o momento fletor máximo negativo (no pilar P6), para calcular a armadura longitudinal combinada de modo a atender a ambos momentos. A área total de armadura pode então ser obtida pela soma das armaduras de flexão e de torção, calculadas para cada uma das quatro faces externas da viga:

Face superior:

- da flexão: $A_s = 7{,}83$ cm²
- da torção: $A_s = (b_w - 2c_1) = (19 - 7{,}85)\ 0{,}0426 = 0{,}47$ cm²

- $A_{s,total}$ = 7,83 + 0,47 = 8,30 cm^2 (5 ϕ 12,5 + 3 ϕ10 $\rightarrow$ 8,65 cm^2)

Face inferior:

- da flexão: A_s = 0,41 cm^2 (armadura mínima a ancorar no pilar P6)
- da torção: $A_s = (b_w - 2c_1)$ = (19 – 7,85) 0,0426 = 0,47 cm^2
- $A_{s,total}$ = 0,41 + 0,47 = 0,88 cm^2

Esta armadura será atendida pela armadura mínima positiva que se estende até o pilar (2 ϕ 10 + 1 ϕ 8 $\rightarrow$ 2,10 cm^2).

Faces laterais:

- $A_{s,total} = (h - 2c_1)$ = (60 – 7,85) 0,0426 = 2,22 cm^2 (3 ϕ 10 mm $\rightarrow$ 2,40 cm^2).

Esta armadura deverá se estender do pilar P6 até a intersecção com a viga VS1.

b2) Armadura transversal

A área total de estribos verticais é calculada pela soma das áreas relativas à força cortante e à torção. A armadura para a força cortante máxima entre o pilar P6 e a interseção com a viga VS1 resultou na armadura mínima, de 0,0244 cm^2/cm.

Considerando o estribo composto por dois ramos verticais, e que a área relativa à força cortante para um ramo é 0,0244/2 = 0,0122 cm/m^2, a armadura transversal total é:

$$\frac{A_{s,total}}{s} = \frac{A_{sw,1ramo}}{s} + \frac{A_{s,90}}{s} = 0{,}0122 + 0{,}0426 = 0{,}0548 \text{cm}^2/\text{cm} = 5{,}48 \text{ cm}^2/\text{m}$$

Supondo estribo fechado de dois ramos com diâmetro de 8 mm (1 ϕ 8 $\rightarrow$ 0,50 cm^2) tem-se:

$$\frac{0{,}50}{s} = 0{,}0548 \rightarrow \qquad s = 9{,}1 \text{ cm} \leq s_{máx} = 30 \text{ cm} \qquad \rightarrow \text{ ok!}$$

Portanto, pode-se dispor estribo ϕ 8 mm c/9 cm. Na Figura 68 encontra-se mostrado o detalhamento final das armaduras da viga VS6.

16.6.7. Cobrimento do Diagrama de Momentos Fletores Negativos

O valor da decalagem (a_ℓ) para deslocamento do diagrama de momentos fletores de cálculo é 28 cm. O comprimento de ancoragem básico para barras ϕ 12,5 mm, em situação de má aderência, aço CA-50 e concreto C35, é 54 cm (coluna sem gancho).

A Figura 67 mostra o cobrimento do diagrama de momentos fletores de cálculo, feito para determinação do comprimento das barras da armadura longitudinal negativa.

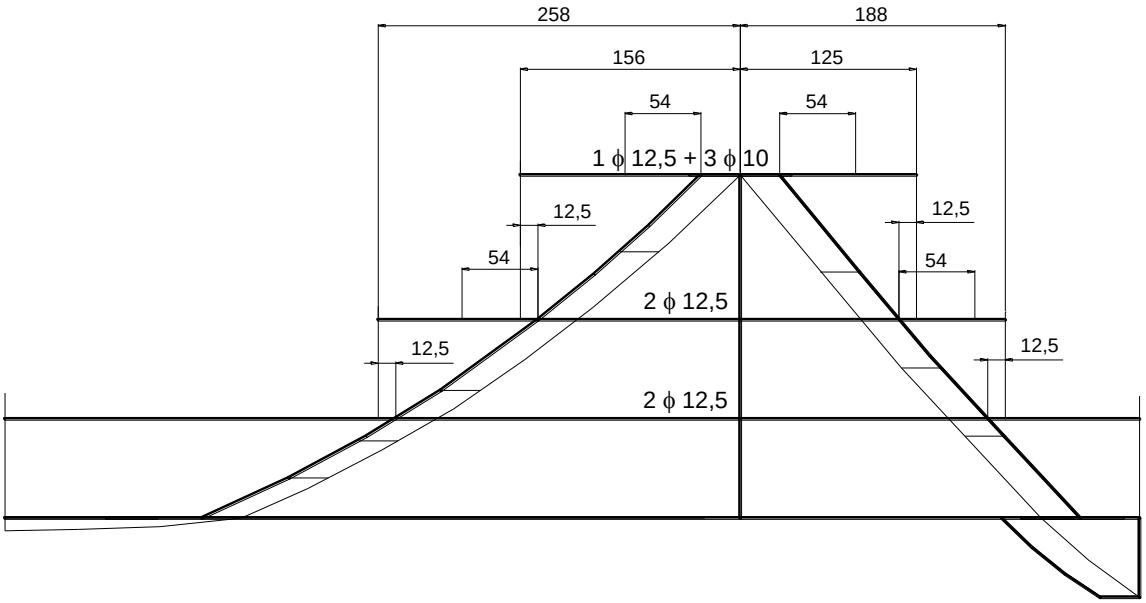


Figura 67 – Esquema do cobrimento do diagrama de momentos fletores de cálculo negativos.

16.6.8. Detalhamento Final das Armaduras

A Figura 68 apresenta o detalhamento final das armaduras da viga. Este desenho é feito normalmente na escala 1:50. O desenho do corte da seção transversal e do estribo é feito normalmente na escala de 1:25 ou 1:20. Atenção máxima deve ser dispensada ao detalhamento final, pois comumente é apenas com ele que a armação da viga será executada.

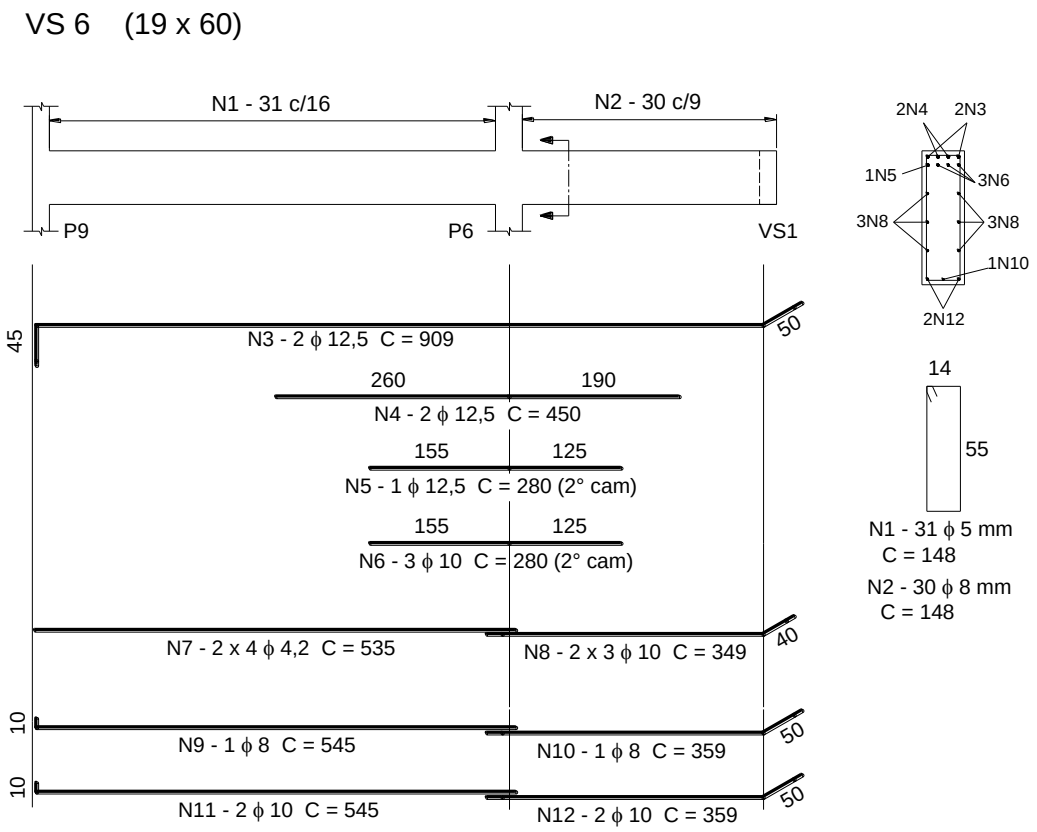


Figura 68 – Desenho com a armadura final da viga VS6.

17. QUESTIONÁRIO

1ª) Comente sobre os casos mais comuns de torção nas estruturas das edificações.
2ª) O que são torção de equilíbrio e torção de compatibilidade? Cite exemplos.
3ª) Qual o valor do momento de torção solicitante no caso de viga biengastada sob solicitação de torção externa uniforme no tramo?
4ª) O que é torção de St. Venant?
5ª) Para uma seção circular, mostre numa figura como se configuram as tensões principais devidas à torção.
6ª) E como se configuram as tensões de cisalhamento devidas à torção?
7ª) Qual a equação que define a tensão de cisalhamento devida à torção para uma seção vazada?
8ª) Indique numa figura o que é a área A_e e o perímetro u.
9ª) Verifique a eficiência alcançada pela viga em função dos diferentes arranjos para a armadura.
10ª) Por que uma viga de Concreto Armado retangular pode ser analisada à torção como se fosse oca e com espessura da casca constante?
11ª) Por que se pode fazer uma analogia da viga sob torção com uma treliça espacial?
12ª) Como se configura a treliça espacial generalizada?
13ª) Como se configuram as trajetórias das fissuras numa viga sob torção?
14ª) Explique resumidamente quais são as formas de ruptura de uma viga por torção.
15ª) Estude a dedução das equações desenvolvidas para a treliça espacial generalizada.
16ª) Como a norma define a espessura da casca da seção vazada?
17ª) Qual é a resistência proporcionada pelas diagonais comprimidas de concreto?
18ª) Como são as equações que definem as armaduras para a torção?
19ª) No caso de torção combinada com força cortante, como se verifica a biela comprimida de concreto?
20ª) Qual o objetivo de se dispor uma armadura mínima à torção?
21ª) Como é calculada a armadura mínima para a torção?
22ª) Qual o diâmetro mínimo e máximo para os estribos? Qual é o espaçamento máximo?
23ª) Por que os estribos para torção não podem ser abertos?
24ª) Como deve ser feita a distribuição da armadura longitudinal nas faces da viga?

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. *Building code requirements for structural concrete and Commentary*. ACI 318-11, 2011, 503p.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *Projeto de estruturas de concreto*. NBR 6118, ABNT, 2023, 242p.

BASTOS, P.S. *Fundamentos do Concreto Armado*. Bauru/SP, Universidade Estadual Paulista (UNESP), set/2023, 90p. Disponível em (26/03/24):
https://wwwp.feb.unesp.br/pbastos/concreto1/Fundamentos%20CA.pdf

BASTOS, P.S. *Flexão normal simples - Vigas*. Bauru/SP, Universidade Estadual Paulista (UNESP), out/2023, 74p. Disponível em (26/03/24): https://wwwp.feb.unesp.br/pbastos/concreto1/FlexaoSimples.pdf

BASTOS, P.S. *Dimensionamento de vigas de concreto armado à força cortante*. Bauru/SP, Universidade Estadual Paulista (UNESP), nov/2023, 77p. Disponível em (26/03/24):
http://wwwp.feb.unesp.br/pbastos/pag_concreto2.htm

BASTOS, P.S. *Ancoragem e emenda de armaduras*. Bauru/SP, Universidade Estadual Paulista (UNESP), mar/2024, 26p. Disponível em (26/03/24): http://wwwp.feb.unesp.br/pbastos/pag_concreto2.htm

BASTOS, P.S.S. *Vigas de Concreto Armado - dimensionamento, flecha e fissuração*. Bauru/SP, Universidade Estadual Paulista (UNESP), Abril/2024, 173p. Disponível em (29/04/24):
http://wwwp.feb.unesp.br/pbastos/pag_concreto2.htm

COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. *Model Code 1990*, MC-90, CEB-FIP, Bulletin D'Information n. 204, Lausanne, 1991.

CORRÊA, M.R.S. ; RAMALHO, M.A. ; CEOTTO, L.H. *Sistema PPLAN4/GPLAN4 – Manual de utilização*. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos – USP, Departamento de Engenharia de Estruturas, 1992, 80p.

GIONGO, J.S. *Concreto armado: Vigas submetidas a esforços de torção*. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos – USP, Departamento de Engenharia de Estruturas, 1996, 40p.

GIONGO, J.S. *Concreto armado: projeto estrutural de edifícios*. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos, Usp, Dep. de Estruturas. 1994.

LEONHARDT, F. ; MÖNNIG, E. *Construções de concreto – Princípios básicos do dimensionamento de estruturas de concreto armado*, v. 1, Rio de Janeiro, Ed. Interciência, 1982, 305p.

LIMA, J.S. ; GUARDA, M.C. ; PINHEIRO, L.M. *Análise de torção em vigas de acordo com a nova NBR 6118*. In: 42 CONGRESSO BRASILEIRO DO CONCRETO, IBRACON. Fortaleza, ago/2000, CD-ROM, 16p.

MACGREGOR, J.G. ; WIGHT, J.K. *Reinforced concrete – Mechanics and design*. 4a ed., Upper Saddle River, Ed. Prentice Hall, 2005, 1132p.

SÁNCHEZ, E. *Dimensionamento à torção: novas prescrições normativas brasileiras*. In: Nova normalização brasileira para o concreto estrutural. 2001, p.155-185.

SÜSSEKIND, J.C. *Curso de concreto*, v. 1, 4ª ed., Porto Alegre, Ed. Globo, 1985, 376p.

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR

FUSCO, P.B. *Técnica de armar as estruturas de concreto*. São Paulo, Ed. Pini, 2000, 382p.

LEONHARDT, F. ; MÖNNIG, E. *Construções de concreto – Princípios básicos sobre a armação de estruturas de concreto armado*, v. 3, Rio de Janeiro, Ed. Interciência, 1982, 273p.

NAWY, E.G. *Reinforced concrete – A fundamental approach*. Englewood Cliffs, Ed. Prentice Hall, 2005, 5a. ed., 824p.

SÁNCHEZ, E. *Análise crítica do projeto de revisão da NB-1: Prescrições para o dimensionamento à torção*. In: XXIX JORNADAS SUDAMERICANAS DE INGENIERIA ESTRUCTURAL, 2000, CD-ROM, 7p.

ANEXO A - TABELAS

Tabela A-1 – Valores de K_c e K_s para o aço CA-50 (para concretos do Grupo I de resistência – $f_{ck} \leq 50$ MPa, $\gamma_c = 1,4$, $\gamma_s = 1,15$).

FLEXÃO SIMPLES EM SEÇÃO RETANGULAR - ARMADURA SIMPLES									
$\beta_x = \frac{x}{d}$	K_c (cm²/kN)							K_s (cm²/kN)	Dom.
	C20	C25	C30	C35	C40	C45	C50	CA-50	
0,01	103,4	82,7	68,9	59,1	51,7	47,8	44,5	0,023	2
0,02	51,9	41,5	34,6	29,6	25,9	24,0	22,4	0,023	
0,03	34,7	27,8	23,2	19,8	17,4	16,1	15,0	0,023	
0,04	26,2	20,9	17,4	14,9	13,1	12,1	11,3	0,023	
0,05	21,0	16,8	14,0	12,0	10,5	9,7	9,1	0,023	
0,06	17,6	14,1	11,7	10,0	8,8	8,1	7,6	0,024	
0,07	15,1	12,1	10,1	8,6	7,6	7,0	6,5	0,024	
0,08	13,3	10,6	8,9	7,6	6,6	6,1	5,7	0,024	
0,09	11,9	9,5	7,9	6,8	5,9	5,5	5,1	0,024	
0,10	10,7	8,6	7,1	6,1	5,4	5,0	4,6	0,024	
0,11	9,8	7,8	6,5	5,6	4,9	4,5	4,2	0,024	
0,12	9,0	7,2	6,0	5,1	4,5	4,2	3,9	0,024	
0,13	8,4	6,7	5,6	4,8	4,2	3,9	3,6	0,024	
0,14	7,8	6,2	5,2	4,5	3,9	3,6	3,4	0,024	
0,15	7,3	5,8	4,9	4,2	3,7	3,4	3,1	0,024	
0,16	6,9	5,5	4,6	3,9	3,4	3,2	3,0	0,025	
0,17	6,5	5,2	4,3	3,7	3,2	3,0	2,8	0,025	
0,18	6,2	4,9	4,1	3,5	3,1	2,8	2,7	0,025	
0,19	5,9	4,7	3,9	3,4	2,9	2,7	2,5	0,025	
0,20	5,6	4,5	3,7	3,2	2,8	2,6	2,4	0,025	
0,21	5,4	4,3	3,6	3,1	2,7	2,5	2,3	0,025	
0,22	5,1	4,1	3,4	2,9	2,6	2,4	2,2	0,025	
0,23	4,9	3,9	3,3	2,8	2,5	2,3	2,1	0,025	
0,24	4,7	3,8	3,2	2,7	2,4	2,2	2,0	0,025	
0,25	4,6	3,7	3,1	2,6	2,3	2,1	2,0	0,026	
0,26	4,4	3,5	2,9	2,5	2,2	2,0	1,9	0,026	
0,27	4,3	3,4	2,8	2,4	2,1	2,0	1,8	0,026	3
0,28	4,1	3,3	2,8	2,4	2,1	1,9	1,8	0,026	
0,29	4,0	3,2	2,7	2,3	2,0	1,9	1,7	0,026	
0,30	3,9	3,1	2,6	2,2	1,9	1,8	1,7	0,026	
0,31	3,8	3,0	2,5	2,2	1,9	1,8	1,6	0,026	
0,32	3,7	3,0	2,5	2,1	1,8	1,7	1,6	0,026	
0,33	3,6	2,9	2,4	2,1	1,8	1,7	1,5	0,026	
0,34	3,5	2,8	2,3	2,0	1,8	1,6	1,5	0,027	
0,35	3,4	2,7	2,3	2,0	1,7	1,6	1,5	0,027	
0,36	3,3	2,7	2,2	1,9	1,7	1,5	1,4	0,027	
0,37	3,3	2,6	2,2	1,9	1,6	1,5	1,4	0,027	
0,38	3,2	2,6	2,1	1,8	1,6	1,5	1,4	0,027	
0,40	3,1	2,5	2,0	1,8	1,5	1,4	1,3	0,027	
0,42	2,9	2,4	2,0	1,7	1,5	1,4	1,3	0,028	
0,44	2,8	2,3	1,9	1,6	1,4	1,3	1,2	0,028	
0,45	2,8	2,2	1,9	1,6	1,4	1,3	1,2	0,028	
0,46	2,7	2,2	1,8	1,6	1,4	1,3	1,2	0,028	
0,48	2,7	2,1	1,8	1,5	1,3	1,2	1,1	0,028	
0,50	2,6	2,1	1,7	1,5	1,3	1,2	1,1	0,029	
0,52	2,5	2,0	1,7	1,4	1,2	1,2	1,1	0,029	
0,54	2,4	1,9	1,6	1,4	1,2	1,1	1,0	0,029	
0,56	2,4	1,9	1,6	1,4	1,2	1,1	1,0	0,030	
0,58	2,3	1,8	1,5	1,3	1,2	1,1	1,0	0,030	
0,60	2,3	1,8	1,5	1,3	1,1	1,0	1,0	0,030	
0,62	2,2	1,8	1,5	1,3	1,1	1,0	1,0	0,031	
0,63	2,2	1,7	1,5	1,2	1,1	1,0	0,9	0,031	

Tabela A-2 – Área e massa linear de fios e barras de aço (NBR 7480).

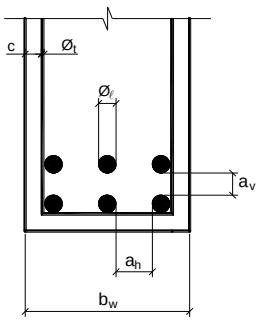
Diâmetro (mm)		Massa (kg/m)	Área (mm^2)	Perímetro (mm)
Fios	Barras			
2,4	-	0,036	4,5	7,5
3,4	-	0,071	9,1	10,7
3,8	-	0,089	11,3	11,9
4,2	-	0,109	13,9	13,2
4,6	-	0,130	16,6	14,5
5	5	0,154	19,6	17,5
5,5	-	0,187	23,8	17,3
6	-	0,222	28,3	18,8
-	6,3	0,245	31,2	19,8
6,4	-	0,253	32,2	20,1
7	-	0,302	38,5	22,0
8	8	0,395	50,3	25,1
9,5	-	0,558	70,9	29,8
10	10	0,617	78,5	31,4
-	12,5	0,963	122,7	39,3
-	16	1,578	201,1	50,3
-	20	2,466	314,2	62,8
-	22	2,984	380,1	69,1
-	25	3,853	490,9	78,5
-	32	6,313	804,2	100,5
-	40	9,865	1256,6	125,7

Tabela A-3 – Área de aço e largura b_w mínima.

Diâm. (mm)	A_s (cm^2) / b_w (cm)		Número de barras									
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4,2	As		0,14	0,28	0,42	0,56	0,70	0,84	0,98	1,12	1,26	1,40
	b_w	Br. 1	-	8	11	14	16	19	22	25	27	30
		Br. 2	-	9	13	16	19	23	26	30	33	36
5	As		0,20	0,40	0,60	0,80	1,00	1,20	1,40	1,60	1,80	2,00
	b_w	Br. 1	-	9	11	14	17	20	22	25	28	31
		Br. 2	-	9	13	16	20	23	27	30	34	37
6,3	As		0,31	0,62	0,93	1,24	1,55	1,86	2,17	2,48	2,79	3,10
	b_w	Br. 1	-	9	12	15	18	20	23	26	29	32
		Br. 2	-	10	13	17	20	24	28	31	35	39
8	As		0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00	4,50	5,00
	b_w	Br. 1	-	9	12	15	18	21	25	28	31	34
		Br. 2	-	10	14	17	21	25	29	33	36	40
10	As		0,80	1,60	2,40	3,20	4,00	4,80	5,60	6,40	7,20	8,00
	b_w	Br. 1	-	10	13	16	19	23	26	29	33	36
		Br. 2	-	10	14	18	22	26	30	34	38	42
12,5	As		1,25	2,50	3,75	5,00	6,25	7,50	8,75	10,00	11,25	12,50
	b_w	Br. 1	-	10	14	17	21	24	28	31	35	38
		Br. 2	-	11	15	19	24	28	32	36	41	45
16	As		2,00	4,00	6,00	8,00	10,00	12,00	14,00	16,00	18,00	20,00
	b_w	Br. 1	-	11	15	19	22	26	30	34	38	42
		Br. 2	-	11	16	21	25	30	34	39	44	48
20	As		3,15	6,30	9,45	12,60	15,75	18,90	22,05	25,20	28,35	31,50
	b_w	Br. 1	-	12	16	20	24	29	33	37	42	46
		Br. 2	-	12	17	22	27	32	37	42	47	52
22	As		3,80	7,60	11,40	15,20	19,00	22,80	26,60	30,40	34,20	38,00
	b_w	Br. 1	-	12	16	21	25	30	34	39	43	48
		Br. 2	-	13	18	23	28	33	39	44	49	54
25	As		4,90	9,80	14,70	19,60	24,50	29,40	34,30	39,20	44,10	49,00
	b_w	Br. 1	-	13	18	23	28	33	38	43	48	53
		Br. 2	-	13	19	24	30	35	41	46	52	57
32	As		8,05	16,10	24,15	32,20	40,25	48,30	56,35	64,40	72,45	80,50
	b_w	Br. 1	-	15	21	28	34	40	47	53	60	66
		Br. 2	-	15	21	28	34	40	47	53	60	66
40	As		12,60	25,20	37,80	50,40	63,00	75,60	88,20	100,80	113,40	126,00
	b_w	Br. 1	-	17	25	33	41	49	57	65	73	81
		Br. 2	-	17	25	33	41	49	57	65	73	81

largura b_w mínima:

$b_{w,mín} = 2\,(c + \phi_t) + n^o \text{ barras} \,.\, \phi_\ell + a_{h.mín}\,(n^o \text{ barras} - 1)$



Br. 1 = brita 1 ($d_{máx}$ = 19 mm) ; Br. 2 = brita 2 ($d_{máx}$ = 25 mm)

Valores adotados: ϕ_t = 6,3 mm ; c_{nom} = 2,0 cm

Para $c_{nom} \neq$ 2,0 cm, aumentar $b_{w,mín}$ conforme:

c_{nom} = 2,5 cm $\rightarrow$ + 1,0 cm

c_{nom} = 3,0 cm $\rightarrow$ + 2,0 cm

c_{nom} = 3,5 cm $\rightarrow$ + 3,0 cm

c_{nom} = 4,0 cm $\rightarrow$ + 4,0 cm

$$a_{h,mín} \geq \begin{cases} 2\text{ cm} \\ \phi_\ell \\ 1{,}2\,d_{máx,agr} \end{cases}$$

*Tabela A-4 – Equações simplificadas segundo o **Modelo de Cálculo I** para concretos do Grupo I.*

Modelo de Cálculo I *(estribo com α = 90°, γ_c = 1,4, γ_s = 1,15, aços CA-50 e CA-60, Flexão Simples).*			
Concreto	V_{Rd2} (kN)	$V_{Sd,mín}$ (kN)	A_{sw} (cm^2/m)
C20	$0{,}35\, b_w\, d$	$0{,}101\, b_w\, d$	$2{,}55 \frac{V_{Sd}}{d} - 0{,}17\, b_w$
C25	$0{,}43\, b_w\, d$	$0{,}117\, b_w\, d$	$2{,}55 \frac{V_{Sd}}{d} - 0{,}20\, b_w$
C30	$0{,}51\, b_w\, d$	$0{,}132\, b_w\, d$	$2{,}55 \frac{V_{Sd}}{d} - 0{,}22\, b_w$
C35	$0{,}58\, b_w\, d$	$0{,}147\, b_w\, d$	$2{,}55 \frac{V_{Sd}}{d} - 0{,}25\, b_w$
C40	$0{,}65\, b_w\, d$	$0{,}160\, b_w\, d$	$2{,}55 \frac{V_{Sd}}{d} - 0{,}27\, b_w$
C45	$0{,}71\, b_w\, d$	$0{,}173\, b_w\, d$	$2{,}55 \frac{V_{Sd}}{d} - 0{,}29\, b_w$
C50	$0{,}77\, b_w\, d$	$0{,}186\, b_w\, d$	$2{,}55 \frac{V_{Sd}}{d} - 0{,}31\, b_w$
b_w = largura da viga, cm; d = altura útil, cm;		V_{Sd} = força cortante de cálculo, kN;	

*Tabela A-5 – Equações simplificadas segundo **Modelo de Cálculo II** para concretos do Grupo I.*

Modelo de Cálculo II *(estribo vertical com α = 90°, γ_c = 1,4, γ_s = 1,15, aços CA-50 e CA-60, Flexão Simples)*			
Concreto	V_{Rd2} (kN)	$V_{Sd,mín}$ (kN)	A_{sw} (cm^2/m)
C20	$0{,}71\, b_w . d . \text{sen}\,\theta . \cos\theta$	$0{,}035 . b_w . d . \cot g\,\theta + V_{c1}$	$2{,}55\, \text{tg}\,\theta \frac{(V_{Sd} - V_{c1})}{d}$
C25	$0{,}87\, b_w . d . \text{sen}\,\theta . \cos\theta$	$0{,}040 . b_w . d . \cot g\,\theta + V_{c1}$	
C30	$1{,}02\, b_w . d . \text{sen}\,\theta . \cos\theta$	$0{,}045 . b_w . d . \cot g\,\theta + V_{c1}$	
C35	$1{,}16\, b_w . d . \text{sen}\,\theta . \cos\theta$	$0{,}050 . b_w . d . \cot g\,\theta + V_{c1}$	
C40	$1{,}30\, b_w . d . \text{sen}\,\theta . \cos\theta$	$0{,}055 . b_w . d . \cot g\,\theta + V_{c1}$	
C45	$1{,}42\, b_w . d . \text{sen}\,\theta . \cos\theta$	$0{,}059 . b_w . d . \cot g\,\theta + V_{c1}$	
C50	$1{,}54\, b_w . d . \text{sen}\,\theta . \cos\theta$	$0{,}064 . b_w . d . \cot g\,\theta + V_{c1}$	
b_w = largura da viga, cm; d = altura útil, cm; V_{C1} = força cortante proporcionada pelos mecanismos complementares ao de treliça, kN;		V_{Sd} = força cortante de cálculo, kN; θ = ângulo de inclinação das bielas de compressão (°);	

Tabela A-6 – Taxas mínimas de armadura de flexão para vigas com seção transversal retangular. (Tabela 17.3 da NBR 6118).

f_{ck} (MPa)	**20**	**25**	**30**	**35**	**40**	**45**	**50**	**55**	**60**	**65**	**70**	**75**	**80**	**85**	**90**
$\rho_{mín}$ (%)[a)]	0,150	0,150	0,150	0,164	0,179	0,194	0,208	0,211	0,219	0,226	0,233	0,239	0,245	0,251	0,256

a) Os valores de $\rho_{mín}$ estabelecidos nesta Tabela pressupõem o uso de aço CA-50, d/h = 0,8, γ_c = 1,4 e γ_s = 1,15. Caso esses fatores sejam diferentes, $\rho_{mín}$ deve ser recalculado.

$\rho_{mín} = A_{s,mín}/A_c$

Tabela A-7 – Comprimento de ancoragem (cm) para o aço CA-50 nervurado.

COMPRIMENTO DE ANCORAGEM (cm) para $A_{s,ef} = A_{s,calc}$ CA-50 nervurado

ϕ (mm)	Concreto													
	C20		C25		C30		C35		C40		C45		C50	
	Sem	Com	Sem	Com	Sem	Com	Sem	Com	Sem	Com	Sem	Com	Sem	Com
6,3	39	28	34	24	30	21	27	19	25	17	23	16	21	15
	28	19	24	17	21	15	19	13	17	12	16	11	15	10
8	50	35	43	30	38	27	34	24	31	22	29	20	27	19
	35	24	30	21	27	19	24	17	22	15	20	14	19	13
10	62	44	54	38	48	33	43	30	39	28	36	25	34	24
	44	31	38	26	33	23	30	21	28	19	25	18	24	17
12,5	78	55	67	47	60	42	54	38	49	34	45	32	42	30
	55	38	47	33	42	29	38	26	34	24	32	22	30	21
16	100	70	86	60	76	53	69	48	63	44	58	41	54	38
	70	49	60	42	53	37	48	34	44	31	41	29	38	27
20	125	87	108	75	95	67	86	60	79	55	73	51	68	47
	87	61	75	53	67	47	60	42	55	39	51	36	47	33
25	156	109	135	94	119	83	108	75	98	69	91	64	85	59
	109	76	94	66	83	58	75	53	69	48	64	45	59	42
32	200	140	172	121	152	107	138	96	126	88	116	81	108	76
	140	98	121	84	107	75	96	67	88	62	81	57	76	53
40	271	190	234	164	207	145	187	131	171	120	158	111	147	103
	190	133	164	115	145	102	131	92	120	84	111	77	103	72

Valores de acordo com a NBR 6118.
N° Superior: Má Aderência ; N° Inferior: Boa Aderência
Sem e **Com** indicam sem ou com gancho na extremidade da barra
$A_{s,ef}$ = área de armadura efetiva ; $A_{s,calc}$ = área de armadura calculada
γ_c = 1,4 ; γ_s = 1,15

O comprimento de ancoragem deve ser maior do que o comprimento mínimo: $\ell_{b,mín} \geq \begin{cases} 0{,}3\,\ell_b \\ 10\,\phi \\ 100\,\text{mm} \end{cases}$

Tabela A-8 – Comprimento de ancoragem (cm) para o aço CA-60 entalhado.

COMPRIMENTO DE ANCORAGEM (cm) para $A_{s,ef} = A_{s,calc}$ CA-60														
ϕ (mm)	Concreto													
	C20		C25		C30		C35		C40		C45		C50	
	Sem	Com	Sem	Com	Sem	Com	Sem	Com	Sem	Com	Sem	Com	Sem	Com
4,2	71	50	61	43	54	38	49	34	45	31	41	29	38	27
	50	35	43	30	38	26	34	24	31	22	29	20	27	19
5	84	59	73	51	64	45	58	41	53	37	49	34	46	32
	59	41	51	36	45	32	41	28	37	26	34	24	32	22
6	101	71	87	61	77	54	70	49	64	45	59	41	55	38
	71	50	61	43	54	38	49	34	45	31	41	29	38	27
7	118	83	102	71	90	63	81	57	74	52	69	48	64	45
	83	58	71	50	63	44	57	40	52	36	48	34	45	31
8	135	94	116	81	103	72	93	65	85	59	79	55	73	51
	94	66	81	57	72	50	65	46	59	42	55	38	51	36
9,5	160	112	138	97	122	86	110	77	101	71	93	65	87	61
	112	78	97	68	86	60	77	54	71	49	65	46	61	43

Valores de acordo com a NBR 6118.
N° Superior: Má Aderência ; N° Inferior: Boa Aderência
Sem e Com indicam sem ou com gancho na extremidade da barra
$A_{s,ef}$ = área de armadura efetiva ; $A_{s,calc}$ = área de armadura calculada
$\gamma_c = 1,4$; $\gamma_s = 1,15$

O comprimento de ancoragem deve ser maior do que o comprimento mínimo: $\ell_{b,mín} \geq \begin{cases} 0,3\,\ell_b \\ 10\,\phi \\ 100\,\text{mm} \end{cases}$

Tabela A-9 – Valores mínimos para armaduras passivas aderentes em lajes (Tabela 19.1 da NBR 6118).

Armadura	**Elementos estruturais sem armaduras ativas**
Armaduras negativas	$\rho_s \geq \rho_{mín}$
Armaduras negativas de bordas sem continuidade	$\rho_s \geq 0,67\rho_{mín}$
Armaduras positivas de lajes armadas nas duas direções	$\rho_s \geq 0,67\rho_{mín}$
Armadura positiva (principal) de lajes armadas em uma direção	$\rho_s \geq \rho_{mín}$
Armadura positiva (secundária) de lajes armadas em uma direção	$A_s/s \geq 20$ % da armadura principal $A_s/s \geq 0,9$ cm^2/m $\rho_s \geq 0,5\,\rho_{mín}$
$\rho_s = A_s/(b_w\,h)$ Os valores de $\rho_{mín}$ constam da Tabela A-6.	

Tabela A-10 – Diâmetro dos pinos de dobramento (D) (Tabela 9.1 da NBR 6118).

Bitola (mm)	Tipo de aço		
	CA-25	CA-50	CA-60
< 20	4 ϕ	5 ϕ	6 ϕ
≥ 20	5 ϕ	8 ϕ	-

Tabela A-11 – Área de armadura por metro de largura (cm^2/m).

ÁREA DE ARMADURA POR METRO DE LARGURA (cm^2/m)						
Espaçamento (cm)	Diâmetro Nominal (mm)					
	4,2	5	6,3	8	10	12,5
5	2,77	4,00	6,30	10,00	16,00	25,00
5,5	2,52	3,64	5,73	9,09	14,55	22,73
6	2,31	3,33	5,25	8,33	13,33	20,83
6,5	2,13	3,08	4,85	7,69	12,31	19,23
7	1,98	2,86	4,50	7,14	11,43	17,86
7,5	1,85	2,67	4,20	6,67	10,67	16,67
8	1,73	2,50	3,94	6,25	10,00	15,63
8,5	1,63	2,35	3,71	5,88	9,41	14,71
9	1,54	2,22	3,50	5,56	8,89	13,89
9,5	1,46	2,11	3,32	5,26	8,42	13,16
10	1,39	2,00	3,15	5,00	8,00	12,50
11	1,26	1,82	2,86	4,55	7,27	11,36
12	1,15	1,67	2,62	4,17	6,67	10,42
12,5	1,11	1,60	2,52	4,00	6,40	10,00
13	1,07	1,54	2,42	3,85	6,15	9,62
14	0,99	1,43	2,25	3,57	5,71	8,93
15	0,92	1,33	2,10	3,33	5,33	8,33
16	0,87	1,25	1,97	3,13	5,00	7,81
17	0,81	1,18	1,85	2,94	4,71	7,35
17,5	0,79	1,14	1,80	2,86	4,57	7,14
18	0,77	1,11	1,75	2,78	4,44	6,94
19	0,73	1,05	1,66	2,63	4,21	6,58
20	0,69	1,00	1,58	2,50	4,00	6,25
22	0,63	0,91	1,43	2,27	3,64	5,68
24	0,58	0,83	1,31	2,08	3,33	5,21
25	0,55	0,80	1,26	2,00	3,20	5,00
26	0,53	0,77	1,21	1,92	3,08	4,81
28	0,49	0,71	1,12	1,79	2,86	4,46
30	0,46	0,67	1,05	1,67	2,67	4,17
33	0,42	0,61	0,95	1,52	2,42	3,79

Elaborada por PINHEIRO (1994)
Diâmetros especificados pela NBR 7480.

Tabela A-12 – Classes de agressividade ambiental – CAA (Tabela 6.1 da NBR 6118).

Classe de agressividade ambiental	**Agressividade**	**Classificação geral do tipo de ambiente para efeito de projeto**	**Risco de deterioração da estrutura**
I	Fraca	Rural	Insignificante
		Submersa	
II	Moderada	Urbano[1, 2]	Pequeno
III	Forte	Marinho[1]	Grande
		Industrial[1, 2]	
IV	Muito forte	Industrial[1, 3]	Elevado
		Respingos de maré	

NOTAS: 1) *Pode-se admitir um microclima com uma classe de agressividade mais branda (uma classe acima) para ambientes internos (salas, dormitórios, banheiros, cozinhas e áreas de serviço de apartamentos residenciais e conjuntos comerciais ou ambientes com concreto revestido com argamassa e pintura).*
2) *Pode-se admitir uma classe de agressividade mais branda (uma classe acima) em obras em regiões de clima seco, com umidade média relativa do ar menor ou igual a 65 %, partes da estrutura protegidas de chuva em ambientes predominantemente secos ou regiões onde raramente chove.*
3) *Ambientes quimicamente agressivos, tanques industriais, galvanoplastia, branqueamento em indústrias de celulose e papel, armazéns de fertilizantes, indústrias químicas, elementos em contato com solo contaminado ou água subterrânea contaminada.*

Tabela A-13 – Correspondência entre classe de agressividade ambiental e qualidade do concreto. (Tabela 7.1 da NBR 6118).

Concreto[a)]	**Tipo**[b), c)]	**Classe de agressividade ambiental (CAA)**			
		I	**II**	**III**	**IV**
Relação água/cimento em massa	CA	≤ 0,65	≤ 0,60	≤ 0,55	≤ 0,45
	CP	≤ 0,60	≤ 0,55	≤ 0,50	≤ 0,45
Classe de concreto (NBR 8953)	CA	≥ C20	≥ C25	≥ C30	≥ C40
	CP	≥ C25	≥ C30	≥ C35	≥ C40

"*a) O concreto empregado na execução das estruturas deve cumprir com os requisitos estabelecidos na ABNT NBR 12655.*
b) CA corresponde a componentes e elementos estruturais de concreto armado.
c) CP corresponde a componentes e elementos estruturais de concreto protendido."

Tabela A-14 – Correspondência entre a classe de agressividade ambiental e o cobrimento nominal para Δc = 10 mm.
(Tabela 7.2 da NBR 6118).

Tipo de estrutura	**Componente ou elemento**	**Classe de agressividade ambiental (CAA)**			
		I	**II**	**III**	**IV**[c]
		Cobrimento nominal (mm)			
Concreto Armado	Laje[b]	20	25	35	45
	Viga[b]/Pilar	25	30	40	50
	Elementos estruturais em contato com o solo[d]	30		40	50
Concreto Protendido[a]	Laje	25	30	40	50
	Viga/Pilar	30	35	45	55

Notas: *"a) Cobrimento nominal da bainha ou dos fios, cabos e cordoalhas. O cobrimento da armadura passiva deve respeitar os cobrimentos para concreto armado.*
b) Para a face superior de lajes e vigas que serão revestidas com argamassa de contrapiso, com revestimentos finais secos tipo carpete e madeira, com argamassa de revestimento e acabamento, como pisos de elevado desempenho, pisos cerâmicos, pisos asfálticos e outros, as exigências desta Tabela podem ser substituídas pelas de 7.4.7.5, respeitado um cobrimento nominal $\geq$ 15 mm.
c) Nas superfícies expostas a ambientes agressivos, como reservatórios, estações de tratamento de água e esgoto, condutos de esgoto, canaletas de efluentes e outras obras em ambientes química e intensamente agressivos, devem ser atendidos os cobrimentos da classe de agressividade IV.
d) No trecho dos pilares em contato com o solo junto aos elementos de fundação, a armadura deve ter cobrimento nominal $\geq$ 45 mm."

ANEXO B - ARQUIVOS DE DADOS E RESULTADOS DOS PROGRAMAS PPLAN4 E GPLAN4

B1) ARQUIVO DE DADOS DA GRELHA DO EXEMPLO 1

```
OPTE,2,2,2,2,2,
TORCAO
UNESP - DISC. CONCRETO II
TORÇÃO - EXEMPLO 1
NO
    1,165,0,
    2,0,95,
    3,165,95,
RES
    2,1,1,1,
BAR
    1,1,3,1,1,
    2,2,3,2,1,
PROP
    1,1,1000,208333,100,50,
    2,1,1750,364583,405169,50,
MATL
    1,2415,1006.3,
FIMG
CARR1
CBR
    1,1,-.025,1,
    2,1,-.04375,1,
CNO
    1,-50,
FIMC
FIME
```

B2) RESULTADOS DA GRELHA DO EXEMPLO 1

```
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SAO CARLOS - USP
SISTEMA ANSER - ANALISE DE SISTEMAS ESTRUTURAIS RETICULADOS
PROGRAMA GPLAN4 - ANALISE DE GRELHAS - VERSAO FEV/92

PROJETO: TORCAO
CLIENTE: UNESP - DISC. CONCRETO II
============================
GRELHA: TORÇÃO - EXEMPLO 1
============================
==============================================================================
COORDENADAS E RESTRICOES NODAIS

NO         COORD X        COORD Y         RESTR Z      RESTR X      RESTR Y
==============================================================================

  1        165.000           .000            0            0            0
  2           .000         95.000            1            1            1
  3        165.000         95.000            0            0            0

==============================================================================
CARACTERISTICAS DAS BARRAS

            NO    ROT       NO    ROT                                COSSENO
BARRA     INIC   INIC      FIN    FIN    PROP     COMPRIMENTO        DIRETOR
==============================================================================

    1        1      0        3      0       1          95.000          .0000
```

```
    2        2      0        3      0       2         165.000        1.0000

==============================================================================
PROPRIEDADES DAS BARRAS

PROP     MAT           AREA         I FLEXAO         I TORCAO        ALTURA
==============================================================================

 1         1     .10000E+04       .20833E+06       .10000E+03         50.00
 2         1     .17500E+04       .36458E+06       .40517E+06         50.00

==============================================================================
PROPRIEDADES DOS MATERIAIS

MAT           MOD LONG          MOD TRANS          PESO ESP       COEF TERM
==============================================================================

 1         .241500E+04        .100630E+04        .00000E+00       .0000E+00

------------------------------------------------------------------------------
GERACAO DE CARGAS EM BARRAS

BARRA   TIPO       CARGA I       CARGA F     REL C/L     REL I/L      IDENT
------------------------------------------------------------------------------

   1       1        -.0250        -.0250       1.000        .000       CBR
   2       1        -.0437        -.0437       1.000        .000       CBR
------------------------------------------------------------------------------
GERACAO DE CARGAS NODAIS

NO              FORCA Z          MOMENTO X          MOMENTO Y         IDENT
------------------------------------------------------------------------------

  1             -50.000               .000               .000          CNO

------------------------------------------------------------------------------
ESTATISTICA DOS DADOS DO CARREGAMENTO
------------------------------------------------------------------------------

NUMERO DE NOS CARREGADOS.............................................   1
NUMERO DE NOS DESCARREGADOS..........................................   2
NUMERO DE BARRAS CARREGADAS (EXCETO PESO PROPRIO) ...................   2
NUMERO DE BARRAS DESCARREGADAS (EXCETO PESO PROPRIO) ................   0
SOMATORIO DAS FORCAS TRANSVERSAIS ATUANTES...................      -59.594

==============================================================================
DESLOCAMENTOS NODAIS

NO               DESLOC Z                ROTACAO X                ROTACAO Y
==============================================================================

  1             -.3095357                .0024235                 .0008469
  2              .0000000                .0000000                 .0000000
  3             -.0936757                .0019679                 .0008469

==============================================================================
ESFORCOS NAS EXTREMIDADES DAS BARRAS

BARRA          NO          CORTANTE             M FLETOR           M TORCOR
==============================================================================

   1            1           -50.000                -.005               .000
                3           -52.375            -4862.803               .000

   2            2            59.594            -9237.424           4862.807
                3            52.375                 .000           4862.807

==============================================================================
```

```
  RESULTANTES NODAIS

NO                FORCA Z                MOMENTO X                MOMENTO Y
==========================================================================

  1                 .000                     .005                     .000
  2               59.594               -4862.807               -9237.424
  3                 .000                     .004                     .000

SOMATORIO DAS REACOES TRANSVERSAIS ..........................       59.594
SOMATORIO DAS FORCAS TRANSVERSAIS ATUANTES ..................      -59.594
ERRO PERCENTUAL .............................................  -.0000192 %

==========================================================================
ESFORCOS AO LONGO DAS BARRAS

BARRA      REL X/L          CORTANTE            M FLETOR           M TORCOR
==========================================================================

   1          0/10           -50.000               -.005               .000
   1          1/10           -50.237            -476.132               .000
   1          2/10           -50.475            -954.515               .000
   1          3/10           -50.712           -1435.154               .000
   1          4/10           -50.950           -1918.049               .000
   1          5/10           -51.187           -2403.201               .000
   1          6/10           -51.425           -2890.609               .000
   1          7/10           -51.662           -3380.273               .000
   1          8/10           -51.900           -3872.194               .000
   1          9/10           -52.137           -4366.370               .000
   1         10/10           -52.375           -4862.803               .000

   2          0/10            59.594           -9237.424           4862.807
   2          1/10            58.872           -8260.082           4862.807
   2          2/10            58.150           -7294.651           4862.807
   2          3/10            57.428           -6341.132           4862.807
   2          4/10            56.706           -5399.523           4862.807
   2          5/10            55.984           -4469.825           4862.807
   2          6/10            55.263           -3552.038           4862.807
   2          7/10            54.541           -2646.162           4862.807
   2          8/10            53.819           -1752.197           4862.807
   2          9/10            53.097            -870.142           4862.807
   2         10/10            52.375                .001           4862.807

- Analise completa - fim do processamento
```

B3) ARQUIVO DE DADOS DA GRELHA DO EXEMPLO 3

```
OPTE,2,2,2,2,2,
UNESP - BAURU. TORÇÃO EM VIGAS
EXEMPLO 3
GRELHA PAV.
NOGP
    1,5,1,0,0,1438,0,
    6,10,5,0,523,1438,523,
NOGL
    11,12,1,1438,807,1243.5,926.5,
    13,15,1,0,1046,719,1046,
NO
    16,1049,1046,
RESG
    1,5,4,1,2,2,0,2043418,2043418,
    6,10,4,1,0,2,0,0,3226568,
    3,15,12,1,2,0,0,8043840,
RES
    13,1,2,2,0,2043418,2043418,
    8,1,
    16,1,
```

```
BARG
    1,4,1,1,1,2,1,1,1,
    5,8,1,6,1,7,1,2,1,
    9,11,1,13,1,14,1,1,1,
    12,13,1,16,-4,12,-1,3,1,
    16,17,1,1,5,6,7,4,1,
    18,19,1,3,5,8,7,4,1,
BAR
    14,11,10,3,1,
    15,10,5,1,1,
PROP
    1,1,1140,342000,100,60,
    2,1,1330,543083,100,70,
    3,1,1140,342000,109470,60,
    4,1,855,144281,100,45,
MATL
    1,3528,1470,
FIMG
CARR1
CBRG
    1,4,1,1,-.2504,1,
    5,8,1,1,-.4003,1,
    9,11,1,1,-.2504,1,
    14,15,1,1,-.1217,1,
    16,17,1,1,-.1194,1,
    18,19,1,1,-.1357,1,
CBR
    12,1,-.2372,1,
    13,1,-.2009,1,
FIMC
FIME
```

B4) RESULTADOS DA GRELHA DO EXEMPLO 3

```
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SAO CARLOS - USP
SISTEMA ANSER - ANALISE DE SISTEMAS ESTRUTURAIS RETICULADOS
PROGRAMA GPLAN4 - ANALISE DE GRELHAS - VERSAO FEV/92

PROJETO: UNESP - BAURU. TORÇÃO EM VIGAS
CLIENTE: EXEMPLO 3

============================
GRELHA: GRELHA PAV.
============================

==============================================================================
COORDENADAS E RESTRICOES NODAIS

NO         COORD X        COORD Y         RESTR Z      RESTR X      RESTR Y
==============================================================================

  1           .000           .000      .10000E+38   .20434E+07   .20434E+07
  2        359.500           .000            0            0            0
  3        719.000           .000      .10000E+38   .80438E+07   .00000E+00
  4       1078.500           .000            0            0            0
  5       1438.000           .000      .10000E+38   .20434E+07   .20434E+07
  6           .000        523.000      .10000E+38   .00000E+00   .32266E+07
  7        359.500        523.000            0            0            0
  8        719.000        523.000            1            0            0
  9       1078.500        523.000            0            0            0
 10       1438.000        523.000      .10000E+38   .00000E+00   .32266E+07
 11       1438.000        807.000            0            0            0
 12       1243.500        926.500            0            0            0
 13           .000       1046.000      .10000E+38   .20434E+07   .20434E+07
 14        359.500       1046.000            0            0            0
 15        719.000       1046.000      .10000E+38   .80438E+07   .00000E+00
 16       1049.000       1046.000            1            0            0
```

CARACTERISTICAS DAS BARRAS

BARRA	NO INIC	ROT INIC	NO FIN	ROT FIN	PROP	COMPRIMENTO	COSSENO DIRETOR
1	1	0	2	0	1	359.500	1.0000
2	2	0	3	0	1	359.500	1.0000
3	3	0	4	0	1	359.500	1.0000
4	4	0	5	0	1	359.500	1.0000
5	6	0	7	0	2	359.500	1.0000
6	7	0	8	0	2	359.500	1.0000
7	8	0	9	0	2	359.500	1.0000
8	9	0	10	0	2	359.500	1.0000
9	13	0	14	0	1	359.500	1.0000
10	14	0	15	0	1	359.500	1.0000
11	15	0	16	0	1	330.000	1.0000
12	16	0	12	0	3	228.277	.8520
13	12	0	11	0	3	228.277	.8520
14	11	0	10	0	3	284.000	.0000
15	10	0	5	0	1	523.000	.0000
16	1	0	6	0	4	523.000	.0000
17	6	0	13	0	4	523.000	.0000
18	3	0	8	0	4	523.000	.0000
19	8	0	15	0	4	523.000	.0000

PROPRIEDADES DAS BARRAS

PROP	MAT	AREA	I FLEXAO	I TORCAO	ALTURA
1	1	.11400E+04	.34200E+06	.10000E+03	60.00
2	1	.13300E+04	.54308E+06	.10000E+03	70.00
3	1	.11400E+04	.34200E+06	.10947E+06	60.00
4	1	.85500E+03	.14428E+06	.10000E+03	45.00

PROPRIEDADES DOS MATERIAIS

MAT	MOD LONG	MOD TRANS	PESO ESP	COEF TERM
1	.352800E+04	.147000E+04	.00000E+00	.0000E+00

GERACAO DO CARREGAMENTO: CARR1 (GRELHA: GRELHA PAV.)

GERACAO DE CARGAS EM BARRAS

BARRA	TIPO	CARGA I	CARGA F	REL C/L	REL I/L	IDENT
1	1	-.2504	-.2504	1.000	.000	CBRG
2	1	-.2504	-.2504	1.000	.000	CBRG
3	1	-.2504	-.2504	1.000	.000	CBRG
4	1	-.2504	-.2504	1.000	.000	CBRG
5	1	-.4003	-.4003	1.000	.000	CBRG
6	1	-.4003	-.4003	1.000	.000	CBRG
7	1	-.4003	-.4003	1.000	.000	CBRG
8	1	-.4003	-.4003	1.000	.000	CBRG
9	1	-.2504	-.2504	1.000	.000	CBRG
10	1	-.2504	-.2504	1.000	.000	CBRG
11	1	-.2504	-.2504	1.000	.000	CBRG
14	1	-.1217	-.1217	1.000	.000	CBRG
15	1	-.1217	-.1217	1.000	.000	CBRG

16	1	-.1194	-.1194	1.000	.000	CBRG
17	1	-.1194	-.1194	1.000	.000	CBRG
18	1	-.1357	-.1357	1.000	.000	CBRG
19	1	-.1357	-.1357	1.000	.000	CBRG
12	1	-.2372	-.2372	1.000	.000	CBR
13	1	-.2009	-.2009	1.000	.000	CBR

ESTATISTICA DOS DADOS DO CARREGAMENTO

NUMERO DE NOS CARREGADOS..... 0
NUMERO DE NOS DESCARREGADOS..... 16
NUMERO DE BARRAS CARREGADAS (EXCETO PESO PROPRIO) 19
NUMERO DE BARRAS DESCARREGADAS (EXCETO PESO PROPRIO) 0
SOMATORIO DAS FORCAS TRANSVERSAIS ATUANTES..... -1663.431

==========

DESLOCAMENTOS NODAIS

NO	DESLOC Z	ROTACAO X	ROTACAO Y
1	.0000000	-.0004584	.0012320
2	-.2551578	-.0003588	-.0003080
3	.0000000	-.0002591	.0000000
4	-.2551569	-.0000186	.0003080
5	.0000000	.0002218	-.0012320
6	.0000000	.0000000	.0012551
7	-.2612892	.0000000	-.0003052
8	.0000000	-.0000001	-.0000343
9	-.2427865	-.0005716	.0002880
10	.0000000	-.0011432	-.0011179
11	-.5397304	-.0020637	.0015996
12	-.3743881	.0004008	.0012330
13	.0000000	.0004584	.0015373
14	-.3541721	.0003588	-.0001852
15	.0000000	.0002592	-.0007964
16	.0000000	.0026120	.0004540

==========

ESFORCOS NAS EXTREMIDADES DAS BARRAS

BARRA	NO	CORTANTE	M FLETOR	M TORCOR
1	1	72.766	-2517.474	.041
	2	-17.253	7461.077	.041
2	2	-17.253	7461.076	.041
	3	-107.271	-14922.130	.041
3	3	107.271	-14922.140	.098
	4	17.253	7461.058	.098
4	4	17.253	7461.059	.098
	5	-72.766	-2517.499	.098
5	6	116.761	-4049.563	.000
	7	-27.147	12058.500	.000
6	7	-27.147	12058.500	.000
	8	-171.055	-23568.300	.000
7	8	169.529	-23568.500	-.234
	9	25.622	11509.900	-.234
8	9	25.622	11509.900	-.234
	10	-118.286	-5146.579	-.234

9	13	79.644	-3141.349	-.041
	14	-10.375	9309.855	-.041
10	14	-10.375	9309.856	-.041
	15	-100.393	-10600.700	-.041
11	15	64.081	-10600.480	1.048
	16	-18.551	-3087.902	1.048
12	16	63.972	-2631.553	-1615.580
	12	9.825	5791.522	-1615.580
13	12	9.825	5791.515	-1615.579
	11	-36.036	2799.781	-1615.579
14	11	-36.036	2842.176	1539.775
	10	-70.599	-12300.030	1539.775
15	10	56.209	-12299.790	.032
	5	-7.440	453.422	.032
16	1	26.104	-936.837	.006
	6	-36.342	-3614.002	.006
17	6	36.342	-3614.002	.079
	13	-26.104	-936.837	.079
18	3	32.592	-2084.299	-.010
	8	-38.379	-3597.758	-.010
19	8	38.379	-3597.524	-.214
	15	-32.592	-2084.080	-.214

RESULTANTES NODAIS

NO	FORCA Z	MOMENTO X	MOMENTO Y
1	98.870	936.796	-2517.480
2	.000	.000	.000
3	247.135	2084.242	.000
4	.000	.000	.000
5	80.206	-453.324	2517.467
6	189.445	.000	-4049.636
7	.000	.000	.000
8	417.343	.000	-.002
9	.000	.000	.000
10	245.095	.002	3606.835
11	.000	.000	.000
12	.000	-.005	-.006
13	105.748	-936.796	-3141.269
14	.000	.000	.000
15	197.067	-2085.169	.004
16	82.523	-.004	-.006

SOMATORIO DAS REACOES TRANSVERSAIS 1663.431
SOMATORIO DAS FORCAS TRANSVERSAIS ATUANTES ..... -1663.431
ERRO PERCENTUAL ..... -.0000367 %

ESFORCOS AO LONGO DAS BARRAS

BARRA	REL X/L	CORTANTE	M FLETOR	M TORCOR
1	0/10	72.766	-2517.474	.041
1	1/10	63.764	-63.339	.041
1	2/10	54.762	2067.177	.041

1	3/10	45.761	3874.076	.041
1	4/10	36.759	5357.357	.041
1	5/10	27.757	6517.021	.041
1	6/10	18.755	7353.068	.041
1	7/10	9.753	7865.497	.041
1	8/10	.751	8054.308	.041
1	9/10	-8.251	7919.502	.041
1	10/10	-17.253	7461.078	.041
2	0/10	-17.253	7461.076	.041
2	1/10	-26.255	6679.035	.041
2	2/10	-35.256	5573.375	.041
2	3/10	-44.258	4144.098	.041
2	4/10	-53.260	2391.204	.041
2	5/10	-62.262	314.692	.041
2	6/10	-71.264	-2085.438	.041
2	7/10	-80.266	-4809.186	.041
2	8/10	-89.268	-7856.551	.041
2	9/10	-98.270	-11227.530	.041
2	10/10	-107.271	-14922.130	.041
3	0/10	107.271	-14922.140	.098
3	1/10	98.270	-11227.540	.098
3	2/10	89.268	-7856.560	.098
3	3/10	80.266	-4809.196	.098
3	4/10	71.264	-2085.450	.098
3	5/10	62.262	314.678	.098
3	6/10	53.260	2391.190	.098
3	7/10	44.258	4144.084	.098
3	8/10	35.256	5573.360	.098
3	9/10	26.255	6679.020	.098
3	10/10	17.253	7461.060	.098
4	0/10	17.253	7461.059	.098
4	1/10	8.251	7919.482	.098
4	2/10	-.751	8054.288	.098
4	3/10	-9.753	7865.476	.098
4	4/10	-18.755	7353.046	.098
4	5/10	-27.757	6517.000	.098
4	6/10	-36.759	5357.335	.098
4	7/10	-45.761	3874.053	.098
4	8/10	-54.762	2067.153	.098
4	9/10	-63.764	-63.364	.098
4	10/10	-72.766	-2517.500	.098
5	0/10	116.761	-4049.563	.000
5	1/10	102.370	-110.687	.000
5	2/10	87.979	3310.841	.000
5	3/10	73.588	6215.019	.000
5	4/10	59.198	8601.849	.000
5	5/10	44.807	10471.330	.000
5	6/10	30.416	11823.460	.000
5	7/10	16.025	12658.250	.000
5	8/10	1.635	12975.680	.000
5	9/10	-12.756	12775.770	.000
5	10/10	-27.147	12058.510	.000
6	0/10	-27.147	12058.500	.000
6	1/10	-41.538	10823.890	.000
6	2/10	-55.929	9071.935	.000
6	3/10	-70.319	6802.625	.000
6	4/10	-84.710	4015.969	.000
6	5/10	-99.101	711.963	.000
6	6/10	-113.492	-3109.392	.000
6	7/10	-127.883	-7448.096	.000
6	8/10	-142.273	-12304.150	.000
6	9/10	-156.664	-17677.550	.000
6	10/10	-171.055	-23568.300	.000
7	0/10	169.529	-23568.500	-.234

7	1/10	155.139	-17732.590	-.234
7	2/10	140.748	-12414.030	-.234
7	3/10	126.357	-7612.821	-.234
7	4/10	111.966	-3328.958	-.234
7	5/10	97.576	437.556	-.234
7	6/10	83.185	3686.723	-.234
7	7/10	68.794	6418.541	-.234
7	8/10	54.403	8633.010	-.234
7	9/10	40.012	10330.130	-.234
7	10/10	25.622	11509.900	-.234
8	0/10	25.622	11509.900	-.234
8	1/10	11.231	12172.320	-.234
8	2/10	-3.160	12317.390	-.234
8	3/10	-17.551	11945.120	-.234
8	4/10	-31.942	11055.490	-.234
8	5/10	-46.332	9648.519	-.234
8	6/10	-60.723	7724.196	-.234
8	7/10	-75.114	5282.525	-.234
8	8/10	-89.505	2323.505	-.234
8	9/10	-103.895	-1152.863	-.234
8	10/10	-118.286	-5146.581	-.234
9	0/10	79.644	-3141.349	-.041
9	1/10	70.642	-439.949	-.041
9	2/10	61.640	1937.833	-.041
9	3/10	52.639	3991.997	-.041
9	4/10	43.637	5722.544	-.041
9	5/10	34.635	7129.473	-.041
9	6/10	25.633	8212.785	-.041
9	7/10	16.631	8972.479	-.041
9	8/10	7.629	9408.556	-.041
9	9/10	-1.373	9521.016	-.041
9	10/10	-10.375	9309.857	-.041
10	0/10	-10.375	9309.856	-.041
10	1/10	-19.377	8775.080	-.041
10	2/10	-28.378	7916.686	-.041
10	3/10	-37.380	6734.674	-.041
10	4/10	-46.382	5229.044	-.041
10	5/10	-55.384	3399.798	-.041
10	6/10	-64.386	1246.933	-.041
10	7/10	-73.388	-1229.550	-.041
10	8/10	-82.390	-4029.650	-.041
10	9/10	-91.392	-7153.367	-.041
10	10/10	-100.393	-10600.700	-.041
11	0/10	64.081	-10600.480	1.048
11	1/10	55.818	-8622.139	1.048
11	2/10	47.555	-6916.481	1.048
11	3/10	39.292	-5483.509	1.048
11	4/10	31.029	-4323.223	1.048
11	5/10	22.765	-3435.622	1.048
11	6/10	14.502	-2820.707	1.048
11	7/10	6.239	-2478.477	1.048
11	8/10	-2.024	-2408.932	1.048
11	9/10	-10.287	-2612.074	1.048
11	10/10	-18.551	-3087.901	1.048
12	0/10	63.972	-2631.553	-1615.580
12	1/10	58.557	-1233.018	-1615.580
12	2/10	53.143	41.911	-1615.580
12	3/10	47.728	1193.233	-1615.580
12	4/10	42.313	2220.950	-1615.580
12	5/10	36.898	3125.061	-1615.580
12	6/10	31.484	3905.565	-1615.580
12	7/10	26.069	4562.464	-1615.580
12	8/10	20.654	5095.756	-1615.580
12	9/10	15.240	5505.443	-1615.580
12	10/10	9.825	5791.523	-1615.580

13	0/10	9.825	5791.515	-1615.579
13	1/10	5.239	5963.446	-1615.579
13	2/10	.653	6030.688	-1615.579
13	3/10	-3.934	5993.239	-1615.579
13	4/10	-8.520	5851.101	-1615.579
13	5/10	-13.106	5604.272	-1615.579
13	6/10	-17.692	5252.754	-1615.579
13	7/10	-22.278	4796.546	-1615.579
13	8/10	-26.864	4235.647	-1615.579
13	9/10	-31.450	3570.059	-1615.579
13	10/10	-36.036	2799.781	-1615.579
14	0/10	-36.036	2842.176	1539.775
14	1/10	-39.493	1769.668	1539.775
14	2/10	-42.949	599.002	1539.775
14	3/10	-46.405	-669.823	1539.775
14	4/10	-49.861	-2036.806	1539.775
14	5/10	-53.318	-3501.947	1539.775
14	6/10	-56.774	-5065.247	1539.775
14	7/10	-60.230	-6726.705	1539.775
14	8/10	-63.686	-8486.321	1539.775
14	9/10	-67.143	-10344.100	1539.775
14	10/10	-70.599	-12300.030	1539.775
15	0/10	56.209	-12299.790	.032
15	1/10	49.844	-9526.490	.032
15	2/10	43.479	-7086.072	.032
15	3/10	37.115	-4978.538	.032
15	4/10	30.750	-3203.889	.032
15	5/10	24.385	-1762.126	.032
15	6/10	18.020	-653.246	.032
15	7/10	11.655	122.748	.032
15	8/10	5.290	565.858	.032
15	9/10	-1.075	676.083	.032
15	10/10	-7.440	453.424	.032
16	0/10	26.104	-936.837	.006
16	1/10	19.860	265.118	.006
16	2/10	13.615	1140.479	.006
16	3/10	7.370	1689.247	.006
16	4/10	1.126	1911.421	.006
16	5/10	-5.119	1807.001	.006
16	6/10	-11.363	1375.988	.006
16	7/10	-17.608	618.380	.006
16	8/10	-23.853	-465.820	.006
16	9/10	-30.097	-1876.615	.006
16	10/10	-36.342	-3614.002	.006
17	0/10	36.342	-3614.002	.079
17	1/10	30.097	-1876.614	.079
17	2/10	23.853	-465.820	.079
17	3/10	17.608	618.381	.079
17	4/10	11.363	1375.988	.079
17	5/10	5.119	1807.001	.079
17	6/10	-1.126	1911.421	.079
17	7/10	-7.370	1689.247	.079
17	8/10	-13.615	1140.480	.079
17	9/10	-19.860	265.118	.079
17	10/10	-26.104	-936.836	.079
18	0/10	32.592	-2084.299	-.010
18	1/10	25.495	-565.340	-.010
18	2/10	18.398	582.440	-.010
18	3/10	11.300	1359.041	-.010
18	4/10	4.203	1764.463	-.010
18	5/10	-2.894	1798.707	-.010
18	6/10	-9.991	1461.772	-.010
18	7/10	-17.088	753.658	-.010
18	8/10	-24.185	-325.635	-.010

```
  18          9/10          -31.282          -1776.108             -.010
  18         10/10          -38.379          -3597.758             -.010

  19          0/10           38.379          -3597.524             -.214
  19          1/10           31.282          -1775.875             -.214
  19          2/10           24.185           -325.405             -.214
  19          3/10           17.088            753.887             -.214
  19          4/10            9.991           1462.000             -.214
  19          5/10            2.894           1798.934             -.214
  19          6/10           -4.203           1764.689             -.214
  19          7/10          -11.300           1359.265             -.214
  19          8/10          -18.398            582.662             -.214
  19          9/10          -25.495           -565.120             -.214
  19         10/10          -32.592          -2084.080             -.214

- Analise completa - fim do processamento
```

B5) ARQUIVO DE DADOS DO EXEMPLO 3 - VIGA VS1 ENTRE OS PILARES P2 E P3

```
OPTE,2,2,2,2,2,
UNESP, BAURU/SP – DISC. CONCRETO II - TORÇÃO
MOMENTO POSITIVO ENTRE OS PILARES P2 E P3, COM ENGASTE NO PILAR P2
VS1 (19 x 60)
NOGL
    1,2,1,0,0,330,0,
RES
    1,1,1,1,
    2,1,1,
BAR
    1,1,2,1,1,
PROP
    1,1,1140,342000,60,
MATL
    1,3528,
FIMG
CARR1
CBR
    1,1,-0.2504,1,
FIMC
FIME
```

B6) RESULTADOS DO EXEMPLO 3 - VIGA VS1 ENTRE OS PILARES P2 E P3

```
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SAO CARLOS
SISTEMA ANSER - ANALISE DE SISTEMAS ESTRUTURAIS RETICULADOS
PROGRAMA PPLAN4 - ANALISE DE PORTICOS PLANOS - VERSAO FEV/92

PROJETO: UNESP, BAURU/SP – DISC. CONCRETO II - TORÇÃO
CLIENTE: MOMENTO POSITIVO ENTRE OS PILARES P2 E P3, COM ENGASTE NO PI

============================
PORTICO: VS1 (19 x 60)
============================

==============================================================================
COORDENADAS E RESTRICOES NODAIS

NO         COORD X        COORD Y         RESTR X      RESTR Y      RESTR R
==============================================================================

  1           .000           .000            1            1            1
  2        330.000           .000            1            1            0
```

```
==============================================================================
CARACTERISTICAS DAS BARRAS

            NO    ROT       NO    ROT                                COSSENO
BARRA     INIC   INIC      FIN    FIN    PROP     COMPRIMENTO       DIRETOR
==============================================================================

    1        1      0        2      0       1         330.000        1.0000

==============================================================================
PROPRIEDADES DAS BARRAS

PROP     MAT           AREA           I FLEXAO         ALTURA          TEMP
==============================================================================

   1       1     .11400E+04         .34200E+06          60.00           .00

==============================================================================
PROPRIEDADES DOS MATERIAIS

MAT                  MOD LONG               PESO ESP              COEF TERM
==============================================================================

 1                .352800E+04            .00000E+00            .00000E+00


------------------------------------------------------------------------------
GERACAO DE CARGAS EM BARRAS

BARRA     TIPO      INTENSIDADE        REL C/L        REL I/L         IDENT
------------------------------------------------------------------------------

   1         1           -.2504          1.000           .000           CBR

------------------------------------------------------------------------------
ESTATISTICA DOS DADOS DO CARREGAMENTO
------------------------------------------------------------------------------

NUMERO DE NOS CARREGADOS.................................................   0
NUMERO DE NOS DESCARREGADOS..............................................   2
NUMERO DE BARRAS CARREGADAS (EXCETO PESO PROPRIO) .......................   1
NUMERO DE BARRAS DESCARREGADAS (EXCETO PESO PROPRIO) ....................   0
SOMATORIO DAS FORCAS SEGUNDO O EIXO X...........................        .000
SOMATORIO DAS FORCAS SEGUNDO O EIXO Y...........................     -82.632

==============================================================================
DESLOCAMENTOS NODAIS

NO                DESLOC X                DESLOC Y                  ROTACAO
==============================================================================

  1              .0000000                .0000000                 .0000000
  2              .0000000                .0000000                -.0001554

==============================================================================
ESFORCOS NAS EXTREMIDADES DAS BARRAS

BARRA          NO             NORMAL             CORTANTE           M FLETOR
==============================================================================

   1            1              .000               51.645          -3408.570
                2              .000              -30.987               .000

==============================================================================
RESULTANTES NODAIS

NO                RESULT X                RESULT Y                  MOMENTO
==============================================================================

  1                  .000                   51.645                -3408.570
```

```
  2                .000                  30.987                    .000

SOMATORIO DAS REACOES SEGUNDO O EIXO Y.......................      82.632
SOMATORIO DAS FORCAS ATUANTES SEGUNDO O EIXO Y...............     -82.632
ERRO PERCENTUAL .............................................  .0000000 %

==========================================================================
ESFORCOS AO LONGO DAS BARRAS

BARRA      REL X/L            NORMAL            CORTANTE           M FLETOR
==========================================================================

   1          0/10              .000              51.645          -3408.570
   1          1/10              .000              43.382          -1840.628
   1          2/10              .000              35.119           -545.371
   1          3/10              .000              26.855            477.200
   1          4/10              .000              18.592           1227.085
   1          5/10              .000              10.329           1704.285
   1          6/10              .000               2.066           1908.799
   1          7/10              .000              -6.197           1840.628
   1          8/10              .000             -14.461           1499.771
   1          9/10              .000             -22.724            886.229
   1         10/10              .000             -30.987               .000

- Analise completa - fim do processamento -
```

B7) ARQUIVO DE DADOS DO EXEMPLO 3 - VIGA VS6 ENTRE OS PILARES P9 E P6

```
OPTE,2,2,2,2,2,
UNESP, BAURU/SP – DISC. CONCRETO II - TORÇÃO
MOMENTO POSITIVO ENTRE OS PILARES P9 E P6
VS6 (19 x 60)
NOGL
    1,2,1,0,0,523,0,
RES
    1,1,1,2,0,0,2043418,
    2,1,1,1,
BAR
    1,1,2,1,1,
PROP
    1,1,1140,342000,60,
MATL
    1,3528,
FIMG
CARR1
CBR
    1,1,-0.1217,1,
FIMC
FIME
```

B8) RESULTADOS DO EXEMPLO 3 - VIGA VS6 ENTRE OS PILARES P9 E P6

```
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SAO CARLOS
SISTEMA ANSER - ANALISE DE SISTEMAS ESTRUTURAIS RETICULADOS
PROGRAMA PPLAN4 - ANALISE DE PORTICOS PLANOS - VERSAO FEV/92

PROJETO: UNESP, BAURU/SP – DISC. CONCRETO II - TORÇÃO
CLIENTE: MOMENTO POSITIVO ENTRE OS PILARES P9 E P6

============================
PORTICO: VS6 (19 x 60)
============================
```

```
==============================================================================

  COORDENADAS E RESTRICOES NODAIS

NO          COORD X         COORD Y          RESTR X       RESTR Y       RESTR R
==============================================================================

  1            .000            .000       .10000E+38    .10000E+38    .20434E+07
  2         523.000            .000             1             1             1

==============================================================================
CARACTERISTICAS DAS BARRAS

            NO    ROT       NO    ROT                                COSSENO
BARRA     INIC   INIC      FIN    FIN    PROP     COMPRIMENTO        DIRETOR
==============================================================================

    1        1      0        2      0       1         523.000         1.0000

==============================================================================
PROPRIEDADES DAS BARRAS

PROP     MAT           AREA           I FLEXAO          ALTURA           TEMP
==============================================================================

   1       1     .11400E+04         .34200E+06          60.00            .00

==============================================================================
PROPRIEDADES DOS MATERIAIS

MAT                  MOD LONG               PESO ESP              COEF TERM
==============================================================================

 1                .352800E+04             .00000E+00             .00000E+00

------------------------------------------------------------------------------
GERACAO DO CARREGAMENTO: CARR1        ( PORTICO: VS6 (19 x 60)        )
------------------------------------------------------------------------------
------------------------------------------------------------------------------
GERACAO DE CARGAS EM BARRAS

BARRA     TIPO      INTENSIDADE        REL C/L        REL I/L         IDENT
------------------------------------------------------------------------------

   1         1           -.1217          1.000           .000           CBR
------------------------------------------------------------------------------
ESTATISTICA DOS DADOS DO CARREGAMENTO
------------------------------------------------------------------------------
NUMERO DE NOS CARREGADOS.............................................   0
NUMERO DE NOS DESCARREGADOS..........................................   2
NUMERO DE BARRAS CARREGADAS (EXCETO PESO PROPRIO) ...................   1
NUMERO DE BARRAS DESCARREGADAS (EXCETO PESO PROPRIO) ................   0
SOMATORIO DAS FORCAS SEGUNDO O EIXO X...........................       .000
SOMATORIO DAS FORCAS SEGUNDO O EIXO Y...........................    -63.649

==============================================================================
CARREGAMENTO: CARR1        (PORTICO: VS6 (19 x 60)        )
==============================================================================

==============================================================================
DESLOCAMENTOS NODAIS

NO               DESLOC X                 DESLOC Y                  ROTACAO
==============================================================================

  1              .0000000                 .0000000                 .0002461
  2              .0000000                 .0000000                 .0000000

==============================================================================
```

ESFORCOS NAS EXTREMIDADES DAS BARRAS

BARRA	NO	NORMAL	CORTANTE	M FLETOR
1	1	.000	25.311	-502.906
	2	.000	-38.338	-3909.607

RESULTANTES NODAIS

NO	RESULT X	RESULT Y	MOMENTO
1	.000	25.311	-502.906
2	.000	38.338	3909.607

SOMATORIO DAS REACOES SEGUNDO O EIXO Y..... 63.649
SOMATORIO DAS FORCAS ATUANTES SEGUNDO O EIXO Y..... -63.649
ERRO PERCENTUAL ..... .0000000 %

ESFORCOS AO LONGO DAS BARRAS

BARRA	REL X/L	NORMAL	CORTANTE	M FLETOR
1	0/10	.000	25.311	-502.906
1	1/10	.000	18.946	654.405
1	2/10	.000	12.581	1478.832
1	3/10	.000	6.216	1970.374
1	4/10	.000	-.149	2129.031
1	5/10	.000	-6.514	1954.803
1	6/10	.000	-12.879	1447.691
1	7/10	.000	-19.244	607.693
1	8/10	.000	-25.608	-565.188
1	9/10	.000	-31.973	-2070.956
1	10/10	.000	-38.338	-3909.607

- Analise completa - fim do processamento -