

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA**

UNESP - Campus de Bauru/SP  
Departamento de Engenharia Civil e Ambiental

2123 - ESTRUTURAS DE CONCRETO II

**TORÇÃO EM VIGAS DE  
CONCRETO ARMADO**

**Prof. Dr. PAULO SÉRGIO BASTOS**  
([wwwp.feb.unesp.br/pbastos](http://wwwp.feb.unesp.br/pbastos))

Bauru  
Junho/2017

# APRESENTAÇÃO

Esta apostila tem o objetivo de servir como notas de aula na disciplina 2123 – Estruturas de Concreto II, do curso de Engenharia Civil da Universidade Estadual Paulista (UNESP), Campus de Bauru/SP. Para auxiliar no aprendizado encontram-se publicados três videoaulas no **YOUTUBE**, no canal “Paulo Sergio Bastos”.

O texto apresenta as prescrições contidas na NBR 6118/2014 (“*Projeto de estruturas de concreto – Procedimento*”) para o projeto e dimensionamento de vigas de Concreto Armado submetidas à torção.

Inicialmente são apresentadas diversas informações teóricas, como os casos e os valores mais comuns do momento de torção, a torção de equilíbrio e de compatibilidade, noções da torção simples, comportamento das vigas de Concreto Armado sob torção, analogia e formulação para a treliça espacial generalizada, formas de ruptura por torção, etc.

Por último são apresentados três exemplos numéricos de aplicação. Os exemplos são completos e abrangem todos os cálculos necessários para o projeto de uma viga, como o dimensionamento à flexão e à força cortante, a ancoragem nos apoios e a disposição da armadura longitudinal com o “cobrimento” do diagrama de momentos fletores.

Agradecimento a Éderson dos Santos Martins pela confecção de desenhos.

Críticas e sugestões serão bem-vindas.

# SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO .....	1
2. CASOS MAIS COMUNS .....	1
3. CASOS TÍPICOS PARA O MOMENTO DE TORÇÃO .....	3
4. TORÇÃO DE EQUILÍBRIO E DE COMPATIBILIDADE .....	5
5. TORÇÃO SIMPLES (TORÇÃO DE ST. VENANT).....	8
6. TORÇÃO SIMPLES APLICADA A SEÇÕES VAZADAS DE PAREDE FINA .....	10
7. COMPORTAMENTO DAS VIGAS DE CONCRETO ARMADO SUBMETIDAS À TORÇÃO SIMPLES .....	11
8. ANALOGIA DA TRELIÇA ESPACIAL PARA A TORÇÃO SIMPLES .....	13
9. TORÇÃO COMBINADA COM MOMENTO FLETOR E FORÇA CORTANTE .....	14
10. FORMAS DE RUPTURA POR TORÇÃO .....	15
10.1 Ruptura por Tração .....	15
10.2 Ruptura por Compressão.....	15
10.3 Ruptura dos Cantos .....	16
10.4 Ruptura da Ancoragem .....	16
11. TORÇÃO SIMPLES - DEFINIÇÃO DAS FORÇAS E TENSÕES NA TRELIÇA GENERALIZADA .	17
11.1 Diagonais de Compressão .....	17
11.2 Armadura longitudinal .....	18
11.3 Estribos .....	19
12. DIMENSIONAMENTO DE ELEMENTOS LINEARES À TORÇÃO UNIFORME NO ESTADO-LIMITE ÚLTIMO (ELU) SEGUNDO A NBR 6118 .....	20
12.1 Geometria da Seção Resistente .....	20
12.2 Torção de Compatibilidade.....	20
12.3 Torção de Equilíbrio .....	20
12.4 Armadura Mínima.....	22
12.5 Solicitações Combinadas .....	23
12.5.1 Flexão e Torção .....	23
12.5.2 Torção e Força Cortante .....	23
12.6 Fissuração Inclinada da Alma .....	24
12.7 Disposições Construtivas .....	24
12.7.1 Estribos .....	24
12.7.2 Armadura Longitudinal .....	24
13. MOMENTO DE INÉRCIA À TORÇÃO.....	25
14. EXEMPLOS NUMÉRICOS DE APLICAÇÃO .....	25
14.1 Exemplo 1 .....	25
14.2 Exemplo 2 .....	40
14.3 Exemplo 3 .....	57
15. QUESTIONÁRIO .....	83
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	83
BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR.....	84
ANEXO A - TABELAS .....	85
ANEXO B - LISTAGENS DE RESULTADOS DOS PROGRAMAS GPLAN4 E PPLAN4.....	93

## 1. INTRODUÇÃO

Um conjugado que tende a torcer uma peça fazendo-a girar sobre o seu próprio eixo é denominado “momento de torção”, momento torçor ou torque. O caso mais comum de torção ocorre em eixos de transmissão.

A torção simples, torção uniforme ou torção pura (não atuação simultânea com  $M$  e  $V$ ), excetuando os eixos de transmissão, ocorre raramente na prática. Geralmente a torção ocorre combinada com momento fletor e força cortante, mesmo que esses esforços sejam causados apenas pelo peso próprio do elemento estrutural. De modo aproximado, os princípios de dimensionamento para a torção simples são aplicados às vigas com atuação simultânea de momento fletor e força cortante (LEONHARDT e MÖNNIG, 1982).

Nas estruturas de concreto, a ligação monolítica entre as vigas e as lajes e entre vigas apoiadas em outras vigas, dá origem a momentos de torção, que, de modo geral, podem ser desprezados por não serem essenciais ao equilíbrio. Entretanto, no caso da chamada “torção de equilíbrio”, como se verá adiante, a consideração dos momentos torçores é imprescindível para garantir o equilíbrio do elemento estrutural.

Desde o início do século passado numerosos estudos experimentais foram realizados em vigas de Concreto Armado sob solicitação de torção simples. Os resultados dos estudos justificaram o dimensionamento simplificado à torção, considerando-se as vigas com seção vazada (oca) e de parede fina, segundo as equações clássicas da Resistência dos Materiais, formuladas por BREDT.

Assim como feito no dimensionamento de vigas à força cortante, na torção será feita também a analogia com uma treliça, porém espacial. A Treliça Generalizada, com ângulo  $\theta$  variável de inclinação das diagonais comprimidas, é o modelo atualmente mais aceito internacionalmente. Como no dimensionamento para outros tipos de solicitação, as tensões de compressão serão absorvidas pelo concreto e as tensões de tração pelo aço, na forma de duas diferentes armaduras, uma longitudinal e outra transversal (estribos).

A análise da torção em perfis abertos de paredes finas, com aplicação da torção de Vlassov ou Flexo-Torção, não será aqui apresentada por não fazer parte do programa da disciplina na graduação.

## 2. CASOS MAIS COMUNS

Um caso comum de torção em vigas de Concreto Armado ocorre quando existe uma distância entre a linha de ação da carga e o eixo longitudinal da viga, como mostrado na Figura 1 e na Figura 2. Na Figura 1, a viga AB, estando obrigatoriamente engastada na extremidade B da viga BC, aplica nesta um momento de torção, que deve ser obrigatoriamente considerado no equilíbrio da viga BC. Na viga mostrada na Figura 2 a torção existirá se as cargas  $F_1$  e  $F_2$  forem diferentes. Essa situação pode ocorrer durante a fase de construção ou mesmo quando atuarem os carregamentos permanentes e variáveis, se estes forem diferentes nas estruturas que se apoiam na viga em forma de T invertido.

O caso mais comum de torção ocorre com lajes em balanço, engastadas em vigas de apoio, como por exemplo lajes (marquises) para proteção de porta de entrada de barracões, lojas, galpões, etc. (Figura 3 e Figura 4). O fato da laje em balanço não ter continuidade com outras lajes internas à construção faz com que a laje deva estar obrigatoriamente engastada na viga de apoio, de modo que a flexão na laje passa a ser torção na viga. A torção na viga torna-se flexão no pilar, devendo ser considerada no seu dimensionamento.

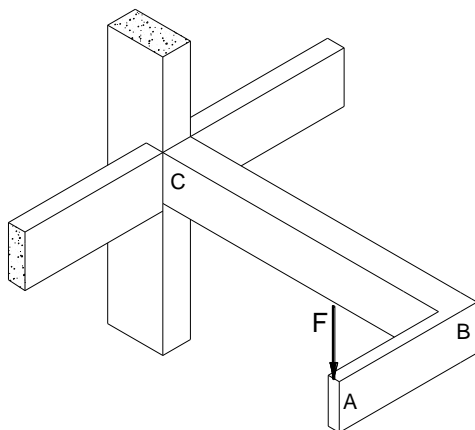


Figura 1 – Viga em balanço com carregamento excêntrico.

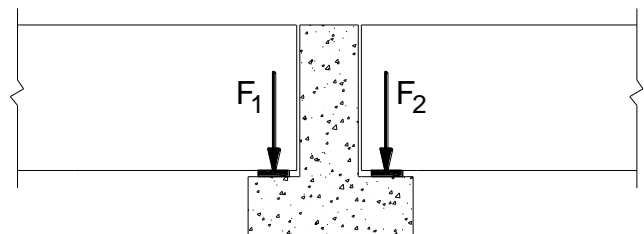


Figura 2 – Viga do tipo T invertido para apoio de estrutura de piso ou de cobertura.

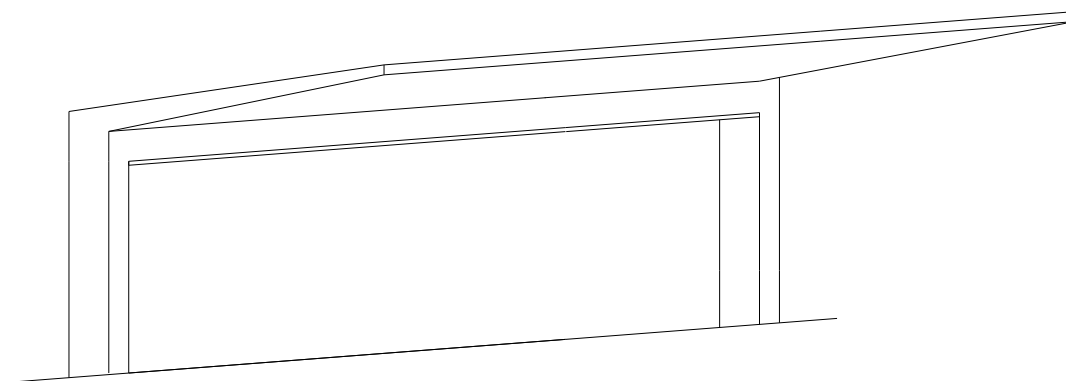


Figura 3 – Torção em viga devido a engastamento de laje em balanço.

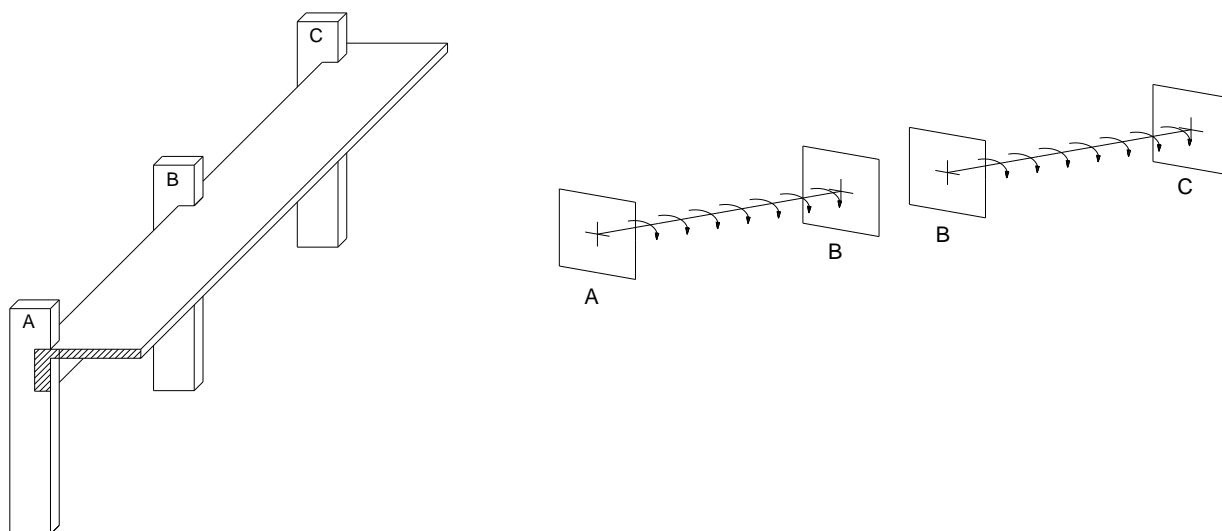


Figura 4 – Viga contínua sob torção por efeito de laje em balanço.

Um outro caso de torção em viga, de certa forma também comum nas construções, ocorre em vigas com mudança de direção, como mostrado na Figura 5. No ponto de mudança de direção um tramo aplica sobre o outro um momento de torção. A torção também ocorre em vigas curvas, com ou sem mudança de direção, como mostrado na Figura 6.

Se a torção for necessária ao equilíbrio da viga e não for apropriadamente considerada no seu dimensionamento, intensa fissuração pode se desenvolver, prejudicando a segurança e a estética da construção.

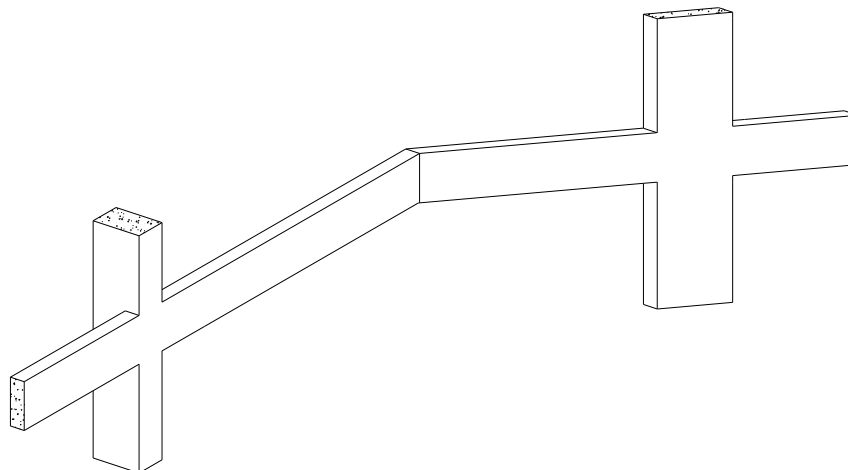


Figura 5 – Torção em viga devido à mudança de direção.



Figura 6 – Vigas curvas e com mudança de direção são solicição por torção.

### 3. CASOS TÍPICOS PARA O MOMENTO DE TORÇÃO

Apresentam-se na Figura 7 até a Figura 11 os valores dos momentos de torção para alguns casos mais comuns na prática das estruturas, onde  $m$  representa o momento torçor externo aplicado,  $T$  o momento de torção solicitante e  $F$  a força concentrada.

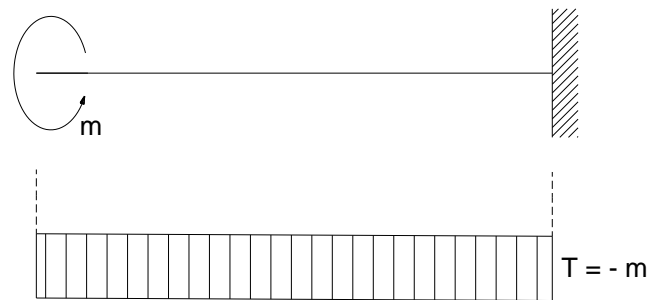


Figura 7 – Momento de torção concentrado aplicado na extremidade de viga em balanço.

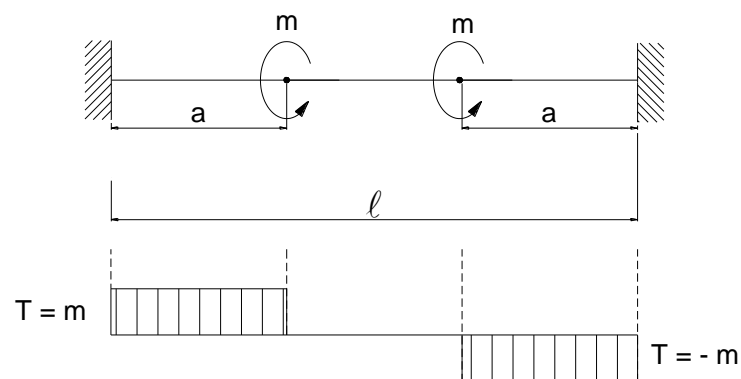


Figura 8 – Momento de torção aplicado à distância  $a$  das extremidades de viga biengastada.

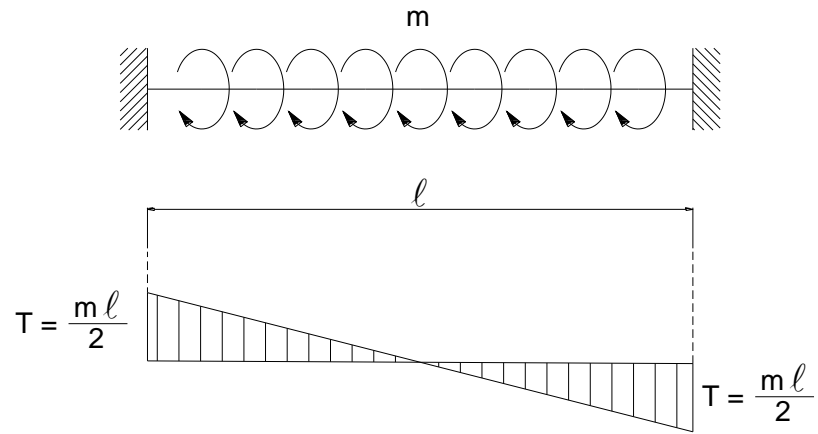


Figura 9 – Momento de torção uniformemente distribuído em viga biengastada.

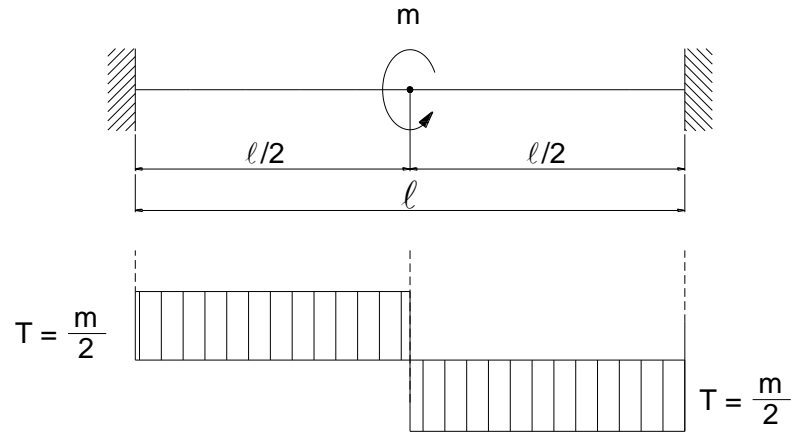


Figura 10 – Momento de torção concentrado aplicado no centro de viga biengastada.

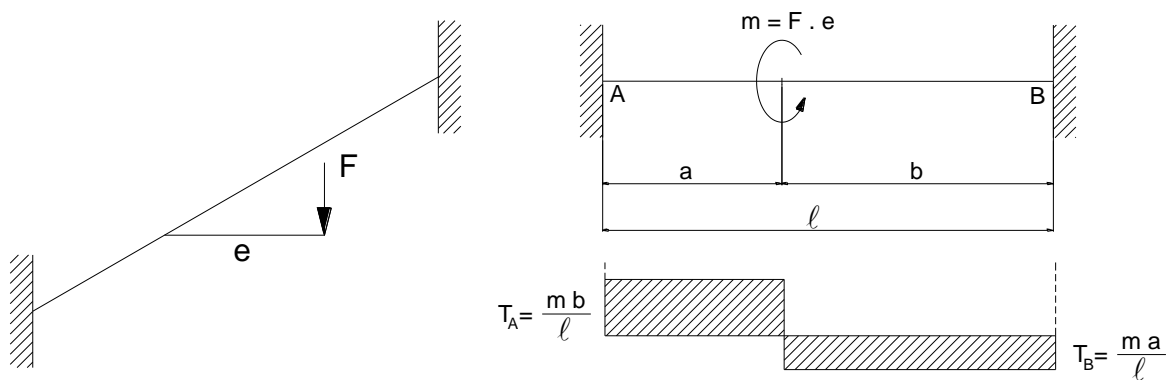


Figura 11 – Momento de torção concentrado aplicado fora do centro do vão de viga biengastada.

#### 4. TORÇÃO DE EQUILÍBRIO E DE COMPATIBILIDADE

A torção nas estruturas de concreto pode ser dividida em duas categorias: torção de equilíbrio e torção de compatibilidade. Na torção de equilíbrio, o momento de torção deve ser obrigatoriamente considerado, pois ele é necessário para o equilíbrio da estrutura. As estruturas mostradas na Figura 1 até a Figura 6 encontram-se solicitadas por torção de equilíbrio, devendo ser obrigatoriamente considerada.

A torção de compatibilidade ocorre comumente nos sistemas estruturais, onde o caso de laje apoiada sobre uma viga de borda é o exemplo mais comum, como mostrado na Figura 12. A laje, ao tentar girar, aplica um momento de torção ( $m_T$ ) na viga, que tende a girar também, sendo impedida pela rigidez à flexão dos pilares. Surgem então momentos torçores solicitantes na viga e momentos fletores nos pilares. Quando a rigidez da viga à torção é pequena comparada à sua rigidez à flexão, a viga fissa e gira, permitindo o giro da laje também. Ocorre então uma compatibilização entre as deformações da viga e da laje, e como consequência os momentos torçores na viga diminuem bastante, podendo ser desprezados.

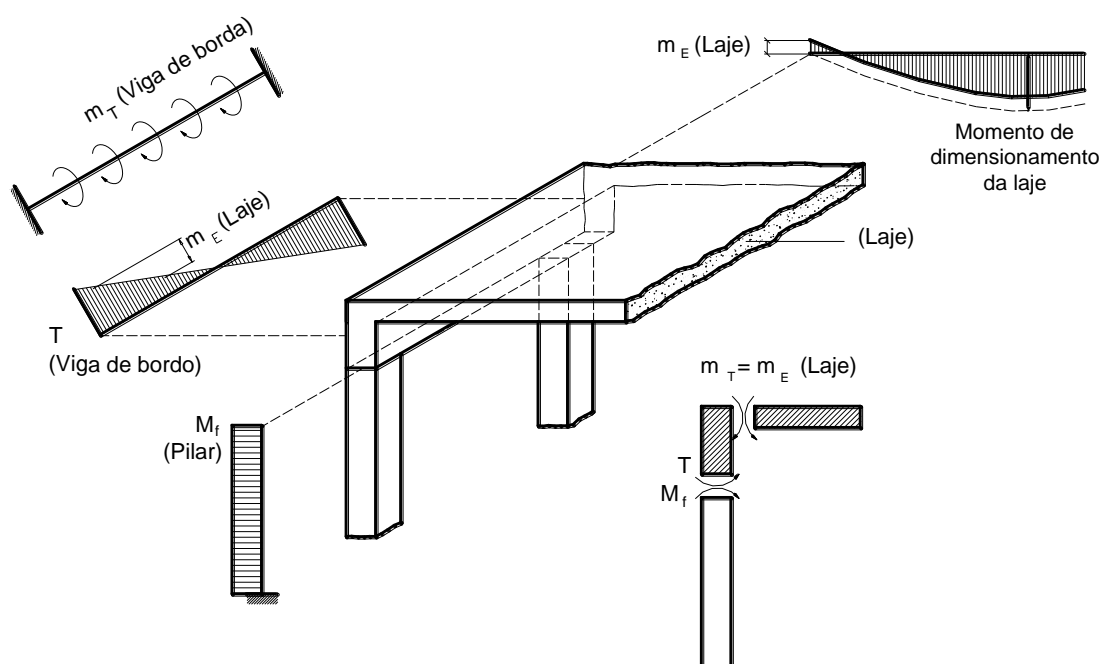


Figura 12 – Torção de compatibilidade de laje com viga de apoio.  
(LEONHARDT e MÖNNIG, 1982).

Um outro exemplo de torção de compatibilidade é aquele mostrado na Figura 13 e na Figura 14. Como se observa na Figura 14, a viga AB apoia-se nas vigas CD e EF.



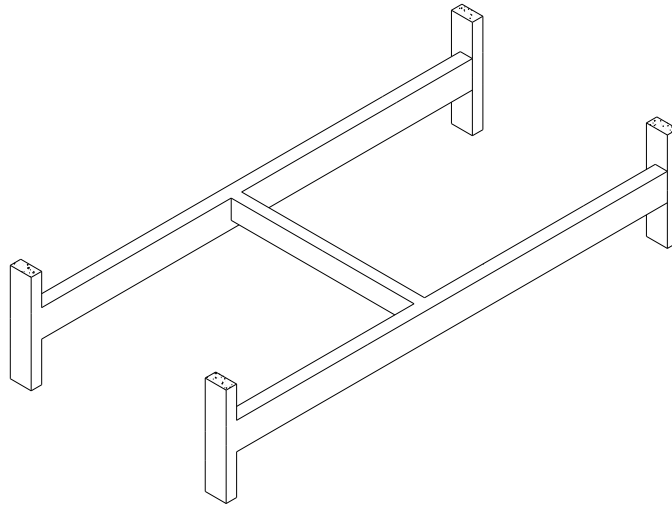


Figura 13 – Esquema das vigas com os pilares.

A Figura 15 mostra o caso das vigas de apoio CD e EF com rigidez à torção elevada. Neste caso não existe total liberdade de rotação para a viga AB nas suas extremidades, o que faz surgir os momentos de engastamento  $M_A$  e  $M_B$ , que, por outro lado, passam a ser momentos torçores concentrados e aplicados em A e B.

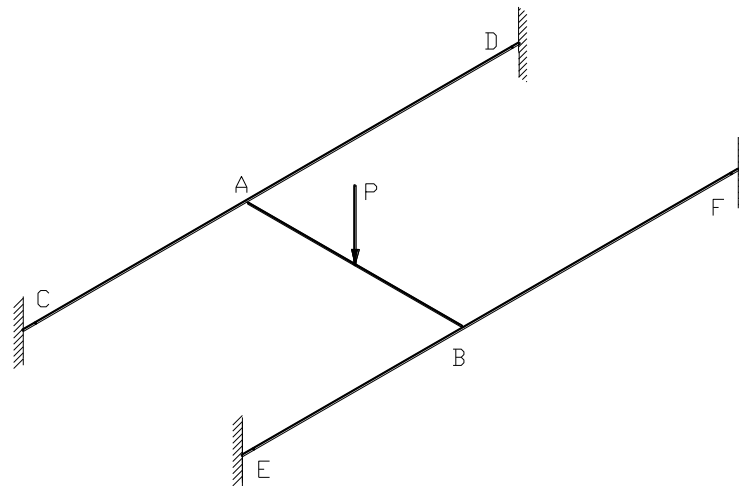


Figura 14 – Esquema estrutural (SÜSSEKIND, 1985).

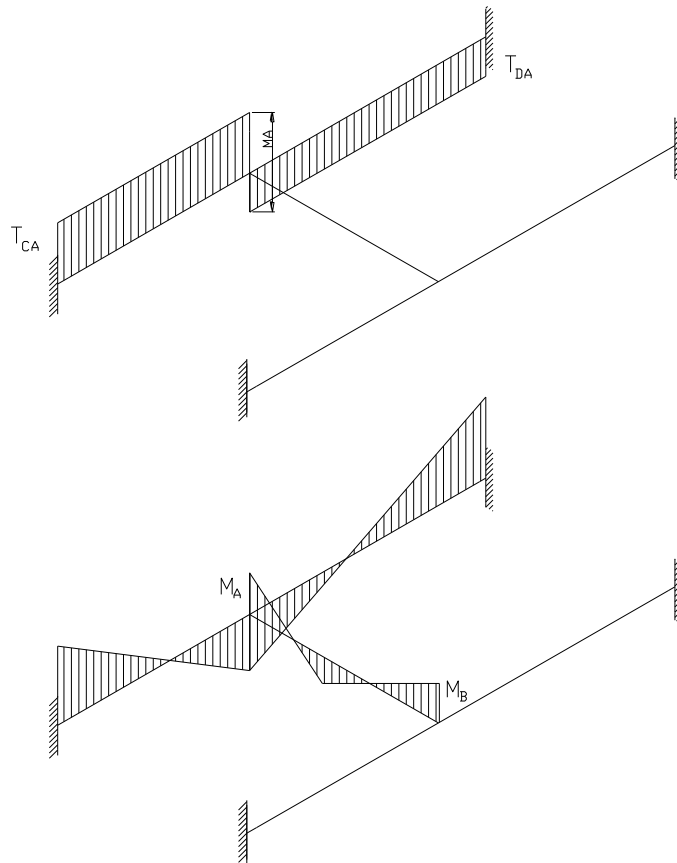


Figura 15 – Caso das vigas de apoio com elevada rigidez à torção.

A intensidade dos momentos fletores e torçores depende das rigidezes relativas das vigas, ou seja, da rigidez à torção das vigas CD e EF e da rigidez à flexão da viga AB. Se a rigidez à torção das vigas CD e EF for zero, a viga AB fica livre para girar em A e B, levando a zero os momentos fletores  $M_A$  e  $M_B$ , e conseqüentemente também os momentos torçores (Figura 16). Nesta análise percebe-se que a torção é conseqüência da compatibilidade de deformações das vigas, daí a chamada “torção de compatibilidade”. Neste caso há o equilíbrio, embora sem se considerar a ligação monolítica da viga AB com as vigas CD e EF.

Por outro lado, sob o efeito do momento de torção a viga irá fissurar, o que acarreta uma significativa diminuição na rigidez da viga à torção. Desse modo, as vigas CD e EF, ao fissurarem por efeito da torção proveniente da viga AB, têm sua rigidez à torção diminuída, diminuindo por conseqüência os momentos  $M_A$  e T, o que leva ao aumento do momento fletor positivo da viga AB.

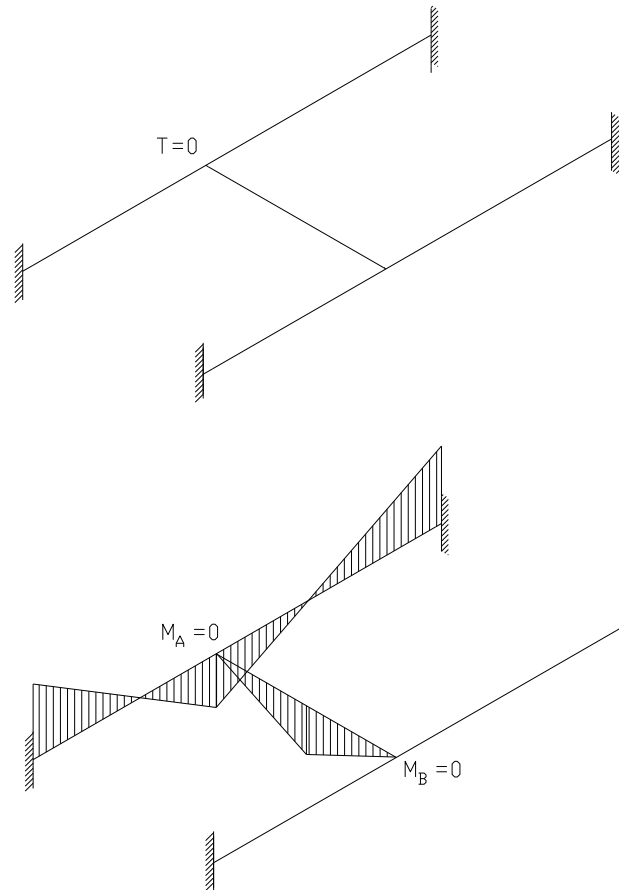


Figura 16 – Caso de pequena rigidez à torção.

Pode-se assim resumir que, “a torção nas vigas deve ser considerada quando for necessária para o equilíbrio (torção de equilíbrio), e pode ser desconsiderada quando for de compatibilidade”.

Considerando-se o pavimento de um edifício constituído por lajes e vigas, além da torção de compatibilidade existente entre as vigas, a ligação monolítica entre as lajes e as vigas, como mostrado na Figura 12, também ocasiona o surgimento de momentos de torção nas vigas, de compatibilidade, não imprescindível ao equilíbrio do sistema, podendo assim serem desprezados também.

Somado a isso, por imposição da arquitetura a largura das vigas varia normalmente de 12 a 20 cm, e para as alturas correntes das vigas (comumente até 60 cm), a rigidez à torção não é significativa, o que leva a valores baixos para a torção de compatibilidade, justificando a sua desconsideração.

Outra análise que se faz é que, se as vigas CD e EF forem livres para girar nas extremidades, o momento de torção  $T$  será zero, ou seja, não existirá o momento de torção. Ou, por outro lado, e o que é mais comum na prática das estruturas, devido à ligação monolítica das vigas CD e EF com os pilares de apoio, se as vigas não podem girar e a rigidez à torção das vigas CD e EF é muito maior que a rigidez à flexão da viga AB, o momento fletor  $M_A$  se aproxima do momento fletor de engastamento. Portanto, os momentos  $T$  e  $M_A$  resultam do giro da viga AB em A e B, que deve ser compatível com o ângulo de torção das vigas CD e EF em A e B.

## 5. TORÇÃO SIMPLES (TORÇÃO DE ST. VENANT)

Numa barra de seção circular, como a indicada na Figura 17, submetida a momento de torção, com empenamento permitido (torção livre), surgem tensões principais inclinadas de  $45^\circ$  e  $135^\circ$  com o eixo longitudinal da barra. As trajetórias das tensões principais desenvolvem-se segundo uma curvatura helicoidal, em torno da barra. A trajetória das tensões principais de tração ocorre na direção da rotação e a compressão na direção contrária, ao longo de todo o perímetro da seção.

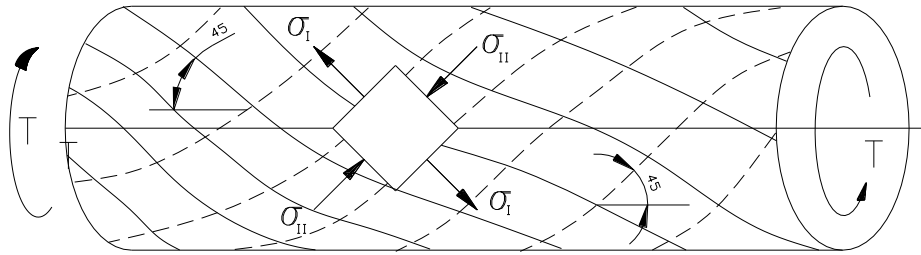


Figura 17 – Trajetórias das tensões principais na seção circular.

Se considerado um estado de tensão segundo a direção dos eixos longitudinal e transversal da seção, o momento de torção provoca o surgimento de tensões de cisalhamento em planos perpendiculares ao eixo da barra circular e em planos longitudinais, simultaneamente, como mostrado na Figura 18, Figura 19 e Figura 20.

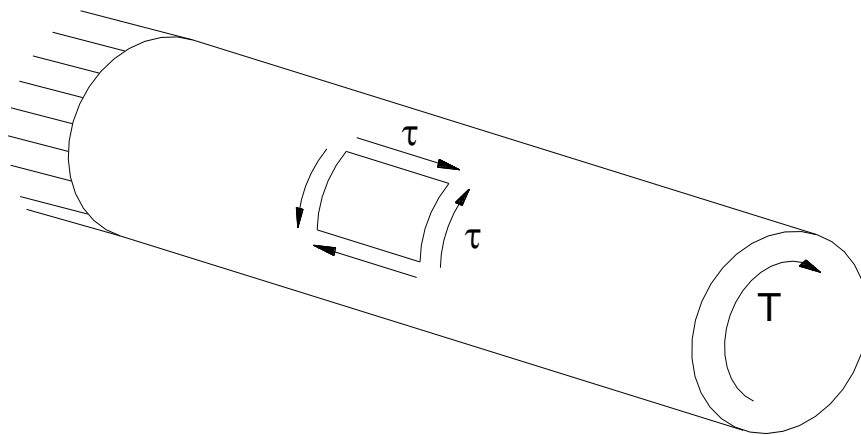


Figura 18 – Tensões de cisalhamento numa barra de seção circular sob torção.

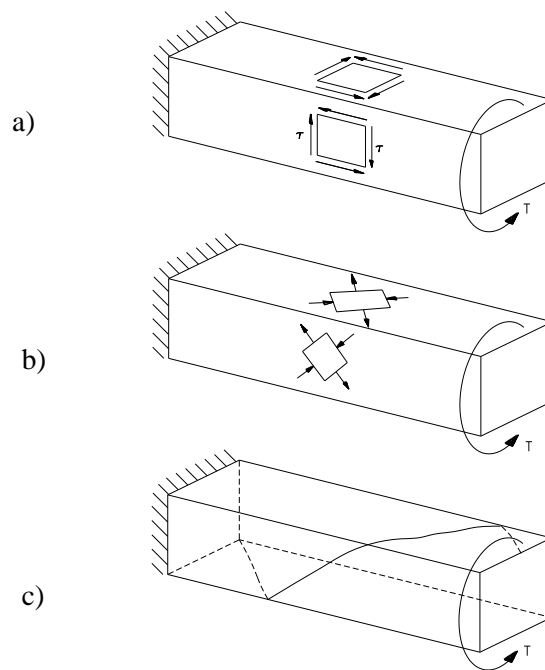


Figura 19 – Tensões devidas à torção: a) tensões de cisalhamento; b) tensões principais de tração e compressão; c) trajetória helicoidal das fissuras. (MACGREGOR, 1997).

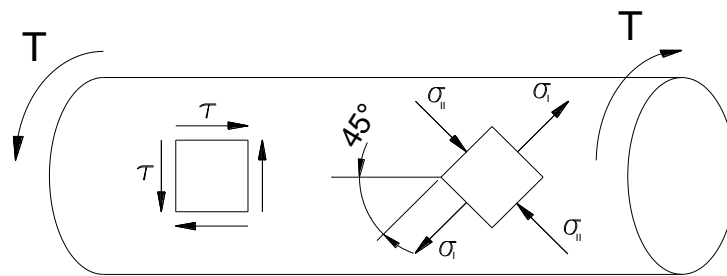


Figura 20 – Tensões de cisalhamento e tensões principais na seção circular.

A distribuição das tensões de cisalhamento em seções transversais circulares e quadradas ocorre como indicado na Figura 21. A tensão de cisalhamento é máxima nas superfícies externas da seção e zero nos vértices e no eixo que passa pelo centro de gravidade.

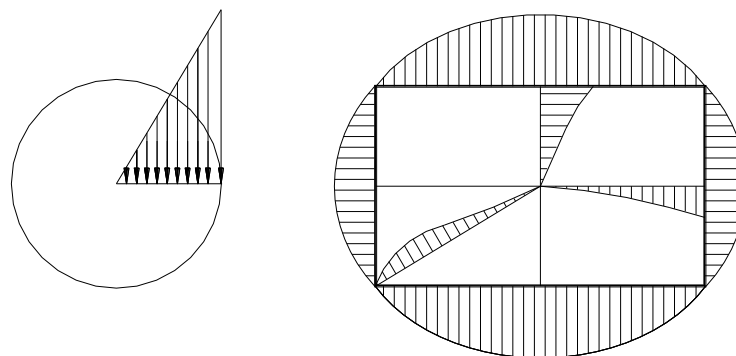


Figura 21 – Variação da tensão de cisalhamento na seção transversal.

Por questão de simplicidade, as vigas de Concreto Armado sob momento de torção são dimensionadas como se fossem ocas e de parede fina. Ao desprezar a parte correspondente à área interna da seção o erro cometido não é significativo nem antieconômico, porque a espessura da casca ou parede é determinada de forma que represente uma seção com grande percentual de resistência ao momento de torção. Este procedimento resulta num acréscimo de segurança que não é excessivo, sendo, portanto, pouco antieconômico.

## 6. TORÇÃO SIMPLES APLICADA A SEÇÕES VAZADAS DE PAREDE FINA

Considere a seção vazada mostrada na Figura 22, com espessura  $t$ , submetida ao momento de torção  $T$ .

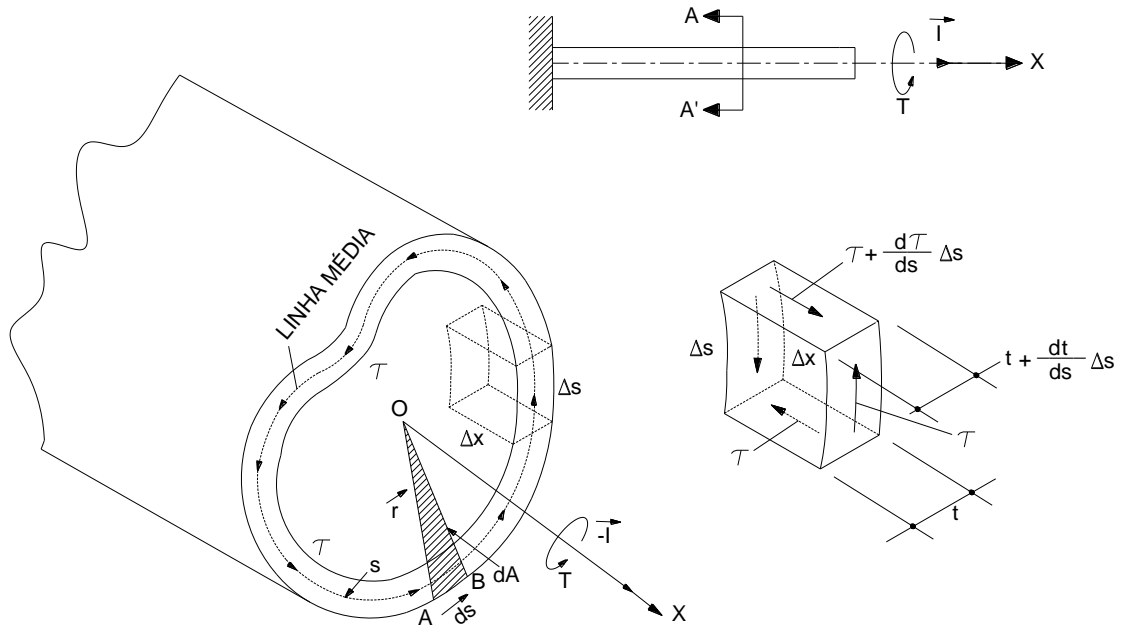


Figura 22 – Seção vazada com parede fina (SÁNCHEZ, 2001).

Do equilíbrio estático da seção tem-se a igualdade da resultante das tensões  $\tau$  com o momento de torção  $T$  que as originou:

$$T = \oint (\tau t ds) r \quad \text{Eq. 1}$$

O produto  $\tau \cdot t$  (fluxo de cisalhamento ou de torção) é constante, e o produto  $ds \cdot r$  é o dobro da área do triângulo  $OAB$  ( $d \cdot A_e$ ), vindo:

$$T = 2 \tau t \oint d A_e \quad \text{Eq. 2}$$

Da Eq. 2 surge a tensão de cisalhamento em qualquer ponto da parede fina, devida ao momento de torção:

$$\tau = \frac{T}{2 t A_e} \quad \text{Eq. 3}$$

com  $A_e$  sendo a área interna compreendida pelo eixo da parede fina, como indicada na Figura 23.

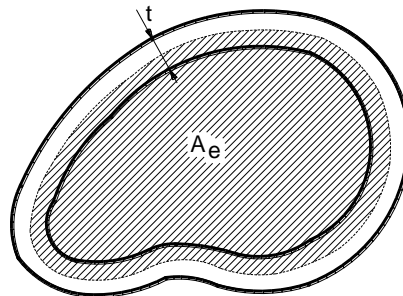


Figura 23 – Área  $A_e$  da seção vazada.

## 7. COMPORTAMENTO DAS VIGAS DE CONCRETO ARMADO SUBMETIDAS À TORÇÃO SIMPLES

LEONHARDT e MÖNNIG (1982) descrevem os resultados de ensaios realizados por MÖRSCH, entre 1904 e 1921. Foram estudados cilindros ocios à torção simples, sem armadura, com armadura

longitudinal, com armadura transversal, com ambas as armaduras e com armadura em forma de hélice, como mostrado na Figura 24.

Os ensaios confirmaram que nas seções de Concreto Armado as tensões principais de tração e de compressão são inclinadas de  $45^\circ$  e com traçado helicoidal. Após o surgimento das fissuras de torção que se desenvolvem em forma de hélice, apenas uma casca externa e com pequena espessura colabora na resistência da seção à torção. Isso ficou evidenciado em ensaios de seções ocas ou cheias com armaduras idênticas, que apresentaram as mesmas deformações e tensões nas armaduras.

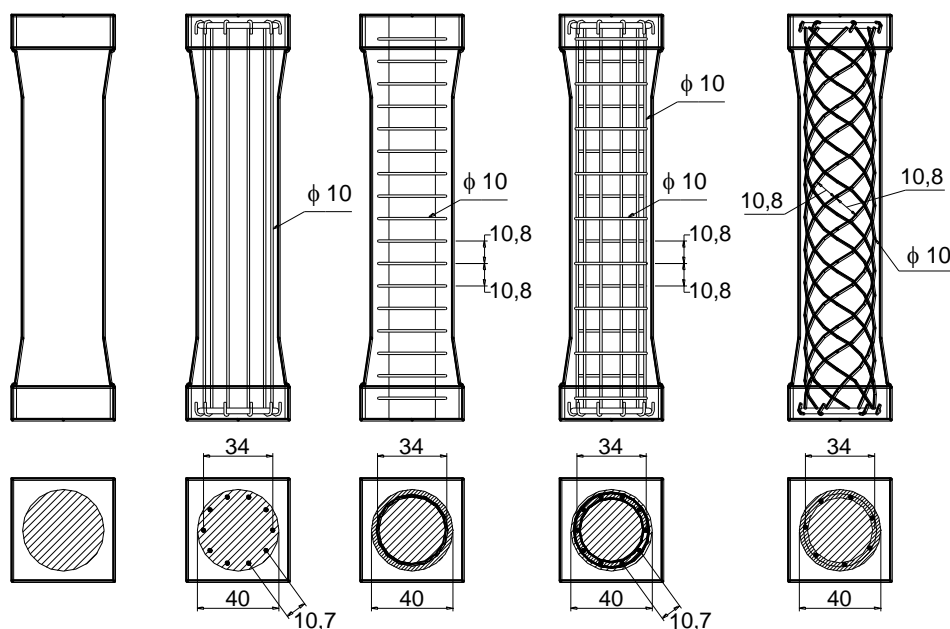


Figura 24 – Seções estudadas por MÖRSCH (LEONHARDT e MÖNNIG, 1982).

A Tabela 1 apresenta os resultados experimentais obtidos, para o momento de fissuração (momento de torção correspondente à primeira fissura) e para o momento de torção na ruptura.

Tabela 1 – Momentos torçores de primeira fissura e de ruptura (kN.cm) de seções ocas ensaiadas por MÖRSCH.

Seção	Momento Torçor de Primeira fissura	Momento Torçor de Ruptura
Sem armaduras	2330	2330
Com armadura longitudinal	2330	2380
Com armadura transversal	2500	2500
Com armaduras longitudinal e transversal	2470	3780
Com armadura helicoidal	2700	> 7000*

\* A máquina de ensaio não levou a seção à ruptura

Os ensaios demonstraram que: na seção oca sem armadura as fissuras são inclinadas a  $45^\circ$  e em forma de hélice; com somente uma armadura, seja longitudinal ou transversal, o aumento de resistência é muito pequeno e desprezível; com duas armaduras a resistência aumentou e, com armadura helicoidal, segundo a trajetória das tensões principais de tração, o aumento de resistência foi muito efetivo. Os valores contidos na Tabela 1 demonstram as observações.

Fissuras inclinadas podem se desenvolver quando a tensão principal de tração alcança a resistência do concreto à tração, levando uma viga não armada à ruptura. Se a viga for armada com barras longitudinais e estribos fechados transversais, a viga pode resistir a um aumento de carga após a fissuração inicial.

## 8. ANALOGIA DA TRELIÇA ESPACIAL PARA A TORÇÃO SIMPLES

Existem hoje basicamente duas teorias muito diferentes com o intuito de explicar o comportamento de uma viga sob torção. Uma delas é chamada de “Flexão Esconsa” (*skew bending theory*), e foi desenvolvida por LESSIG (1959) e atualizada por HSU (1968). A segunda teoria baseia-se na analogia da seção vazada (Teoria de Bredt) com uma treliça espacial, chamada de “Treliza Generalizada”. A teoria foi inicialmente elaborada por RAUSCH em 1929, estando em uso por diversas normas até os dias de hoje.

Como apresentado no item anterior os ensaios experimentais realizados mostraram que as seções cheias de concreto podem ser calculadas como seções vazadas de paredes finas. A Figura 25 mostra o modelo de uma seção cheia fissurada, sob torção simples. As tensões de compressão são resistidas pelo concreto da casca e as tensões de tração são resistidas pelo conjunto armadura longitudinal e armadura transversal (estribos).

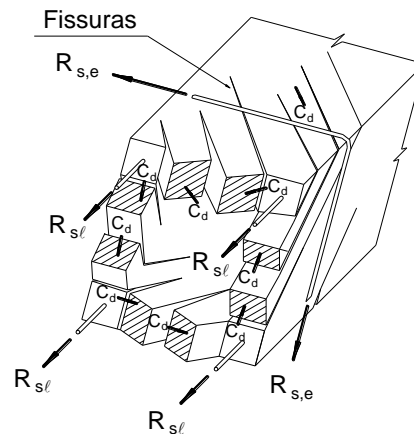


Figura 25 – Modelo resistente para a torção simples em viga de concreto fissurada. (LEONHARDT e MÖNNIG, 1982).

A treliça clássica inicialmente concebida admitia que a viga apresentasse fissuras inclinadas de  $45^\circ$  com o eixo longitudinal (Figura 26). Os banzos paralelos representam a armadura longitudinal, as diagonais comprimidas desenvolvem-se em hélice, com inclinação de  $45^\circ$ , representando as bielas de compressão e os montantes verticais e horizontais representam estribos fechados a  $90^\circ$  com o eixo longitudinal da viga.



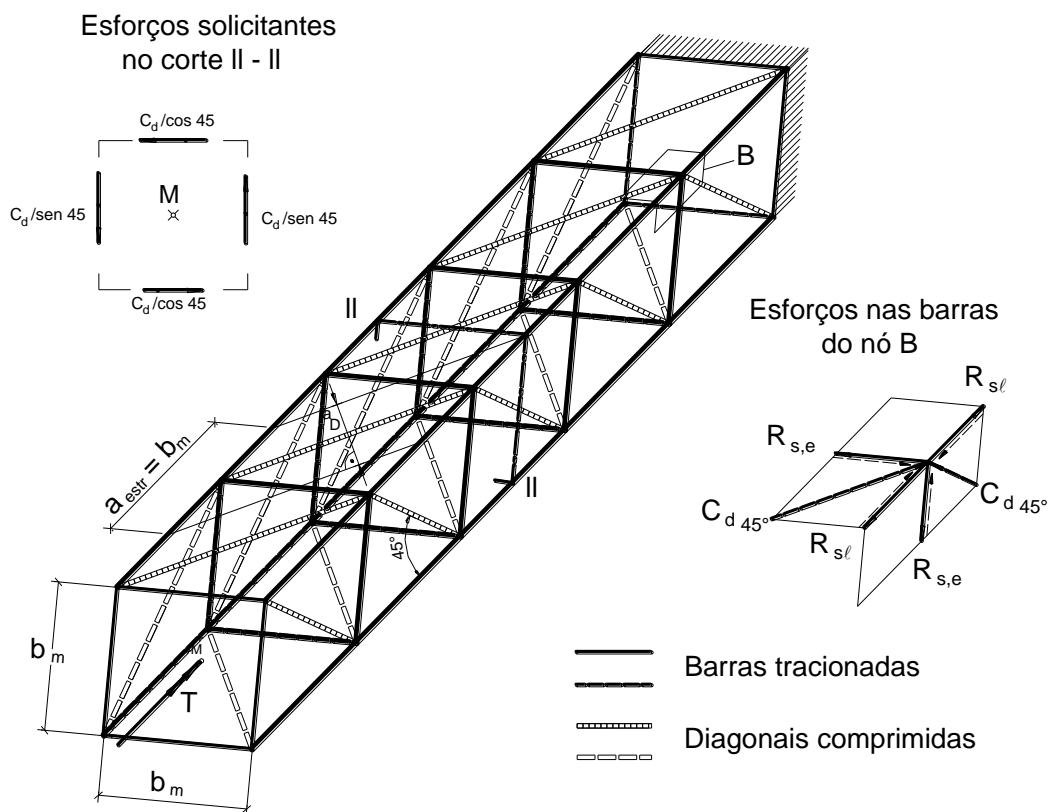


Figura 26 – Treliça espacial para viga com torção simples com armadura longitudinal e transversal. (LEONHARDT e MÖNNIG, 1982).

## 9. TORÇÃO COMBINADA COM MOMENTO FLETOR E FORÇA CORTANTE

A Figura 27 mostra as trajetórias das fissuras numa viga de concreto de seção retangular. As fissuras apresentam-se com trajetórias inclinadas de aproximadamente  $45^\circ$  com o eixo longitudinal da viga.

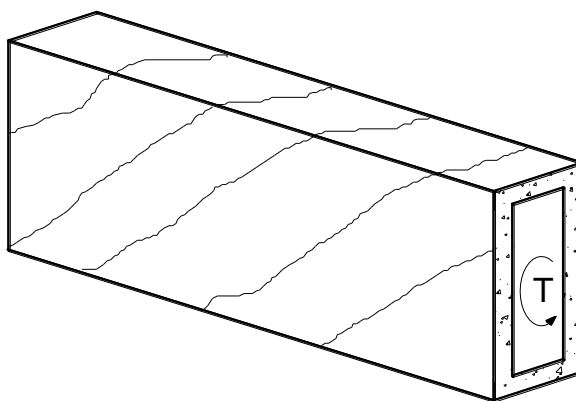


Figura 27 – Trajetórias das fissuras na viga vazada de seção retangular.

Quando o valor do momento fletor é elevado comparativamente ao momento de torção, a zona comprimida pelo momento fletor fica isenta de fissuras, como mostrado na Figura 28.

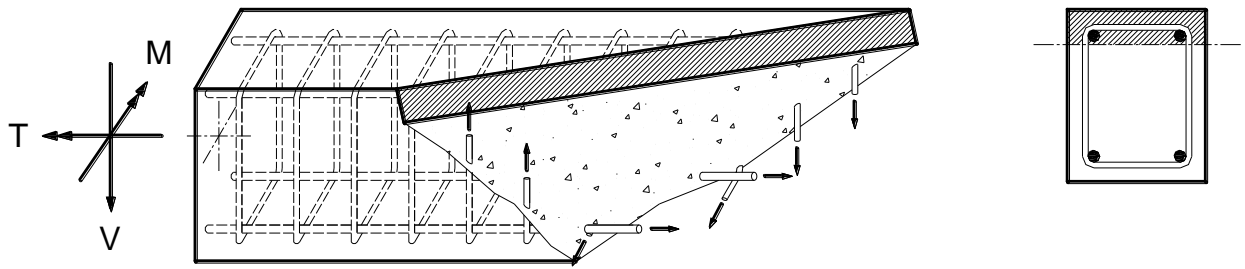


Figura 28 – Modelo para vigas com altos momentos fletores (LEONHARDT e MÖNNIG, 1982).

No caso da força cortante elevada, uma face vertical deverá ficar isenta de fissuras, sendo aquela onde as tensões de cisalhamento da torção e do esforço cortante têm sentidos contrários. Isso fica demonstrado nos modelos de treliça adotados, onde as diagonais comprimidas da treliça para o cortante opõem-se às diagonais tracionadas da treliça espacial da torção.

As fissuras nesses casos apresentam-se contínuas, em forma de hélice e em três das quatro faces da viga. Numa face, onde as tensões de compressão superam a de tração, não surgem fissuras (Figura 29).

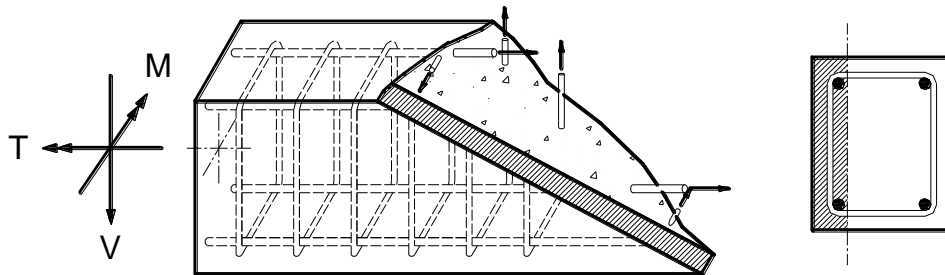


Figura 29 – Modelo para vigas com altas forças cortantes (LEONHARDT e MÖNNIG, 1982).

## 10. FORMAS DE RUPTURA POR TORÇÃO

Após a fissuração, a ruptura de uma viga sob torção pura pode ocorrer de alguns modos: escoamento dos estribos, da armadura longitudinal, ou escoamento de ambas as armaduras. No caso de vigas superarmadas à torção, o concreto comprimido compreendido entre as fissuras inclinadas pode esmagar pelo efeito das tensões principais de compressão, antes do escoamento das armaduras. Outros modos de ruptura podem também ocorrer, estando descritos a seguir.

### 10.1 Ruptura por Tração

A ruptura brusca também pode ocorrer por efeito de torção, após o surgimento das primeiras fissuras. A ruptura brusca pode ser evitada pela colocação de uma armadura mínima, para resistir às tensões de tração por torção.

Segundo LEONHARDT e MÖNNIG (1982) sendo as armaduras longitudinal e transversal diferentes, a menor armadura determinará o tipo de ruptura. Uma pequena diferença nas armaduras, pode, no entanto, ser compensada por uma redistribuição de esforços.

Ao contrário do esforço cortante, onde a inclinação do banzo comprimido pode diminuir a tração na alma da viga, na torção essa diminuição não pode ocorrer, dado que na analogia de treliça espacial não existe banzo comprimido inclinado.

### 10.2 Ruptura por Compressão

Com armaduras colocadas longitudinalmente e transversalmente pode surgir forte empenamento das faces laterais, ocasionando tensões adicionais ao longo das bielas comprimidas, podendo ocorrer o seu esmagamento (Figura 30).

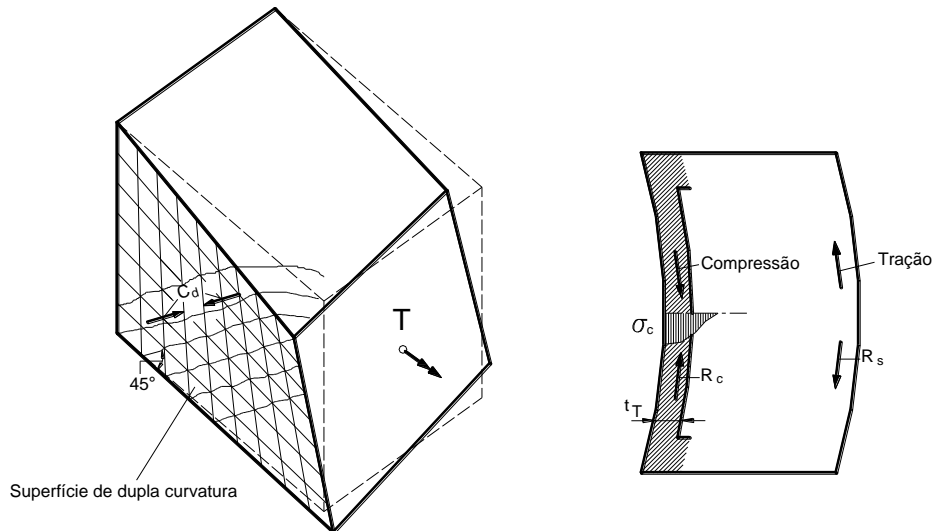


Figura 30 – Empenamento da viga originando tensões adicionais de flexão. (LEONHARDT e MÖNNIG, 1982).

### 10.3 Ruptura dos Cantos

A mudança de direção das tensões de compressão nos cantos, como indicado na Figura 31, origina uma força que pode levar ao rompimento dos cantos da viga. Os estribos e as barras longitudinais dos cantos contribuem para evitar essa forma de ruptura. Vigas com tensões de cisalhamento da torção muito elevadas devem ter o espaçamento dos estribos limitados a 10 cm para evitar essa forma de ruptura.

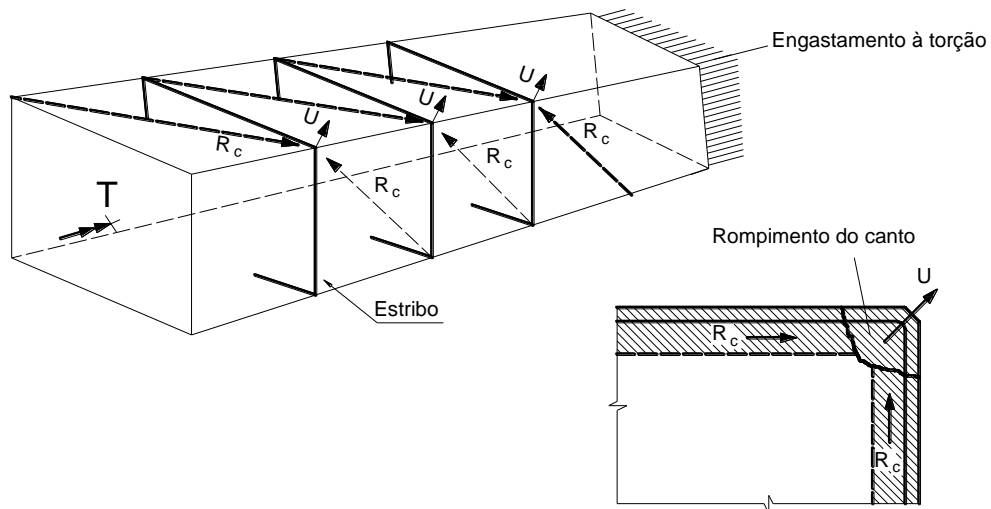


Figura 31 – Possível ruptura do canto devida à mudança de direção das diagonais comprimidas. (LEONHARDT e MÖNNIG, 1982).

### 10.4 Ruptura da Ancoragem

Esta forma de ruptura pode ocorrer por insuficiência da ancoragem do estribo, levando ao seu “escorregamento”, e pelo deslizamento das barras longitudinais. O cuidado na ancoragem das armaduras pode evitar essa forma de ruptura.

## 11. TORÇÃO SIMPLES - DEFINIÇÃO DAS FORÇAS E TENSÕES NA TRELIÇA GENERALIZADA

Nas décadas de 60 e 70 a treliça clássica foi generalizada por LAMPERT, THÜRLIMANN e outros, com a admissão de ângulos variáveis ( $\theta$ ) para a inclinação das bielas (Figura 32). O modelo de treliça generalizada é o atualmente adotado pelas principais normas internacionais, como ACI 318/11 e MC-90 do CEB (1990).

A NBR 6118<sup>1</sup> também considera o modelo de treliça generalizada para o dimensionamento de vigas de Concreto Armado à torção, em concordância com a treliça plana generalizada concebida para a análise da força cortante.

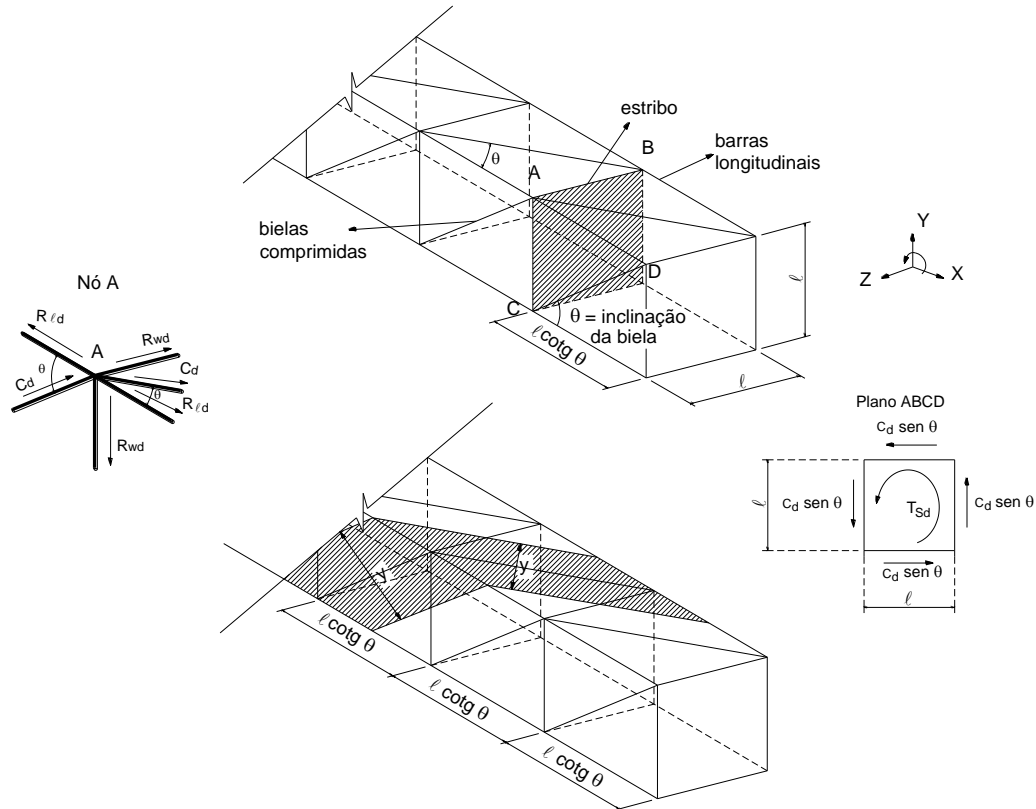


Figura 32 – Treliça espacial generalizada (LIMA et al., 2000).

### 11.1 Diagonais de Compressão

Considerando-se o plano ABCD da treliça espacial generalizada indicada na Figura 32 e que os esforços internos resistentes devem igualar o esforço solicitante externo (momento de torção  $T_{sd}$ ), tem-se:

$$T_{sd} = 2 C_d \text{ sen } \theta \ell \quad \text{Eq. 4}$$

A força nas diagonais comprimidas surge da Eq. 4:

$$C_d = \frac{T_{sd}}{2 \ell \text{ sen } \theta} \quad \text{Eq. 5}$$

$C_d$  = força na diagonal comprimida;

$T_{sd}$  = momento de torção de cálculo;

$\theta$  = ângulo de inclinação da diagonal comprimida;

$\ell$  = distância entre os banzos.

<sup>1</sup> ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. Projeto de estruturas de concreto – Procedimento. NBR 6118, ABNT, 2014, 238p.

A força de compressão  $C_d$  nas diagonais atua sobre uma seção transversal de área:

$$y \cdot t = \ell \cos \theta \cdot t \quad \text{Eq. 6}$$

$t$  = espessura da casca ou da parede da seção oca;  
 $y$  = largura de influência da diagonal inclinada da treliça.

Assim, substituindo a força  $C_d$  da Eq. 5 por  $\sigma_{cd}$  e  $t = \sigma_{cd} \ell \cos \theta$ , a tensão de compressão na diagonal ( $\sigma_{cd}$ ) assume o valor:

$$\sigma_{cd} \ell \cos \theta \cdot t = \frac{T_{Sd}}{2 \ell \sin \theta} \quad \rightarrow \quad \sigma_{cd} = \frac{T_{Sd}}{(\ell \cos \theta \cdot t) 2 \ell \sin \theta}$$

$$\sigma_{cd} = \frac{T_{Sd}}{\ell^2 t \sin 2 \theta} \quad \text{Eq. 7}$$

como  $\ell^2 = A_e$ , determina-se a forma final para a tensão na diagonal de compressão:

$$\sigma_{cd} = \frac{T_{Sd}}{A_e t \sin 2 \theta} \quad \text{Eq. 8}$$

A Eq. 3 pode ser escrita como:  $T_{Sd} = \tau_t 2 A_e t$ . Da Eq. 3 reescrita na Eq. 8 fica:

$$\sigma_{cd} = \frac{2 \tau_{td}}{\sin 2 \theta} \quad \text{Eq. 9}$$

## 11.2 Armadura longitudinal

Conforme as forças indicadas no nó A da Figura 32, fazendo o equilíbrio de forças na direção x, tem-se:

$$4 R_{\ell d} = 4 C_d \cos \theta \quad \text{Eq. 10}$$

com  $R_{\ell d}$  = resultante em um banzo longitudinal. Como  $4 R_{\ell d} = A_{sl} f_{ywd}$ , substituindo na Eq. 10 fica:

$$A_{sl} f_{ywd} = 4 C_d \cos \theta \quad \text{Eq. 11}$$

Substituindo a Eq. 5 na Eq. 11 fica:

$$A_{sl} f_{ywd} = 4 \frac{T_{Sd}}{2 \ell \sin \theta} \cos \theta$$

Isolando a armadura longitudinal:

$$A_{sl} = \frac{2 T_{Sd}}{\ell f_{ywd}} \cot \theta \quad \text{Eq. 12}$$

Com o objetivo de evitar fissuração entre os vértices da seção vazada, a armadura deve ser distribuída no perímetro  $u_e = 4\ell$ , de modo que a taxa de armadura longitudinal por comprimento do eixo médio da seção vazada é:

$$\frac{A_{s\ell}}{u_e} = \frac{2 T_{Sd}}{\ell f_{ywd} u_e} \cot g \theta = \frac{2 T_{Sd}}{\ell f_{ywd} 4 \ell} \cot g \theta$$

$$\frac{A_{s\ell}}{u_e} = \frac{T_{Sd}}{2 A_e f_{ywd}} \cot g \theta \quad \text{Eq. 13}$$

ou

$$\frac{A_{s\ell}}{u_e} = \frac{T_{Sd}}{2 A_e f_{ywd} \operatorname{tg} \theta} \quad \text{Eq. 14}$$

$A_{s\ell}$  = área total de armadura longitudinal;

$A_e$  = área interna delimitada pelo eixo da parede fina (ver Figura 23);

$u_e$  = perímetro do contorno da área  $A_e$ .

### 11.3 Estribos

Na Figura 32, fazendo o equilíbrio do nó A na direção do eixo Z, tem-se:

$$R_{wd} = C_d \operatorname{sen} \theta \quad \text{Eq. 15}$$

onde  $R_{wd}$  representa a força nos montantes verticais e horizontais da treliça espacial.

Substituindo a Eq. 5 na Eq. 15 tem-se:

$$R_{wd} = \frac{T_{Sd}}{2 \ell \operatorname{sen} \theta} \operatorname{sen} \theta = \frac{T_{Sd}}{2 \ell} \quad \text{Eq. 16}$$

Sendo  $s$  o espaçamento dos estribos e  $\ell \cdot \cot g \theta$  o comprimento de influência das barras transversais da treliça que representam os estribos (ver Figura 32), tem-se:

$$R_{wd} = \frac{\ell \cot g \theta}{s} A_{s,90} f_{ywd} \quad \text{Eq. 17}$$

Igualando as Eq. 16 e Eq. 17 fica:

$$\frac{\ell \cot g \theta}{s} A_{s,90} f_{ywd} = \frac{T_{Sd}}{2 \ell}$$

Isolando a armadura transversal relativamente ao espaçamento  $s$  dos estribos:

$$\frac{A_{s,90}}{s} = \frac{T_{Sd}}{2 \ell \cot g \theta f_{ywd}}$$

$$\frac{A_{s,90}}{s} = \frac{T_{Sd}}{2 A_e f_{ywd}} \operatorname{tg} \theta \quad \text{Eq. 18}$$

com  $A_{s,90}$  sendo a área de um ramo vertical ou horizontal do estribo vertical.

## 12. DIMENSIONAMENTO DE ELEMENTOS LINEARES À TORÇÃO UNIFORME NO ESTADO-LIMITE ÚLTIMO (ELU) SEGUNDO A NBR 6118

A NBR 6118 separa o estudo dos elementos lineares sujeitos à torção em “*Torção Uniforme*” (item 17.5.1) e “*Torção em Perfis Abertos de Parede Fina*” (17.5.2). No texto subsequente será considerado apenas o dimensionamento à torção uniforme.

A norma pressupõe “*um modelo resistente constituído por treliça espacial, definida a partir de um elemento estrutural de seção vazada equivalente ao elemento estrutural a dimensionar. As diagonais de compressão dessa treliça, formada por elementos de concreto, têm inclinação que pode ser arbitrada pelo projeto no intervalo de  $30^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$ .*” Esse modelo é o da treliça espacial generalizada, descrito anteriormente. O engenheiro projetista tem a liberdade de escolher o ângulo de inclinação das bielas de compressão, que deve ser igual ao ângulo adotado no dimensionamento da viga à força cortante.

### 12.1 Geometria da Seção Resistente

No caso de seções poligonais convexas cheias (NBR 6118, 17.5.1.4.1), a “*seção vazada equivalente se define a partir da seção cheia com espessura da parede equivalente  $h_e$  dada por:*”

$$h_e \leq \frac{A}{u} \quad \text{Eq. 19}$$

$$h_e \geq 2 c_1 \quad \text{Eq. 20}$$

A = área da seção cheia;

u = perímetro da seção cheia;

$c_1$  = distância entre o eixo da barra longitudinal do canto e a face lateral do elemento estrutural.

“*Caso  $A/u$  resulte menor que  $2c_1$ , pode-se adotar  $h_e = A/u \leq b_w - 2c_1$  e a superfície média da seção celular equivalente  $A_e$  definida pelos eixos das armaduras do canto (respeitando o cobrimento exigido nos estribos).*”

No item 17.5.1.4 a norma também define como deve ser considerada a seção resistente de “*Seção Composta de Retângulos*” e de “*Seções Vazadas*”, e no item 17.5.2 a “*Torção em Perfis Abertos de Parede Fina*”.

### 12.2 Torção de Compatibilidade

No caso de torção de compatibilidade a NBR 6118 (17.5.1.2) diz que “*é possível desprezá-la, desde que o elemento estrutural tenha a capacidade adequada de adaptação plástica e que todos os outros esforços sejam calculados sem considerar os efeitos por ela provocados. Em regiões onde o comprimento do elemento sujeito à torção seja menor ou igual a  $2h$ , para garantir um nível razoável de capacidade de adaptação plástica, deve-se respeitar a armadura mínima de torção e limitar a força cortante, tal que:*”

$$V_{Sd} \leq 0,7 V_{Rd2} \quad \text{Eq. 21}$$

onde  $V_{Sd}$  é a força cortante atuante no elemento e  $V_{Rd2}$  é a máxima força cortante admitida pela diagonal de compressão.

### 12.3 Torção de Equilíbrio

“*Sempre que a torção for necessária ao equilíbrio do elemento estrutural, deve existir armadura destinada a resistir aos esforços de tração oriundos da torção. Essa armadura deve ser constituída por estribos verticais periféricos normais ao eixo do elemento estrutural e barras longitudinais distribuídas ao longo do perímetro da seção resistente [...]*” (NBR 6118, 17.5.1.2).

Admite-se satisfeita a resistência de um elemento estrutural à torção pura quando se verificarem simultaneamente as seguintes condições (17.5.1.3):

$$\begin{aligned} T_{Sd} &\leq T_{Rd,2} \\ T_{Sd} &\leq T_{Rd,3} \\ T_{Sd} &\leq T_{Rd,4} \end{aligned}$$

$T_{Rd,2}$  = limite dado pela resistência das diagonais comprimidas de concreto;

$T_{Rd,3}$  = limite definido pela parcela resistida pelos estribos normais ao eixo do elemento estrutural;

$T_{Rd,4}$  = limite definido pela parcela resistida pelas barras longitudinais, paralelas ao eixo do elemento estrutural.

A resistência proveniente das diagonais comprimidas de concreto deve ser obtida pela Eq. 8, fazendo a tensão de compressão na diagonal de concreto ficar limitada ao valor máximo dado por  $0,5\alpha_{v2} f_{cd}$ . Assim, o máximo momento de torção que uma seção pode resistir, sem que ocorra o esmagamento das diagonais comprimidas é (17.5.1.5):

$$T_{Rd,2} = 0,5\alpha_{v2} \cdot f_{cd} \cdot A_e \cdot h_e \cdot \sen 2\theta \quad \text{Eq. 22}$$

$\alpha_{v2} = 1 - (f_{ck}/250)$ ,  $f_{ck}$  em MPa;

$\theta$  = ângulo de inclinação das diagonais de concreto, arbitrado no intervalo  $30^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$ ;

$A_e$  = área limitada pela linha média da parede da seção vazada, real ou equivalente, incluindo a parte vazada;

$h_e$  = espessura equivalente da parede da seção vazada, real ou equivalente, no ponto considerado.

Segundo a NBR 6118 (17.5.1.6), a resistência decorrente dos estribos normais ao eixo do elemento estrutural deve atender à expressão seguinte, semelhante à Eq. 18 já desenvolvida:

$$T_{Rd,3} = (A_{s,90}/s) f_{ywd} 2 A_e \cotg \theta \quad \text{Eq. 23}$$

donde, com  $T_{Sd} = T_{Rd,3}$ , calcula-se a área da armadura transversal:

$$\frac{A_{s,90}}{s} = \frac{T_{Sd}}{2 A_e f_{ywd}} \tg \theta \quad \text{Eq. 24}$$

$A_{s,90}$  = área de um ramo do estribo, contido na área correspondente à parede equivalente;

$f_{ywd}$  = resistência de cálculo de início de escoamento do aço da armadura passiva, limitada a 435 MPa.

Para o ângulo  $\theta$  de inclinação das diagonais comprimidas igual a  $45^\circ$  a Eq. 24 transforma-se em:

$$\frac{A_{s,90}}{s} = \frac{T_{Sd}}{2 A_e f_{ywd}} \quad \text{Eq. 25}$$

Conforme a NBR 6118 (17.5.1.6), a resistência decorrente da armadura longitudinal deve atender à expressão seguinte, já deduzida na Eq. 14:

$$T_{Rd,4} = (A_{s\ell}/u_e) 2 A_e f_{ywd} \tg \theta \quad \text{Eq. 26}$$

donde, com  $T_{Sd} = T_{Rd,4}$ , calcula-se a área de armadura longitudinal:

$$\frac{A_{s\ell}}{u_e} = \frac{T_{Sd}}{2 A_e f_{ywd} \tg \theta} \quad \text{Eq. 27}$$

$A_{s\ell}$  = soma das áreas das barras longitudinais;

$u_e$  = perímetro da área  $A_e$ .

Para o ângulo  $\theta$  de inclinação das diagonais comprimidas igual a  $45^\circ$  a Eq. 27 transforma-se em:



$$\frac{A_{s\ell}}{u_e} = \frac{T_{Sd}}{2 A_e f_{ywd}} \quad \text{Eq. 28}$$

## 12.4 Armadura Mínima

Segundo a NBR 6118 (item 17.5.1.2), sempre que a torção for de equilíbrio deverá existir armadura resistente aos esforços de tração, constituída por estribos verticais periféricos normais ao eixo do elemento e barras longitudinais, distribuídas ao longo do perímetro da seção resistente (parede equivalente). A taxa geométrica mínima de armadura, com o propósito de evitar a ruptura brusca por tração, é:

$$\left. \begin{aligned} \rho_{s\ell} &= \frac{A_{s\ell}}{h_e u_e} \\ \rho_{sw} &= \frac{A_{sw}}{b_w s} \end{aligned} \right\} \geq 0,2 \frac{f_{ct,m}}{f_{ywk}} \quad , \text{ com } f_{ywk} \leq 500 \text{ MPa.} \quad \text{Eq. 29}$$

A Eq. 29 prescrita pela NBR 6118 dá margem à dúvida porque a área de estribos  $A_{sw}$  refere-se à força cortante, onde  $A_{sw}$  representa a área total dos ramos verticais (normais ao eixo do elemento) do estribo. No caso da torção, onde geralmente os estribos têm apenas dois ramos, a área  $A_{s,90}$  dada na Eq. 24 representa a área de apenas um ramo vertical do estribo. Entendendo que a área de estribos mínima dada na Eq. 29 representa a área de apenas um ramo vertical do estribo, e por isso fazendo  $A_{sw} = A_{s,90\text{mín}}$ , a Eq. 29 fica escrita como:

$$\frac{A_{s\ell,\text{mín}}}{h_e u_e} = 0,2 \frac{f_{ct,m}}{f_{ywk}} \quad \text{Eq. 30}$$

$$\frac{A_{s,90\text{mín}}}{b_w s} = 0,2 \frac{f_{ct,m}}{f_{ywk}}$$

$A_{s\ell,\text{mín}}$  = área mínima de armadura longitudinal;

$A_{s,90\text{mín}}$  = área mínima da seção transversal de um ramo vertical do estribo;

$u_e$  = perímetro da área  $A_e$ ;

$b_w$  = largura média da alma;

$s$  = espaçamentos dos estribos verticais;

$f_{ct,m}$  = resistência média à tração do concreto.

$f_{ywk}$  = resistência de início de escoamento do aço da armadura ( $\leq 500$  MPa).

Na Eq. 30, isolando  $A_{s,90\text{mín}}/s$  e  $A_{s\ell,\text{mín}}/u_e$  fica:

$$\frac{A_{s\ell,\text{mín}}}{u_e} = \frac{0,2 f_{ct,m}}{f_{ywk}} h_e \quad \text{Eq. 31}$$

$$\frac{A_{s,90\text{mín}}}{s} = \frac{0,2 f_{ct,m}}{f_{ywk}} b_w$$

Fazendo o espaçamento  $s$  e o perímetro  $u_e$  iguais a 100 cm (1 m), as armaduras mínimas ficam:

$$A_{s\ell,\text{mín}} = \frac{20 f_{ct,m}}{f_{ywk}} h_e \quad \text{Eq. 32}$$

$$A_{s,90\text{mín}} = \frac{20 f_{ct,m}}{f_{ywk}} b_w \quad \text{Eq. 33}$$

$A_{s\ell,mín}$  e  $A_{s,90\text{mín}}$  em  $\text{cm}^2/\text{m}$ ;

$b_w$  e  $h_e$  em cm;

$f_{ywk}$  e  $f_{ct,m}$  em  $\text{kN}/\text{cm}^2$ ;

$f_{ct,m} = 0,3 \sqrt[3]{f_{ck}^2}$ , com  $f_{ck}$  em MPa.

## 12.5 Solicitações Combinadas

As solicitações combinadas com torção encontram-se descritas no item 17.7 da NBR 6118.

### 12.5.1 Flexão e Torção

Conforme a NBR 6118 (17.7.1): “Nos elementos estruturais submetidos à torção e à flexão simples ou composta, as verificações podem ser efetuadas separadamente para a torção e para as solicitações normais,” devendo-se atender ainda:

- **Armadura longitudinal:** “Na zona tracionada pela flexão, a armadura de torção deve ser acrescentada à armadura necessária para solicitações normais, considerando-se em cada seção os esforços que agem concomitantemente.”
- **Armadura longitudinal no banzo comprimido pela flexão:** “No banzo comprimido pela flexão, a armadura longitudinal de torção pode ser reduzida em função dos esforços de compressão que atuam na espessura efetiva  $h_e$  no trecho de comprimento  $\Delta u$  correspondente à barra ou feixe de barras consideradas.”
- **Resistência do banzo comprimido:** “Nas seções em que a torção atua simultaneamente com solicitações normais intensas, que reduzem excessivamente a profundidade da linha neutra, particularmente em vigas de seção celular, o valor de cálculo da tensão principal de compressão não pode superar os valores estabelecidos na Seção 22. Essa tensão principal deve ser calculada como em um estado plano de tensões, a partir da tensão normal média que age no banzo comprimido de flexão e da tensão tangencial de torção calculada por:”

$$\tau_{Td} = \frac{T_d}{2A_e h_e} \quad \text{Eq. 34}$$

### 12.5.2 Torção e Força Cortante

Conforme a NBR 6118 (17.7.2): “Na combinação de torção com força cortante, o projeto deve prever ângulos de inclinação das bielas de concreto  $\theta$  coincidentes para os dois esforços. Quando for utilizado o modelo I (ver 17.4.2.2) para a força cortante, que subentende  $\theta=45^\circ$ , esse deve ser o valor considerado também para a torção.

A resistência à compressão diagonal do concreto deve ser satisfeita atendendo à expressão:”

$$\frac{V_{Sd}}{V_{Rd2}} + \frac{T_{Sd}}{T_{Rd2}} \leq 1 \quad \text{Eq. 35}$$

onde  $V_{Sd}$  é a força cortante de cálculo e  $T_{Sd}$  é o momento de torção de cálculo.

“A armadura transversal pode ser calculada pela soma das armaduras calculadas separadamente para  $V_{Sd}$  e  $T_{Sd}$ .”

Nessa questão é importante salientar que: a área de armadura transversal calculada para a força cortante refere-se à área total, contando todos os ramos verticais do estribo. Já no caso da torção a área de armadura transversal calculada é apenas de um ramo vertical do estribo. Portanto, para cálculo da armadura transversal total deve-se tomar o cuidado de somar as áreas de apenas um ramo vertical do estribo, para ambos os esforços de força cortante e momento de torção.

## 12.6 Fissuração Inclinada da Alma

Conforme a NBR 6118 (17.6), na verificação do estado-limite de fissuração inclinada da alma por solicitação combinada de força cortante com torção, “Usualmente, não é necessário verificar a fissuração diagonal da alma de elementos estruturais de concreto. Em casos especiais, em que isso for considerado importante, deve-se limitar o espaçamento da armadura transversal a 15 cm.”

## 12.7 Disposições Construtivas

As disposições construtivas para a torção em vigas constam no item 18.3.4 da NBR 6118.

“A armadura destinada a resistir aos esforços de tração provocados por torção deve ser constituída por estribos normais ao eixo da viga, combinados com barras longitudinais paralelas ao mesmo eixo [...]”

Os estribos e as barras da armadura longitudinal devem estar contidos no interior da parede fictícia da seção vazada equivalente. “Consideram-se efetivos na resistência os ramos dos estribos e as armaduras longitudinais contidos no interior da parede fictícia da seção vazada equivalente (ver 17.5.1.4).

Para prevenir a ruptura dos cantos é necessário alojar quatro barras longitudinais nos vértices das seções retangulares. Segundo LEONHARDT e MÖNNIG (1982), para seções de grandes dimensões é necessário distribuir a armadura longitudinal ao longo do perímetro da seção, a fim de limitar a fissuração.

### 12.7.1 Estribos

Os estribos para torção devem ser fechados em todo o seu contorno, envolvendo as barras das armaduras longitudinais de tração, e com as extremidades adequadamente ancoradas por meio de ganchos em ângulo de 45°. As seções poligonais devem conter, em cada vértice dos estribos de torção, pelo menos uma barra.” (NBR 6118, 18.3.4).

As prescrições da NBR 6118 (18.3.3.2) para o diâmetro e espaçamento dos estribos são as mesmas do dimensionamento à força cortante. Para o diâmetro:

$$\phi_t \begin{cases} \geq 5 \text{ mm} \\ < \frac{b_w}{10} \\ \leq 12 \text{ mm para barra lisa} \\ \geq 4,2 \text{ mm para estribos formados por telasoldada} \end{cases} \quad \text{Eq. 36}$$

onde  $b_w$  é a largura da alma da viga.

O espaçamento entre os estribos deve possibilitar a passagem da agulha do vibrador, a fim de garantir um bom adensamento do concreto. O espaçamento máximo deve atender as seguintes condições:

$$\begin{aligned} - \text{ se } V_{Sd} \leq 0,67 V_{Rd2} & \rightarrow s_{\text{máx}} = 0,6d \leq 30 \text{ cm;} \\ - \text{ se } V_{Sd} > 0,67 V_{Rd2} & \rightarrow s_{\text{máx}} = 0,3d \leq 20 \text{ cm.} \end{aligned} \quad \text{Eq. 37}$$

### 12.7.2 Armadura Longitudinal

“A armadura longitudinal de torção, de área total  $A_{s\ell}$ , pode ter arranjo distribuído ou concentrado, mantendo-se obrigatoriamente constante a relação  $\Delta A_{s\ell} / \Delta u$ , onde  $\Delta u$  é o trecho de perímetro, da seção efetiva, correspondente a cada barra ou feixe de barras de área  $\Delta A_{s\ell}$ . Nas seções poligonais, em cada vértice dos estribos de torção, deve ser colocada pelo menos uma barra longitudinal.” (NBR 6118, 17.5.1.6).

“As barras longitudinais da armadura de torção podem ter arranjo distribuído ou concentrado ao longo do perímetro interno dos estribos, espaçadas no máximo em 350 mm. Deve-se respeitar a relação  $\Delta A_{s\ell} / \Delta u$ , onde  $\Delta u$  é o trecho de perímetro da seção efetiva correspondente a cada barra ou feixe de barras de área  $\Delta A_{s\ell}$ , exigida pelo dimensionamento.” (NBR 6118, 18.3.4).

### 13. MOMENTO DE INÉRCIA À TORÇÃO

O momento de inércia à torção ( $J$ ) e o módulo de inércia à torção ( $W_t$ ) de vigas com seção retangular podem ser calculados com base nas equações:

$$J = j b^3 h \quad \text{Eq. 38}$$

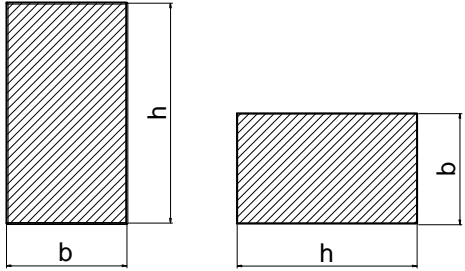
$$W_t = w b^2 h \quad \text{Eq. 39}$$

$$n = \frac{b}{h}$$

$j$  = parâmetro dependente da relação  $n$  entre as dimensões dos lados do retângulo, conforme a Tabela 2;  
 $b$  = menor dimensão da seção retangular;  
 $h$  = maior dimensão da seção retangular.

Tabela 2 – Valores de  $w$  e  $j$ .

$n$	$w$	$j$
0,0	0,333	0,333
0,1	0,312	0,312
0,2	0,291	0,291
0,3	0,273	0,270
0,4	0,258	0,249
0,5	0,246	0,229
0,6	0,237	0,209
0,7	0,229	0,189
0,8	0,221	0,171
0,9	0,214	0,155
1,0	0,208	0,141



### 14. EXEMPLOS NUMÉRICOS DE APLICAÇÃO

Apresentam-se a seguir três exemplos numéricos de aplicação sobre o dimensionamento de vigas de Concreto Armado quando solicitadas à torção. Os cálculos abrangem também os dimensionamentos necessários à flexão, à força cortante, ancoragem nos apoios e “cobrimento” do diagrama de momentos fletores.

#### 14.1 Exemplo 1

Uma viga em balanço, como mostrada na Figura 33 e Figura 34, suporta em sua extremidade livre uma outra viga, nela engastada, com uma força vertical concentrada ( $F$ ) de 50 kN. As distâncias e dimensões das duas vigas (determinadas em um pré-dimensionamento) estão indicadas na planta de fôrma. As vigas têm como carregamento somente a força  $F$  e o peso próprio. Outras ações, como do vento por exemplo, são desprezadas.

São conhecidos: edificação em área urbana de cidade situada distante de região litorânea e livre de outros meios agressivos, em classe II de agressividade ambiental (Tabela 6.1 da NBR 6118), o que leva ao concreto C25 ( $f_{ck} = 25$  MPa) no mínimo, relação  $a/c \leq 0,60$  (Tabela 7.1 da NBR 6118),  $c_{nom} = 2,5$  cm para  $\Delta c = 5$  mm (Tabela 7.2 da NBR 6118); aço CA-50;  $\gamma_{conc} = 25$  kN/m<sup>3</sup>; coeficientes de ponderação:  $\gamma_c = \gamma_f = 1,4$  e  $\gamma_s = 1,15$ .

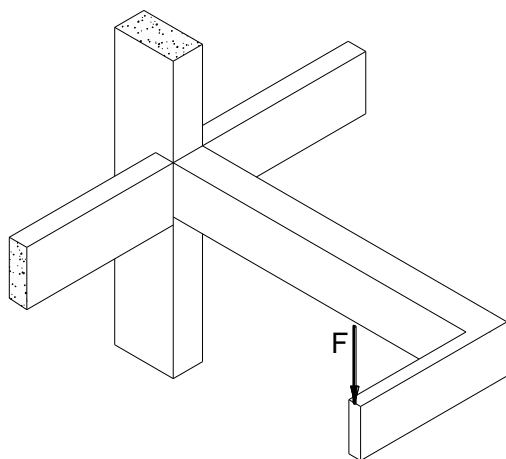


Figura 33 – Perspectiva da estrutura com a força  $F$  aplicada.

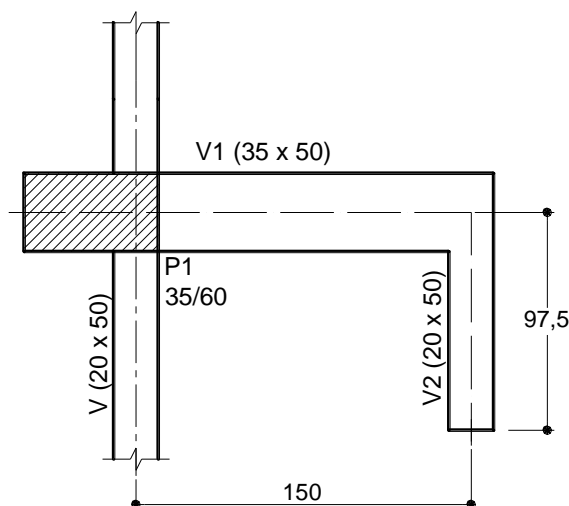


Figura 34 – Planta de fôrma.

## RESOLUÇÃO

A estrutura para sustentação da força  $F$ , composta pelas vigas  $V1$  e  $V2$  (Figura 34), é uma estrutura em balanço. A viga  $V2$  deve ser considerada engastada perfeitamente na viga  $V1$ , e esta, por sua vez, deve ser engastada perfeitamente no pilar  $P1$ . A viga  $V1$  tem momento de torção aplicado na extremidade livre, proveniente da flexão da viga  $V2$ , e a torção é de equilíbrio, devendo ser obrigatoriamente considerada no dimensionamento da viga  $V1$ , sob pena de ruína caso desprezada.

Todas as estruturas devem ser cuidadosamente analisadas e dimensionadas, mas estruturas em balanço, como a deste exemplo, devem ser objeto de especial atenção por parte do engenheiro. Ainda, devem ser bem executadas, sob risco de problemas graves conduzirem à ruína da estrutura.

Os esforços solicitantes serão calculados de dois modos, primeiro considerando-se a atuação conjunta das vigas em um modelo de grelha, e segundo considerando-se as vigas individualmente, com o cálculo manual. Para resolução da grelha será utilizado o programa GPLAN4<sup>2</sup>, de CORRÊA et al. (1992).

### a) Cálculo dos esforços solicitantes como grelha

A viga  $V2$  (20 x 50) tem como vão efetivo e peso próprio:

vão livre:  $\ell_o = 80$  cm (da extremidade livre à face interna da  $V1$ ),

$$a_1 \leq \begin{cases} t_1 / 2 = 35 / 2 = 17,5 \text{ cm} \\ 0,3h = 0,3 \cdot 50 = 15 \text{ cm} \end{cases} \quad \therefore a_1 = 15 \text{ cm} \quad , (a_2 = 0)$$

$$\ell_{\text{ef},V2} = \ell_o + a_1 = 80 + 15 = 95 \text{ cm}$$

$$\text{peso próprio: } g_{\text{pp},V2} = \gamma_{\text{conc}} b_w h = 25 \cdot 0,20 \cdot 0,50 = 2,5 \text{ kN/m}$$

A viga  $V1$  (35 x 50) tem como vão efetivo e peso próprio:

vão livre:  $\ell_o = 150$  cm (da extremidade livre à face do pilar),

$$a_1 \leq \begin{cases} t_1 / 2 = 60 / 2 = 30 \text{ cm} \\ 0,3h = 0,3 \cdot 50 = 15 \text{ cm} \end{cases} \quad \therefore a_1 = 15 \text{ cm} \quad , (a_2 = 0)$$

<sup>2</sup> O programa e o manual do GPLAN4 (ou GPLAN5 dependendo da versão do programa operacional) podem ser obtidos em: [http://wwwwp.feb.unesp.br/pbastos/pag\\_concreto2.htm](http://wwwwp.feb.unesp.br/pbastos/pag_concreto2.htm)

$$l_{ef,V1} = l_o + a_1 = 150 + 15 = 165 \text{ cm}$$

$$\text{peso próprio: } g_{pp,V1} = 25 \cdot 0,35 \cdot 0,50 = 4,375 \text{ kN/m}$$

A Figura 35 mostra o esquema utilizado para a grelha, com a numeração dos nós e barras. Na barra (2) correspondente à viga V1 deve ser considerado o momento de inércia à torção, pois a torção que ocorre na viga V1 é de equilíbrio e não pode ser desprezada, ou seja, deve ser obrigatoriamente considerada no projeto da viga. A viga V2 não tem torção, e por isso não há necessidade de considerar inércia à torção.<sup>3</sup> O nó 2 deve ser obrigatoriamente considerado um engaste perfeito, e os nós 1 e 3 não têm restrições nodais (são livres).

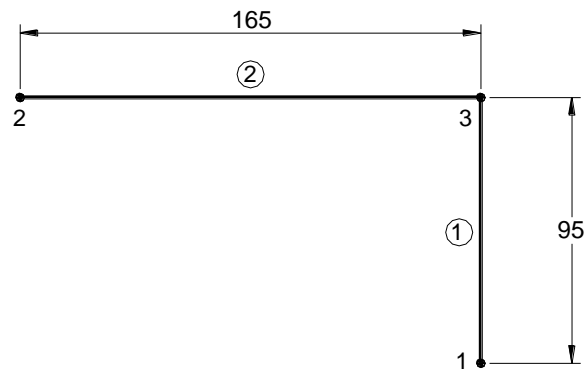


Figura 35 – Esquema da grelha, com distâncias e numeração dos nós e barras.

Supondo a viga trabalhando em serviço no estágio II (já fissurada), para o módulo de elasticidade do concreto será considerado o valor secante. O módulo tangente na origem pode ser avaliado pela seguinte expressão (NBR 6118, item 8.2.8)<sup>4</sup>:

$$E_{ci} = \alpha_E 5600 \sqrt{f_{ck}} = 1,0 \cdot 5600 \sqrt{25} = 28.000 \text{ MPa} = 2.800 \text{ kN/cm}^2$$

com  $\alpha_E = 1,0$  para brita de granito (ou gnaíse).

O módulo secante ( $E_{cs}$ ) é avaliado por:

$$E_{cs} = \alpha_i E_{ci} \quad , \text{ com } \alpha_i = 0,8 + 0,2 \frac{f_{ck}}{80} \leq 1,0$$

$$\alpha_i = 0,8 + 0,2 \frac{25}{80} = 0,8625 \leq 1,0 \quad \rightarrow \text{ok!}$$

$$E_{cs} = 0,8625 \cdot 2800 = 2.415 \text{ kN/cm}^2$$

Para o módulo de elasticidade transversal ( $G$  - NBR 6118, item 8.2.9) pode-se considerar a relação:

$$G_c = \frac{E_{cs}}{2,4} = \frac{2415}{2,4} = 1006,3 \text{ kN/cm}^2$$

O momento de inércia à torção ( $J$ ) foi calculado com a Eq. 38. Na Tabela 2, com  $n = 0,7$  encontra-se o valor de 0,189 para  $j$  e:

$$n = \frac{b}{h} = \frac{35}{50} = 0,7$$

$$J = j b^3 h = 0,189 \cdot 35^3 \cdot 50 = 405.169 \text{ cm}^4$$

<sup>3</sup> Foi considerado apenas um pequeno valor (100) para a inércia à torção, por necessidade do programa computacional de grelha.

<sup>4</sup> BASTOS, P.S.S. *Fundamentos do Concreto Armado*. Bauru/SP, Departamento de Engenharia Civil, Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2117 – Estruturas de Concreto I, Abril/2019, 83p. ([http://www.feb.unesp.br/pbastos/pag\\_concreto1.htm](http://www.feb.unesp.br/pbastos/pag_concreto1.htm)).

O arquivo de dados de entrada no programa, apresentado a seguir, foi feito conforme o manual de utilização de CORRÊA et al. (1992, ver nota 2).

```

OPTE, 2, 2, 2, 2, 2,
TORCAO
UNESP - DISC. CONCRETO II
TORÇÃO - EXEMPLO 1
NO
    1, 165, 0,
    2, 0, 95,
    3, 165, 95,
RES
    2, 1, 1, 1,
BAR
    1, 1, 3, 1, 1,
    2, 2, 3, 2, 1,
PROP
    1, 1, 1000, 208333, 100, 50,
    2, 1, 1750, 364583, 405169, 50,
MATL
    1, 2415, 1006.3,
FIMG
CARR1
CBR
    1, 1, -.025, 1,
    2, 1, -.04375, 1,
CNO
    1, -50,
FIMC
FIME

```

Os resultados gerados pelo programa estão listados no Anexo B1. Os diagramas de esforços solicitantes característicos estão indicados na Figura 36. A flecha máxima para a grelha resultou igual a 0,5 cm, no nó 1, aceitável em função dos valores-limites indicados pela NBR 6118.

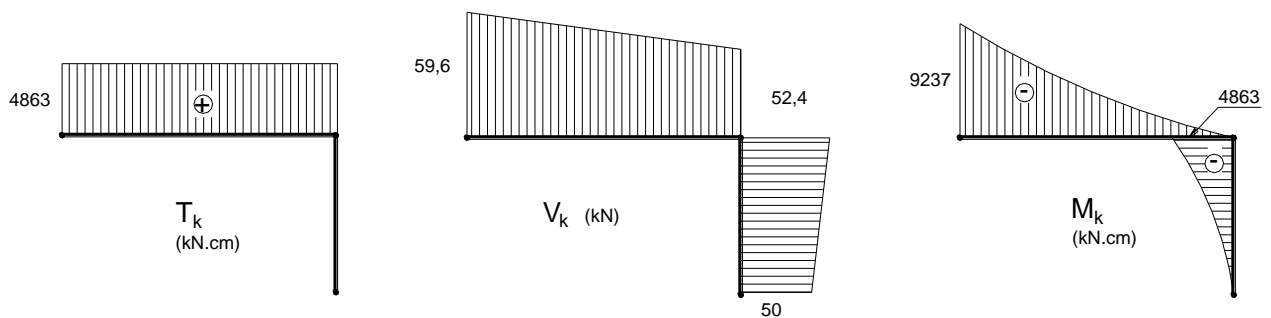


Figura 36 – Diagrama de esforços solicitantes característicos calculados conforme o modelo de grelha.

#### b) Dimensionamento da viga V2 (20 x 50)

A título de exemplo e comparação com os esforços gerados com o modelo de grelha, as vigas V1 e V2 terão os esforços novamente calculados, agora considerando-as individualmente.

##### b1) Esforços solicitantes máximos

A viga V2, engastada na viga V1, tem o esquema estático e carregamento indicados na Figura 37.

Força cortante no apoio (engaste perfeito):

$$V = 2,5 \cdot 0,95 + 50 = 52,4 \text{ kN}$$

Momento fletor no apoio:

$$M = - \left( \frac{2,5 \cdot 0,95^2}{2} + 50 \cdot 0,95 \right)$$

$$M = - 48,63 \text{ kN.m} = - 4.863 \text{ kN.cm}$$

Comparando os resultados dos esforços acima com aqueles obtidos no cálculo de grelha (Figura 36), nota-se que os esforços solicitantes na viga V2 são idênticos.

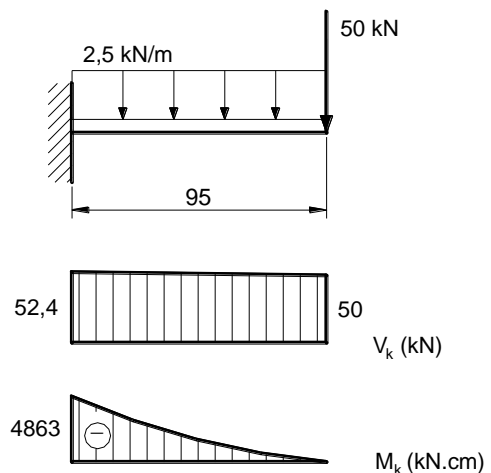


Figura 37 – Esquema estático, carregamento e esforços solicitantes na viga V2.

### b2) Dimensionamento à flexão

A NBR 6118 especifica que as vigas devem ter uma armadura de flexão mínima, calculada para um momento fletor mínimo, a qual deve ser comparada a uma outra área de armadura mínima, calculada segundo as taxas de armadura mínimas ( $\rho_{\min}$ ) apresentadas pela norma. A maior armadura calculada deve ser considerada como armadura mínima.

A armadura mínima de flexão, para o momento fletor mínimo, é:

$$M_{d,\min} = 0,8 W_0 f_{ctk,\sup}$$

$$f_{ctk,\sup} = 1,3 f_{ct,m} = 1,3 \cdot 0,3 \sqrt[3]{f_{ck}^2} = 1,3 \cdot 0,3 \sqrt[3]{25^2} = 3,33 \text{ MPa}$$

$$I = \frac{b h^3}{12} = \frac{20 \cdot 50^3}{12} = 208.333 \text{ cm}^4$$

$$W_0 = \frac{I}{y} = \frac{208333}{25} = 8.333 \text{ cm}^3 \text{ (no estágio I, } y \text{ é tomado na meia altura da viga)}$$

$$M_{d,\min} = 0,8 \cdot 8333 \cdot 0,333 = 2.220 \text{ kN.cm}$$

Dimensionamento da armadura longitudinal para o momento fletor mínimo:

$$K_c = \frac{b_w d^2}{M_d} = \frac{20 \cdot 46^2}{2220} = 19,1 \quad \rightarrow \text{ da Tabela A-1 tem-se } K_s = 0,023.$$

$$A_s = K_s \frac{M_d}{d} = 0,023 \frac{2220}{46} = 1,11 \text{ cm}^2$$

Conforme a Tabela A-6, para seção retangular e concreto C25, a taxa mínima de armadura ( $\rho_{\min}$ ) deve ser de 0,15 %  $A_c$ , portanto<sup>5</sup>:

$$A_{s,\min} = 0,0015 \cdot 20 \cdot 50 = 1,50 \text{ cm}^2 > 1,11 \text{ cm}^2 \quad \rightarrow \quad \therefore A_{s,\min} = 1,50 \text{ cm}^2$$

<sup>5</sup> Geralmente a armadura mínima resultante dos coeficientes da Tabela A-6 resulta maior que a armadura mínima calculada com o momento fletor mínimo. Porém, deve ser feita a verificação da maior armadura mínima.



Momento fletor máximo atuante na viga V2:  $M_k = -4.863 \text{ kN.cm}$

$$M_d = \gamma_f \cdot M_k = 1,4 \cdot (-4863) = -6.808 \text{ kN.cm}$$

Considerando como altura útil  $d = h - 4 \text{ cm} = 50 - 4 = 46 \text{ cm}$ :

$$K_c = \frac{b_w d^2}{M_d} = \frac{20 \cdot 46^2}{6808} = 6,2$$

na Tabela A-1 tem-se:  $\beta_x = 0,14 \leq 0,45$  (ok!),  $K_s = 0,024$  e dom. 2.

$$A_s = K_s \frac{M_d}{d} = 0,024 \frac{6808}{46} = 3,55 \text{ cm}^2 \geq A_{s,\min} = 1,50 \text{ cm}^2 \quad (\text{ok!})$$

$$(2 \phi 16 \text{ mm} \rightarrow 4,00 \text{ cm}^2 \text{ ou } 3 \phi 12,5 \rightarrow 3,75 \text{ cm}^2)$$

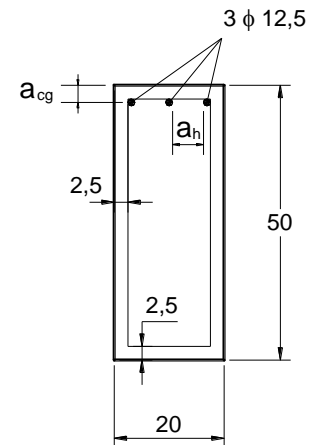
Se adotados  $3 \phi 12,5$  em uma mesma camada, a distância livre entre as barras deve ser suficiente para a passagem da agulha do vibrador, para adensamento do concreto. Considerando vibrador com  $\phi_{ag} = 25 \text{ mm}$  e  $\phi_t = 5 \text{ mm}$  (diâmetro do estribo):

$$a_h = \frac{20 - [2(2,5 + 0,5) + 3 \cdot 1,25]}{2} = 5,1 \text{ cm} > 25 \text{ mm} \quad (\text{ok!})$$

Posição do centro de gravidade da armadura:

$$a_{cg} = 2,5 + 0,5 + 1,25/2 = 3,6 \text{ cm}$$

→ foi adotado 4 cm para cálculo da altura útil, coerente com o valor calculado de 3,6 cm.



### b3) Armadura de pele

Como a viga não tem altura superior a 60 cm, a armadura de pele não é necessária, segundo a NBR 6118. Porém, a fim de evitar possíveis fissuras no concreto por efeito de retração, que podem surgir mesmo em vigas com altura de 50 cm, será colocada uma armadura de pele, com área de  $0,05 \% A_c$ <sup>6</sup> em cada face da viga:

$$A_{s,pele} = 0,0005 \cdot 20 \cdot 50 = 0,50 \text{ cm}^2$$

$4 \phi 4,2 \text{ mm}$  ( $0,56 \text{ cm}^2$ ) em cada face, distribuídos ao longo da altura (ver Figura 38).

### b4) Dimensionamento à força cortante

A resolução da viga à força cortante será feita mediante as equações simplificadas desenvolvidas e apresentadas em BASTOS (2021)<sup>7</sup>. Para a seção retangular da viga será considerado o Modelo de Cálculo II, com ângulo  $\theta$ <sup>8</sup> de  $38^\circ$  para a inclinação das diagonais de compressão, e o estribo será vertical.

As forças cortantes atuantes são:

$$V_k = 52,4 \text{ kN.cm} \quad \rightarrow \quad V_{sd} = \gamma_f \cdot V_k = 1,4 \cdot 52,4 = 73,4 \text{ kN}$$

#### b4.1) Verificação das diagonais de compressão

<sup>6</sup> Esta área da armadura de pele era indicada pela NBR 6118 de 1980, e corresponde à metade da armadura de pelo preconizada pela versão de 2014 da norma.

<sup>7</sup> BASTOS, P.S.S. *Dimensionamento de vigas de concreto armado à força cortante*. Bauru/SP, Departamento de Engenharia Civil, Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2123 – Estruturas de Concreto II, Mar/2021, 75p. Disponível em: [http://wwwwp.feb.unesp.br/pbastos/pag\\_concreto2.htm](http://wwwwp.feb.unesp.br/pbastos/pag_concreto2.htm)

<sup>8</sup> O Modelo de Cálculo II com  $\theta = 38^\circ$  conduz a uma armadura transversal muito próxima àquela resultante do Modelo de Cálculo I, onde  $\theta$  é fixo em  $45^\circ$ . O estudante deve fazer o cálculo aplicando o M. C. I, a fim de comparar os resultados.

Da Tabela A-5 anexa, para o concreto C25, determina-se a força cortante máxima a que a viga pode ser submetida:

$$V_{Rd2} = 0,87 b_w \cdot d \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta = 0,87 \cdot 20 \cdot 46 \cdot \sin 38 \cdot \cos 38 = 388,3 \text{ kN}$$

$$V_{Sd} = 73,4 \leq V_{Rd2} = 388,3 \text{ kN} \quad \rightarrow \text{ok! portanto, não ocorrerá o esmagamento do concreto nas diagonais de compressão.}$$

#### b4.2) Cálculo da armadura transversal

Da mesma Tabela A-5, para o concreto C25, a equação para determinar a força cortante correspondente à armadura mínima é:

$$V_{Sd, \min} = 0,040 \cdot b_w \cdot d \cdot \cotg \theta + V_{c1}$$

Com  $V_{c0}$ :

$$V_{c0} = 0,6 f_{ctd} b_w d = 0,6 \left( 0,7 \frac{0,3 \sqrt[3]{25^2}}{10 \cdot 1,4} \right) 20 \cdot 46 = 70,8 \text{ kN}$$

Como  $V_{Sd} = 73,4 \text{ kN}$  é maior que  $V_{c0}$ , deve-se calcular  $V_{c1}$  com a equação:

$$V_{c1} = V_{c0} \frac{V_{Rd2} - V_{Sd}}{V_{Rd2} - V_{c0}} \quad \rightarrow \quad V_{c1} = 70,8 \frac{388,3 - 73,4}{388,3 - 70,8} = 70,2 \text{ kN}$$

$$V_{Sd, \min} = 0,040 \cdot 20 \cdot 46 \cdot \cotg 38 + 70,2 = 117,3 \text{ kN}$$

$$V_{Sd} = 73,4 < V_{Sd, \min} = 117,3 \text{ kN} \quad \rightarrow \text{ portanto, deve-se dispor a armadura transversal mínima.}$$

Para CA-50, a armadura transversal mínima é:

$$A_{sw, \min} = \frac{20 f_{ct, m}}{f_{yk}} b_w \quad (\text{cm}^2/\text{m}), \text{ com } f_{ct, m} = 0,3 \sqrt[3]{f_{ck}^2} = 0,3 \sqrt[3]{25^2} = 2,56 \text{ MPa}$$

$$A_{sw, \min} = \frac{20 \cdot 0,256}{50} 20 = 2,05 \text{ cm}^2/\text{m}$$

#### b4.3) Detalhamento da armadura transversal

$$\text{- Diâmetro do estribo: } 5 \text{ mm} \leq \phi_t \leq b_w/10 \quad \rightarrow \quad \phi_t \leq 200/10 \leq 20 \text{ mm}$$

- Espaçamento máximo:

$$0,67 V_{Rd2} = 0,67 \cdot 388,3 = 260,2 \text{ kN}$$

$$V_{Sd} = 73,4 < 0,67 V_{Rd2} = 260,2 \text{ kN} \quad \rightarrow \quad s \leq 0,6 d \leq 30 \text{ cm}$$

$$0,6 d = 0,6 \cdot 46 = 27,6 \text{ cm} \quad \rightarrow \quad \text{Portanto, } s_{\max} = 27,6 \text{ cm}$$

Supondo estribo de dois ramos com diâmetro de 5 mm ( $2 \phi 5 \rightarrow 0,40 \text{ cm}^2$ ) tem-se:

$$\frac{0,40}{s} = 0,0205 \quad \rightarrow \quad s = 19,5 \text{ cm} \leq s_{\max} = 27,6 \text{ cm} \quad \rightarrow \text{ ok!}$$

#### b5) Ancoragem da armadura longitudinal negativa

A armadura negativa de flexão deve ser cuidadosamente ancorada na viga V1, pois o equilíbrio da viga V2 depende do perfeito engastamento na V1. Uma ancoragem inadequada pode resultar em sérios riscos de ruptura (ruína) da viga V2.

Conforme apresentado na apostila de BASTOS (2018)<sup>9</sup>, o comprimento de ancoragem básico deve ser calculado. Na Tabela A-7 e na Tabela A-8, anexas nesta apostila, constam os comprimentos de ancoragem dos aços CA-50 e CA-60.

Na Tabela A-7 (aço CA-50), para concreto C25, barra de diâmetro 12,5 mm em situação de má aderência, o comprimento de ancoragem básico (coluna sem gancho) resulta 67 cm.

Considerando que a armadura negativa calculada foi 3,55 cm<sup>2</sup> e que a armadura efetiva será composta por 3  $\phi$  12,5 (3,75 cm<sup>2</sup>), o comprimento de ancoragem corrigido, que leva em conta a diferença de áreas de armadura, é:

$$\ell_{b,corr} = \ell_b \frac{A_{s,anc}}{A_{s,ef}} = 67 \frac{3,55}{3,75} = 63,4 \text{ cm} \geq \ell_{b,mín} = 10,0 \text{ cm (ok!)}$$

onde o comprimento de ancoragem mínimo é:

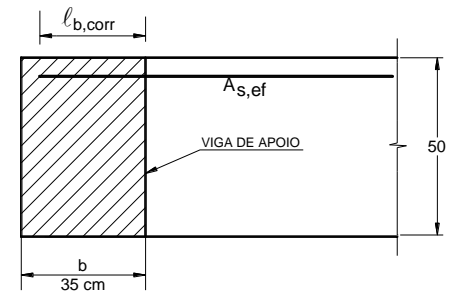
$$\ell_{b,mín} \geq \begin{cases} r + 5,5 \phi \\ 6 \text{ cm} \end{cases}$$

$$r = (D/2) = 5 \phi / 2 = 5 \cdot 1,25 / 2 = 3,1 \text{ cm}$$

(com D = diâmetro do pino de dobramento = 5 $\phi$ , apresentado na Tabela A-10)

$$r + 5,5 \phi = 3,1 + 5,5 \cdot 1,25 = 10,0 \text{ cm} > 6 \text{ cm}$$

$$\therefore \ell_{b,mín} = 10,0 \text{ cm}$$



O comprimento de ancoragem efetivo da viga de apoio (V1) é a largura da viga menos a espessura do cobrimento:  $\ell_{b,ef} = b - c = 35 - 2,5 = 32,5 \text{ cm}$ .

Verifica-se que o comprimento de ancoragem corrigido é maior que o comprimento de ancoragem efetivo:  $\ell_{b,corr} = 63,4 \text{ cm} > \ell_{b,ef} = 32,5 \text{ cm}$ . Não é possível fazer a ancoragem dessa forma na viga de apoio. Uma solução para tentar resolver o problema é fazer o gancho na extremidade das barras. O comprimento de ancoragem com gancho é:

$$\ell_{b,gancho} = \alpha_1 \ell_{b,corr} = 0,7 \cdot 63,4 = 44,4 \text{ cm} \geq \ell_{b,mín} = 10,0 \text{ cm} \rightarrow \text{ok!}$$

Verifica-se que o comprimento de ancoragem com gancho é superior ao comprimento de ancoragem efetivo ( $\ell_{b,gancho} = 44,4 \text{ cm} > \ell_{b,ef} = 32,5 \text{ cm}$ ), de modo que o gancho não resolve o problema. Uma solução possível na sequência, entre outras, é aumentar a armadura a ancorar para  $A_{s,corr}$ , tal que:

$$A_{s,corr} = \frac{0,7 \ell_b}{\ell_{b,ef}} A_{s,anc} = \frac{0,7 \cdot 67}{32,5} 3,55 = 5,12 \text{ cm}^2$$

$$3 \phi 12,5 + 1 \text{ grampo } \phi 10 \rightarrow 3,75 + (2 \cdot 0,80) = 5,35 \text{ cm}^2$$

A Figura 38 mostra o detalhamento completo das armaduras da viga V2. O espaçamento dos estribos foi diminuído de 19,5 cm para 15 cm, a favor da segurança, com pequeno acréscimo no consumo de aço. A armadura de pele, embora não obrigatória neste caso, foi adotada. As barras longitudinais inferiores (N5), porta-estribos construtivas, foram adotadas  $\phi$  8 mm.

Para garantir uma melhor vinculação (engastamento) da viga V2 na V1, as barras N2 foram desenhadas na forma de um estribo fechado, para melhor ancoragem na viga V1. É importante que as barras N2 fiquem posicionadas sobre as barras longitudinais superiores negativas da viga V1, de modo a “laçar” essas barras.

<sup>9</sup> BASTOS, P.S.S. *Ancoragem e emenda de armaduras*. Bauru/SP, Departamento de Engenharia Civil, Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2123 – Estruturas de Concreto II, Mar/2018, 41p. ([http://wwwwp.feb.unesp.br/pbastos/pag\\_concreto2.htm](http://wwwwp.feb.unesp.br/pbastos/pag_concreto2.htm)).

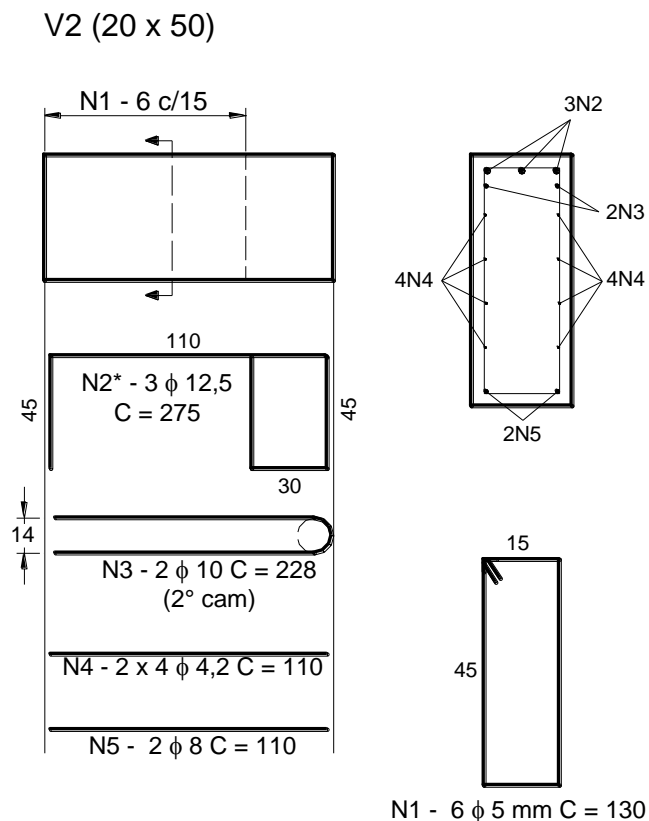


Figura 38 – Detalhamento final com as armaduras da viga V2.

c) Cálculo e dimensionamento da viga V1 (35 x 50)

A viga V1 deve estar obrigatoriamente engastada no pilar P1, como demonstrado no esquema estático (Figura 39). O carregamento consiste no próprio peso e nas ações provenientes da viga V2 (força vertical concentrada e momento torçor).

c1) Esforços solicitantes máximos

Força cortante:

$$V_k = 4,375 \cdot 1,65 + 52,4 = 59,6 \text{ kN}$$

Momento fletor:

$$M_k = \frac{4,375 \cdot 1,65^2}{2} + 52,4 \cdot 1,65$$

$$M_k = 92,42 \text{ kN.m} = 9.242 \text{ kN.cm}$$

Momento de torção:

$$T_k = 4.863 \text{ kN.cm (constante ao longo da viga)}$$

Verifica-se que os esforços solicitantes acima são idênticos àqueles obtidos no cálculo segundo o modelo de grelha (Figura 36).

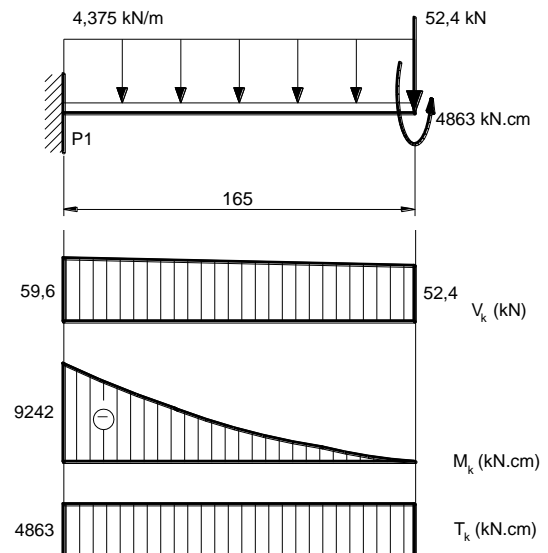


Figura 39 – Esquema estático, carregamento e esforços solicitantes na viga VI.

### c2) Dimensionamento à flexão

A armadura mínima de flexão é calculada para o momento fletor mínimo, de acordo com:

$$M_{d,\min} = 0,8 W_0 f_{ctk,\sup} \quad , \quad f_{ctk,\sup} = 3,33 \text{ MPa (já calculado para a viga V2)}$$

$$I = \frac{b h^3}{12} = \frac{35 \cdot 50^3}{12} = 364.583 \text{ cm}^4$$

$$W_0 = \frac{I}{y} = \frac{364583}{25} = 14.583 \text{ cm}^3$$

no estágio I, para seção retangular y é tomado na meia altura da viga.

$$M_{d,\min} = 0,8 \cdot 14583 \cdot 0,333 = 3.885 \text{ kN.cm}$$

Dimensionamento da armadura para o momento fletor mínimo:

$$K_c = \frac{b_w d^2}{M_d} = \frac{35 \cdot 46^2}{3885} = 19,1 \quad \rightarrow \quad \text{da Tabela A-1 tem-se } K_s = 0,023$$

$$A_s = K_s \frac{M_d}{d} = 0,023 \frac{3885}{46} = 1,94 \text{ cm}^2$$

Conforme a Tabela A-6, para seção retangular e concreto C25, a taxa mínima de armadura ( $\rho_{\min}$ ) deve ser de 0,15 %  $A_c$ , portanto:

$$A_{s,\min} = 0,0015 \cdot 35 \cdot 50 = 2,63 \text{ cm}^2 > 1,94 \text{ cm}^2 \quad \rightarrow \quad \therefore A_{s,\min} = 2,63 \text{ cm}^2$$

O momento fletor solicitante característico máximo na viga V1 é - 9.242 kN.cm. O momento fletor de cálculo é:

$$M_d = 1,4 \cdot (-9.242) = -12.939 \text{ kN.cm}$$

$$K_c = \frac{b_w d^2}{M_d} = \frac{35 \cdot 46^2}{12939} = 5,7$$

da Tabela A-1:  $\beta_x = 0,16 \leq 0,45$  (ok!),  $K_s = 0,025$  e domínio 2.

$$A_s = 0,025 \frac{12939}{46} = 7,03 \text{ cm}^2 \geq A_{s,\text{mín}} = 2,63 \text{ cm}^2 \quad (\text{ok!})$$

$$(5 \phi 12,5 + 1 \phi 10 \rightarrow 7,05 \text{ cm}^2)$$

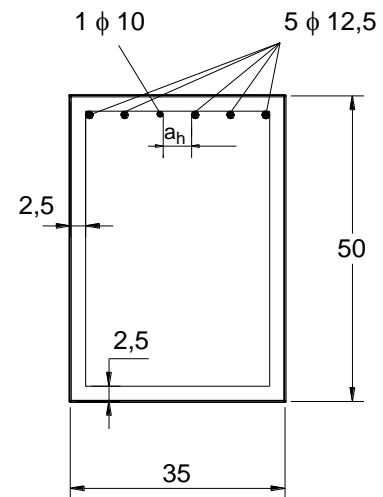
Supondo  $\phi_t = 10$  mm, o espaçamento livre entre as barras é:

$$a_h = \frac{35 - [2(2,5 + 1,0) + 5 \cdot 1,25 + 1,0]}{5} = 4,2 \text{ cm}$$

espaço livre suficiente para a passagem da agulha do vibrador supondo  $\phi_{ag} = 25$  mm.

A posição do centro de gravidade da armadura é:

$$a_{cg} = 2,5 + 1,0 + 1,25/2 = 4,1 \text{ cm} \quad (\text{foi adotado } 4 \text{ cm para determinação da altura útil})$$



### c3) Armadura de pele

A armadura de pele não é necessária porque a viga não tem altura superior a 60 cm. A armadura para a torção que será colocada nas faces laterais da viga poderá também contribuir para evitar fissuras por retração do concreto.

### c4) Dimensionamento à força cortante

Como já feito para a viga V2, no cálculo da armadura transversal será considerado o Modelo de Cálculo II, com ângulo  $\theta$  de  $38^\circ$ , com aplicação de equações simplificadas para estribos verticais.

$$V_k = 59,6 \text{ kN.cm}$$

$$V_{Sd} = \gamma_f \cdot V_k = 1,4 \cdot 59,6 = 83,4 \text{ kN}$$

#### C4.1) Verificação das diagonais de compressão

Na Tabela A-5, para o concreto C25, determina-se a força cortante máxima:

$$V_{Rd2} = 0,87 b_w \cdot d \cdot \text{sen } \theta \cdot \cos \theta = 0,87 \cdot 35 \cdot 46 \cdot \text{sen } 38 \cdot \cos 38 = 679,5 \text{ kN}$$

$$V_{Sd} = 83,4 \leq V_{Rd2} = 679,5 \text{ kN} \quad \rightarrow \text{ok! portanto, não ocorrerá o esmagamento do concreto nas diagonais de compressão.}$$

#### c4.2) Cálculo da armadura transversal

Da mesma Tabela A-5, para o concreto C25, a equação para determinar a força cortante correspondente à armadura mínima é:

$$V_{Sd,\text{mín}} = 0,040 \cdot b_w \cdot d \cdot \cotg \theta + V_{c1}$$

Com  $V_{c0}$  :

$$V_{c0} = 0,6 f_{ctd} b_w d = 0,6 \left( 0,7 \frac{0,3 \sqrt[3]{25^2}}{10 \cdot 1,4} \right) 35 \cdot 46 = 123,9 \text{ kN}$$

como  $V_{Sd} = 83,4 \text{ kN} < V_{c0} = 123,9 \text{ kN}$  tem-se que  $V_{c1} = V_{c0} = 123,9 \text{ kN}$

$$V_{Sd,\text{mín}} = 0,040 \cdot 35 \cdot 46 \cdot \cotg 38 + 123,9 = 206,3 \text{ kN}$$

$$V_{Sd} = 83,4 \text{ kN} < V_{Sd,\text{mín}} = 206,3 \text{ kN} \quad \rightarrow \text{portanto, deve-se dispor a armadura transversal mínima.}$$

A armadura mínima é:

$$A_{sw,min} = \frac{20 f_{ct,m}}{f_{ywk}} b_w \quad (\text{cm}^2/\text{m}), \text{ com } f_{ct,m} = 0,3 \sqrt[3]{f_{ck}^2} = 0,3 \sqrt[3]{25^2} = 2,56 \text{ MPa}$$

$$A_{sw,min} = \frac{20 \cdot 0,256}{50} 35 = 3,58 \text{ cm}^2/\text{m} = 0,0358 \text{ cm}^2/\text{cm}$$

#### c4.3) Detalhamento da armadura transversal

- Diâmetro do estribo:  $5 \text{ mm} \leq \phi_t \leq b_w/10 \rightarrow \phi_t \leq 350/10 \leq 35 \text{ mm}$
- Espaçamento máximo entre os estribos:
  - $0,67V_{Rd2} = 0,67 \cdot 679,5 = 455,3 \text{ kN}$
  - $V_{Sd,max} = 83,4 < 455,3 \text{ kN} \rightarrow s \leq 0,6 d \leq 30 \text{ cm}$
  - $0,6 d = 0,6 \cdot 46 = 27,6 \text{ cm} \rightarrow \text{Portanto, } s_{m\acute{a}x} = 27,6 \text{ cm}$
- Espaçamento máximo entre os ramos verticais dos estribos:
  - $0,20V_{Rd2} = 0,20 \cdot 679,5 = 135,9 \text{ kN}$
  - $V_{Sd,max} = 83,4 \text{ kN} < 135,9 \text{ kN} \rightarrow s_t = d \leq 80 \text{ cm}$

#### c5) Ancoragem da armadura longitudinal negativa

A armadura longitudinal negativa calculada para a viga, de  $7,03 \text{ cm}^2$ , é a armadura a ancorar no pilar, que tem seção transversal 35/60. Para essa área, o arranjo de barras escolhido é composto de  $5 \phi 12,5 + 1 \phi 10$ , com área de  $7,05 \text{ cm}^2$  ( $A_{s,ef}$ ).

Conforme a Tabela A-7, para concreto C25, CA-50 (barra de alta aderência) e situação de má aderência para a armadura negativa, o comprimento de ancoragem básico (coluna sem gancho) é 67 cm para  $\phi 12,5 \text{ mm}$  (coluna sem gancho).

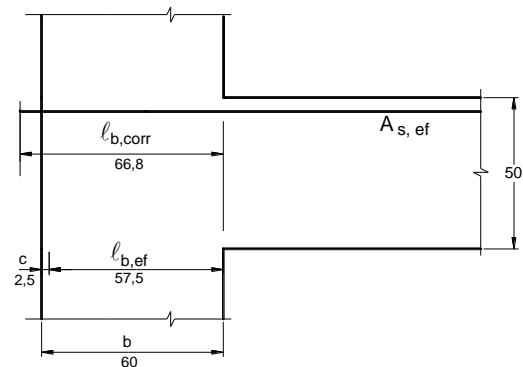
Devido à diferença entre a área de armadura calculada e a efetiva, o comprimento de ancoragem pode ser corrigido para:

$$\ell_{b,corr} = \ell_b \frac{A_{s,anc}}{A_{s,ef}} = 67 \frac{7,03}{7,05} = 66,8 \text{ cm}$$

$$\ell_{b,corr} = 66,8 \text{ cm} \geq \ell_{b,m\acute{i}n} = 10,0 \text{ cm} \rightarrow \text{ok!}$$

O comprimento de ancoragem efetivo do pilar é:

$$\ell_{b,ef} = b - c = 60 - 2,5 = 57,5 \text{ cm}$$



O comprimento de ancoragem mínimo é o mesmo da viga V2 para  $\phi 12,5 \text{ mm}$ ,  $\ell_{b,m\acute{i}n} = 10,0 \text{ cm}$ . Verifica-se que o comprimento de ancoragem corrigido, sem gancho, é superior ao comprimento de ancoragem efetivo ( $\ell_{b,corr} = 66,8 \text{ cm} > \ell_{b,ef} = 57,5 \text{ cm}$ ), que não possibilita fazer a ancoragem reta no pilar. A primeira alternativa para resolver o problema é fazer gancho na extremidade das barras, reduzindo o comprimento corrigido para:

$$\ell_{b,gancho} = 0,7 \cdot 66,8 = 46,8 \text{ cm}$$

O comprimento de ancoragem com gancho é inferior ao comprimento de ancoragem efetivo ( $\ell_{b,gancho} = 46,8 \text{ cm} < \ell_{b,ef} = 57,5 \text{ cm}$ ), o que possibilita fazer a ancoragem no pilar, sem a necessidade de acréscimo de armadura. Conclui-se que a ancoragem pode ser feita com  $5 \phi 12,5 + 1 \phi 10$ , com gancho na extremidade das barras, penetrando as barras em 46,8 cm dentro do pilar. No entanto, a favor da segurança, a armadura negativa pode ser estendida no comprimento de  $\ell_{b,ef}$  dentro do pilar, como mostrado na Figura 40.

c6) Dimensionamento à torção

O momento de torção característico ( $T_k$ ) é 4.863 kN.cm e o momento de cálculo é:

$$T_{sd} = 1,4 \cdot 4863 = 6.808 \text{ kN.cm}$$

c6.1) Verificação das diagonais comprimidas

Área da seção transversal:  $A = b_w \cdot h = 35 \cdot 50 = 1.750 \text{ cm}^2$

Perímetro da seção transversal:  $u = 2 (b_w + h) = 2 (35 + 50) = 170 \text{ cm}$

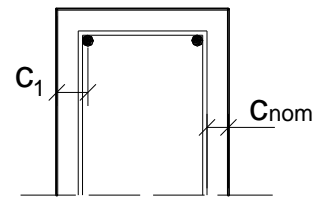
A Eq. 19 e a Eq. 20 fornecem os limites para a espessura  $h_e$  da parede fina:

$$h_e \leq \frac{A}{u} = \frac{1750}{170} = 10,3 \text{ cm} \quad \text{e} \quad h_e \geq 2 c_1$$

Supondo  $\phi_l = 12,5 \text{ mm}$ ,  $\phi_t = 10 \text{ mm}$  e com  $c_{nom} = 2,5 \text{ cm}$  tem-se:

$$c_1 = \phi_l/2 + \phi_t + c_{nom} = 1,25/2 + 1,0 + 2,5 = 4,125 \text{ cm}$$

$$h_e \geq 2 \cdot 4,125 = 8,3 \text{ cm}$$

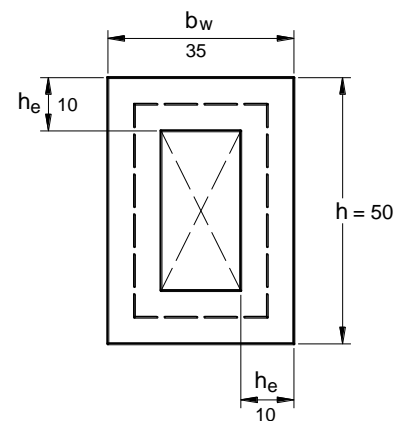


Portanto, os limites para  $h_e$  são:  $8,3 \text{ cm} \leq h_e \leq 10,3 \text{ cm}$ . Será adotado  $h_e = 10,0 \text{ cm}$ .

A área efetiva e o perímetro do eixo da parede fina são:

$$A_e = (b_w - h_e) \cdot (h - h_e) = (35 - 10) \cdot (50 - 10) = 1.000 \text{ cm}^2$$

$$u_e = 2 [(b_w - h_e) + (h - h_e)] = 2 [(35 - 10) + (50 - 10)] = 130 \text{ cm}$$



O momento torçor máximo, determinado pela Eq. 22, com ângulo  $\theta$  ( $38^\circ$ ) igual ao aplicado no cálculo da viga à força cortante<sup>10</sup> é:

$$T_{Rd,2} = 0,5 \alpha_{v2} f_{cd} A_e h_e \sen 2 \theta = 0,5 (1 - 25/250) \cdot (2,5/1,4) 1000 \cdot 10 \cdot \sen 2 \cdot 38 = 7.797 \text{ kN.cm}$$

Para não ocorrer o esmagamento do concreto nas diagonais comprimidas de concreto, conforme a Eq. 34 deve-se ter:

$$\frac{V_{sd}}{V_{Rd2}} + \frac{T_{sd}}{T_{Rd2}} \leq 1$$

Como calculado no item c4.1, os valores de  $V_{Rd2}$  e  $V_{sd}$  são 679,5 kN e 83,4 kN, respectivamente. Aplicando a Eq. 34 tem-se:

<sup>10</sup> O ângulo  $\theta$  deve ser igual ao utilizado no cálculo da armadura transversal para a força cortante.



$$\frac{83,4}{679,5} + \frac{6808}{7797} = 1,0 \leq 1,0 \rightarrow \text{ok!}$$

Como a equação foi satisfeita não ocorrerá o esmagamento do concreto nas bielas de compressão. Caso resultasse valor superior à unidade, haveria a necessidade de se fazer alguma alteração. O aumento da largura ou da altura da viga são soluções comumente utilizadas na prática, sendo que o aumento da largura da viga é muito mais efetivo em aumentar a resistência à torção. Porém, há restrição no caso de viga embutida em parede, pois a viga pode ficar aparente com uma largura maior que a da parede.

### c6.2) Cálculo das armaduras para torção

As armaduras mínimas para torção, longitudinal e transversal, são (Eq. 32):

$$A_{s\ell, \text{mín}} = \frac{20 f_{ct,m}}{f_{ywk}} h_e = \frac{20 \cdot 0,256}{50} 10 = 1,03 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$A_{s,90\text{mín}} = \frac{20 f_{ct,m}}{f_{ywk}} b_w = \frac{20 \cdot 0,256}{50} 35 = 3,58 \text{ cm}^2/\text{m}$$

com  $f_{ct,m} = 0,3 \sqrt[3]{f_{ck}^2} = 0,3 \sqrt[3]{25^2} = 2,56 \text{ MPa}$  (resistência média do concreto à tração direta).

Armadura longitudinal conforme a Eq. 27:

$$\frac{A_{s\ell}}{u_e} = \frac{T_{Sd}}{2 A_e f_{ywd} \text{tg } \theta} = \frac{6808}{2 \cdot 1000 \frac{50}{1,15} \text{tg } 38} = 0,1002 \text{ cm}^2/\text{cm}$$

com  $u_e = 1 \text{ m} = 100 \text{ cm} \rightarrow A_{s\ell} = 10,02 \text{ cm}^2/\text{m} \geq A_{s\ell, \text{mín}} = 1,03 \text{ cm}^2/\text{m} \rightarrow \text{ok!}$

Armadura transversal composta por estribos a 90° conforme a Eq. 24:

$$\frac{A_{s,90}}{s} = \frac{T_{Sd}}{2 A_e f_{ywd}} \text{tg } \theta = \frac{6808}{2 \cdot 1000 \frac{50}{1,15}} \text{tg } 38 = 0,0612 \text{ cm}^2/\text{cm}$$

com  $s = 1 \text{ m} = 100 \text{ cm} \rightarrow A_{s,90} = 6,12 \text{ cm}^2/\text{m} \geq A_{s,90\text{mín}} = 3,58 \text{ cm}^2/\text{m} \rightarrow \text{ok!}$

### c6.3) Detalhamento das armaduras

#### c6.3.1) Armadura longitudinal

A área de armadura longitudinal a ser distribuída ao longo do vão da viga pode ser obtida pela soma das armaduras de flexão e de torção. Como se observa nos diagramas de momentos fletores e momentos torçores (Figura 36 e Figura 39), por simplicidade pode ser analisada apenas a seção onde ocorrem simultaneamente os momentos máximos (M e T), que é a seção de apoio (engaste da viga no pilar). A armadura longitudinal total, determinada na seção de apoio, pode ser estendida ao longo de todo o vão, até a extremidade livre, a favor da segurança, dado que o momento fletor diminui.

A armadura longitudinal total, considerando apenas a torção, é aquela relativa ao perímetro  $u_e$ :

$$\frac{A_{s\ell}}{u_e} = 0,1002 \text{ cm}^2/\text{cm} \rightarrow \text{com } u_e = 130,0 \text{ cm: } A_{s\ell, \text{tot}} = 0,1002 \cdot 130,0 = 13,03 \text{ cm}^2$$

Esta área deve ser distribuída nas quatro faces da seção retangular da viga, proporcionalmente, conforme a NBR 6118, e observe que relativamente a  $u_e$ , que é o perímetro do eixo da parede fina, cuja espessura neste caso é  $h_e$ .

*Face superior:*

- da flexão:  $A_s = 7,03 \text{ cm}^2$
- da torção:  $A_s = (b_w - h_e) A_{s\ell} = (35 - 10) 0,1002 = 2,51 \text{ cm}^2$
- $A_{s,\text{total}} = 7,03 + 2,51 = 9,54 \text{ cm}^2$  ( $8 \phi 12,5 \rightarrow 10,00 \text{ cm}^2$ )

*Face inferior:*

- da flexão:  $A_s = 0,00 \text{ cm}^2$
- da torção:  $A_s = (b_w - h_e) A_{s\ell} = (35 - 10) 0,1002 = 2,51 \text{ cm}^2$
- $A_{s,\text{total}} = 2,51 \text{ cm}^2$  ( $4 \phi 10 \text{ mm} \rightarrow 3,20 \text{ cm}^2$ )

*Faces laterais:*

- $A_{s,\text{total}} = (h - h_e) A_{s\ell} = (50 - 10) 0,1002 = 4,01 \text{ cm}^2$  ( $5 \phi 10 \text{ mm} \rightarrow 4,00 \text{ cm}^2$ )

É importante ressaltar que devem ser dispostos  $5 \phi 10 \text{ mm}$  em ambas as faces laterais da viga. Esta armadura pode atuar também para restringir as fissuras no concreto por efeito de retração, não sendo necessário acrescentar armadura de pele, embora neste caso a norma não a exija, porque a viga não tem altura superior a 60 cm.

Para uma conferência da armadura longitudinal de torção, pode-se determinar a armadura total em função da armadura calculada para as faces da viga:

$$A_{s\ell,\text{tot}} = 2(2,51 + 4,01) = 13,04 \text{ cm}^2 \rightarrow \text{ok!}$$

### c6.3.2) Armadura transversal

A área total de estribos verticais é calculada pela soma das áreas relativas à força cortante e à torção. A armadura para a força cortante resultou igual à armadura mínima, de  $0,0358 \text{ cm}^2/\text{cm}$ . Considerando o estribo composto por dois ramos verticais, e que a área mínima para a força cortante, para um ramo vertical, é  $0,0358/2 = 0,0179 \text{ cm}^2/\text{m}^2$ , a armadura transversal total é:

$$\frac{A_{s,\text{tot}}}{s} = \frac{A_{sw,\text{ramo}}}{s} + \frac{A_{s,90}}{s} = 0,0179 + 0,0612 = 0,0791 \text{ cm}^2/\text{cm}$$

O diâmetro do estribo para a torção deve ser igual ou superior a 5 mm e inferior a  $b_w/10 = 350/10 = 35 \text{ mm}$ . Fazendo estribo fechado de dois ramos com diâmetro de 6,3 mm ( $1 \phi 6,3 \text{ mm} \rightarrow 0,31 \text{ cm}^2$ ) tem-se:

$$\frac{0,31}{s} = 0,0791 \rightarrow s = 3,9 \text{ cm} \leq s_{\text{máx}} = 27,6 \text{ cm} \rightarrow \text{ok!}$$

O espaçamento resultou muito pequeno, pois deve ser suficiente para a passagem da agulha do vibrador, com uma certa folga. A recomendação é de que seja pelo menos 7 ou 8 cm, para permitir a penetração do concreto com facilidade.

Fazendo com diâmetro de 8 mm ( $1 \phi 8 \text{ mm} \rightarrow 0,50 \text{ cm}^2$ ) encontra-se:

$$\frac{0,50}{s} = 0,0791 \rightarrow s = 6,3 \text{ cm} \leq s_{\text{máx}} = 27,6 \text{ cm} \rightarrow \text{ok!}$$

O espaçamento ainda está pequeno. Fazendo com diâmetro de 10 mm ( $1 \phi 10 \text{ mm} \rightarrow 0,80 \text{ cm}^2$ ) encontra-se:

$$\frac{0,80}{s} = 0,0791 \rightarrow s = 10,1 \text{ cm} \leq s_{\text{máx}} = 27,6 \text{ cm} \rightarrow \text{ok!}$$

portanto, será adotado estribo com dois ramos  $\phi 10 \text{ mm}$  c/10 cm.

A Figura 40 mostra o detalhamento final das armaduras da viga V1. Como visto, as armaduras para o momento fletor, para a força cortante e para a torção foram calculadas separadamente e somadas na fase final.

O comprimento do gancho das barras N2 foi aumentado de 10 cm ( $8\phi \rightarrow 8 \cdot 1,25 = 10 \text{ cm}$ ) para 40 cm, para garantir uma melhor ancoragem da armadura no pilar. Esta armadura substitui o arranjo de  $5 \phi 12,5 + 1 \phi 10$ , conforme definidos no item c.5.

O espaçamento entre as barras longitudinais para torção não deve superar 35 cm, o que se verifica no detalhamento.

Como a viga V2 está apoiada na viga V1, convém posicionar as barras N2 da V2 sobre as barras N2 da V1, obedecendo ao cobrimento de concreto.

Os ganchos nas extremidades dos estribos da V1 devem ser inclinados a 45°, como prescrito pela NBR 6118, e com comprimento de  $5\phi \geq 5$  cm.

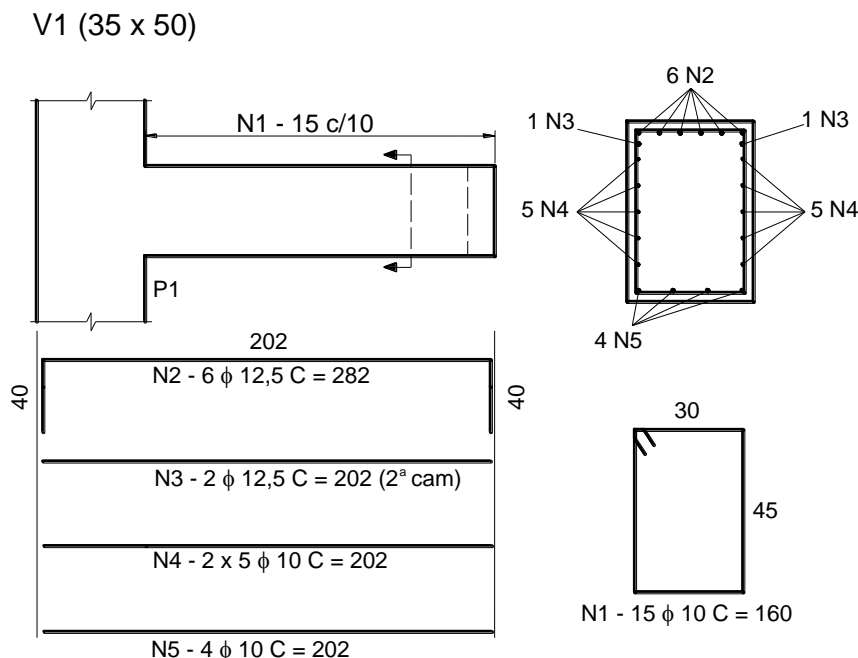


Figura 40 – Detalhamento final das armaduras da viga V1.

## 14.2 Exemplo 2

Este exemplo refere-se ao projeto estrutural de uma laje em balanço (marquise) engastada na viga de apoio. A marquise tem a função arquitetônica de proteger o hall de entrada de uma edificação. A Figura 41 mostra uma perspectiva da estrutura. A Figura 42 e a Figura 43 mostram a planta de fôrma da estrutura e o pórtico do qual a marquise faz parte. Este exemplo toma como base aquele apresentado em GIONGO (1994). Para a estrutura pede-se calcular e dimensionar as armaduras da viga V1.

As seguintes informações são conhecidas:

- marquise (estrutura em balanço composta pela laje L3 e as vigas V2, V3 e V6) acessível a pessoas apenas para serviços de construção e manutenção;
- o coeficiente de ponderação das ações permanentes e variáveis ( $\gamma_f$ ) será tomado como 1,4 (Tabela 11.1 da NBR 6118). O coeficiente de ponderação do concreto ( $\gamma_c$ ) será tomado como 1,4 e o do aço ( $\gamma_s$ ) como 1,15 (Tabela 12.1 da NBR 6118);
- lajes e vigas da marquise em concreto aparente (sem revestimentos);
- sobre toda extensão da viga V1 há uma parede de alvenaria de bloco cerâmico de oito furos, com espessura final de 23 cm (2 cm de revestimento de argamassa de cada lado), altura de 2,60 m, com peso específico ( $\gamma_{alv}$ ) de 3,2 kN/m<sup>2</sup>;
- peso específico do concreto com armadura passiva:  $\gamma_{concr} = 25$  kN/m<sup>3</sup>;
- espessura média de 3 cm para a camada de impermeabilização e regularização sobre a laje da marquise (L3), com argamassa de peso específico  $\gamma_{arg,imp} = 21$  kN/m<sup>3</sup>;
- vigas V2, V3 e V6 são consideradas sem função estrutural, como componentes da estética da marquise;
- aço CA-50;
- classe II de agressividade ambiental (Tabela 6.1 da NBR 6118), o que leva ao concreto C25 ( $f_{ck} = 25$  MPa) no mínimo, e relação  $a/c \leq 0,60$  (Tabela 7.1 da NBR 6118),  $c_{nom} = 2,5$  cm para  $\Delta c = 5$  mm (Tabela 7.2 da NBR 6118);
- carga das lajes interna (L1 e L2) na viga V1:  $p_{laje} = 5,0$  kN/m.

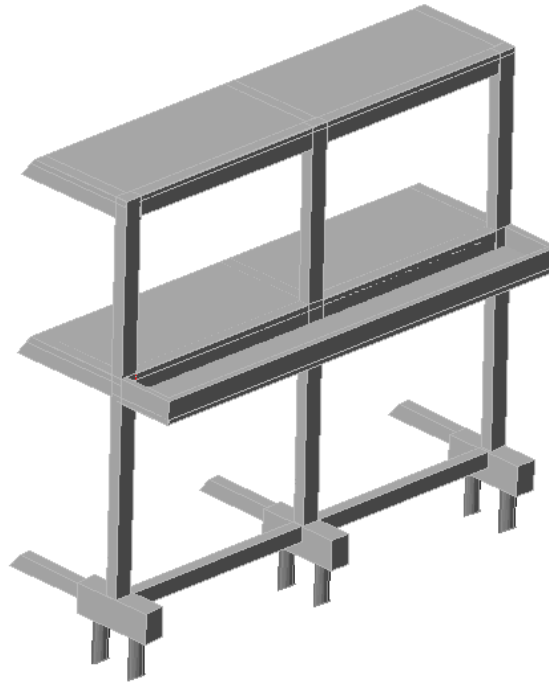


Figura 41 – Perspectiva da estrutura.

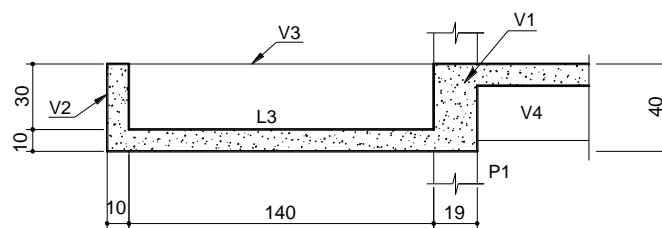
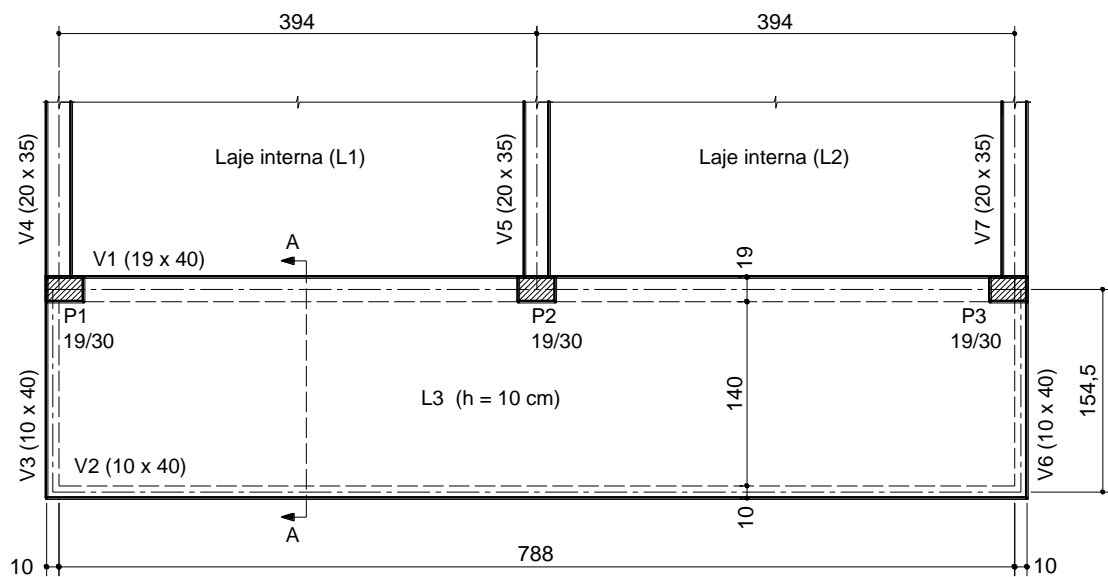


Figura 42 – Planta de fôrma e corte da marquise.<sup>11</sup>

<sup>11</sup> A planta de fôrma da estrutura é desenhada com o observador posicionado no nível inferior à estrutura que se quer mostrar e olhando para cima. Como as vigas V1, V3 e V6 são invertidas, os traços de uma das faces das vigas estão desenhados com linha tracejada.

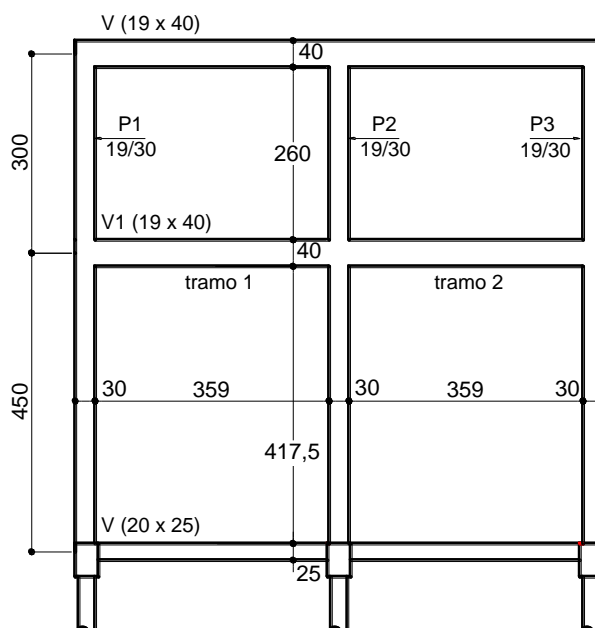


Figura 43 – Vista do pórtico com a viga V1.

## RESOLUÇÃO

Como a laje (L3) da marquise em balanço está em um nível inferior ao das lajes internas (L1 e L2) na edificação, não é possível considerar alguma vinculação entre as lajes, ou seja, a laje em balanço, não tendo continuidade física com as lajes internas, não pode ser considerada engastada nas lajes internas. A única alternativa neste caso é engastar a laje L3 na viga V1.

A flexão na laje em balanço age como momento de torção externo aplicado uniformemente distribuído ao longo da viga V1, o que origina o esforço solicitante de momento de torção (T) na viga, o qual deve ser obrigatoriamente considerado no projeto e dimensionamento da V1, ainda que as lajes internas L1 e L2 restrinjam a torção aplicada na V1.

Os momentos de torção (T) na viga V1 tornam-se momentos fletores atuantes nos pilares P1, P2 e P3, devendo ser computados no dimensionamento desses pilares.

No caso de se desejar evitar a torção na viga V1, uma solução possível seria prolongar as vigas V4, V5 e V7 até a extremidade livre da laje L3 em balanço, que passariam a ser responsáveis pelo equilíbrio da laje. A laje, por sua vez, subdividida em duas, passaria a atuar como duas lajes apoiadas nas vigas de borda, sem engastamento na viga V1, e portanto, sem atuação de torção na viga. Outra solução seria o engastamento da laje L3 nas lajes internas L1 e L2, possível apenas se as lajes estivessem com a face superior no mesmo nível, o que também eliminaria a torção na viga V1.

Inicialmente será apresentado o dimensionamento da laje L3, e em seguida o dimensionamento da viga V1.

### a) Dimensionamento da laje L3

Na laje ocorrem ações uniformemente distribuídas na área da laje e linearmente distribuídas no contorno externo da laje, representadas pelas cargas das vigas V2, V3 e V6. A altura da laje L3 é de 10 cm.

#### a1) Ações uniformemente distribuídas na área

As cargas atuantes na laje são as seguintes:

- peso próprio:  $g_{pp} = 25 \cdot 0,10 = 2,50 \text{ kN/m}^2$
- impermeabilização:  $g_{imp} = 21 \cdot 0,03 = 0,63 \text{ kN/m}^2$
- ação variável:  $q = 0,5 \text{ kN/m}^2$  (laje sem acesso público)
- **CARGA TOTAL (p) = 3,63 kN/m<sup>2</sup>**

### a2) Ações uniformemente distribuídas no contorno

No contorno da laje L3 há a ação do peso próprio das vigas V2, V3 e V6, em concreto aparente:

$$- g_{pp,vigas} = 25 \cdot 0,10 \cdot 0,30 = 0,75 \text{ kN/m}$$

### a3) Cálculo dos esforços solicitantes

A laje L3 está engastada na viga V1, e como a laje é armada em uma direção ( $\lambda = \ell_y / \ell_x = 798/153 = 5,2 > 2$ ), os esforços solicitantes são calculados supondo-se a laje como viga de largura unitária (1 m), Figura 44.

Com vão livre  $\ell_o$  de 150 cm, o vão efetivo da laje é:

$$a_1 \leq \begin{cases} t_1 / 2 = 19 / 2 = 9,5 \text{ cm} \\ 0,3h = 0,3 \cdot 10 = 3 \text{ cm} \end{cases} \quad \therefore a_1 = 3 \text{ cm} \quad , (a_2 = 0)$$

$$\ell_{ef} = \ell_o + a_1 = 150 + 3 = 153 \text{ cm}$$

Os esforços solicitantes máximos são:

$$M = - \left( \frac{3,63 \cdot 1,53^2}{2} + 0,75 \cdot 1,48 \right) = - 5,36 \text{ kN.m/m}$$

$$V = - (3,63 \cdot 1,53 + 0,75) = - 6,30 \text{ kN/m}$$

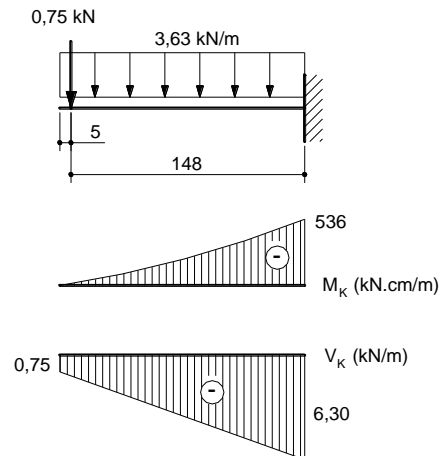


Figura 44 – Esquema estático, carregamento e esforços solicitantes máximos na laje L3.

### a4) Verificação da laje à força cortante

A laje deve ser verificada quanto à necessidade ou não de armadura transversal. De modo geral as lajes maciças com cargas totais baixas, como neste caso, não requerem armadura transversal, e por isso, o cálculo não será apresentado.<sup>12</sup>

### a5) Determinação da armadura longitudinal de flexão na laje

Considerando que a laje L3 terá uma argamassa de impermeabilização assentada na face superior, para proteção da laje e principalmente da armadura negativa, o cobrimento será considerado 2,0 cm. Supondo  $\phi$  de 6,3 mm, a altura útil  $d$  é:

$$d = h - c - \phi/2 = 10 - 2,0 - 0,63/2 = 7,7 \text{ cm}$$

A determinação da armadura principal negativa, posicionada perpendicularmente ao eixo longitudinal da viga V1 e junto à face superior da laje, considerando a altura útil  $d$  é:

$$K_c = \frac{b_w d^2}{M_d} = \frac{100 \cdot 7,7^2}{(1,4 \cdot 536)} = 7,9 \quad \rightarrow \quad \text{da Tabela A-1: } \beta_x = 0,11 \leq 0,45 \text{ (ok!)}, K_s = 0,024 \text{ e dom. 2.}$$

$$A_s = K_s \frac{M_d}{d} = 0,024 \frac{(1,4 \cdot 536)}{7,7} = 2,34 \text{ cm}^2/\text{m} \quad \rightarrow \quad (\phi 6,3 \text{ c}/13 \rightarrow 2,42 \text{ cm}^2/\text{m} - \text{ver Tabela A-11})$$

<sup>12</sup> Na apostila BASTOS, P.S.S. *Lajes de Concreto Armado*. Bauru/SP, Departamento de Engenharia Civil, Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2117 – Estruturas de Concreto I, Fev/2021, 109p. ([http://wwwwp.feb.unesp.br/pbastos/pag\\_concreto1.htm](http://wwwwp.feb.unesp.br/pbastos/pag_concreto1.htm)) está apresentada a formulação da NBR 6118 para verificação de lajes maciças à força cortante.

A armadura negativa da laje, calculada como viga, considerando os valores contidos na Tabela A-6 e na Tabela A-9, para concreto C25, deve ter o valor mínimo de:

$$A_{s,\text{mín}} = 0,15 \% b_w h = \frac{0,15}{100} 100 \cdot 10 = 1,50 \text{ cm}^2/\text{m} < A_s = 2,34 \text{ cm}^2/\text{m}$$

O espaçamento máximo para laje armada em uma direção deve atender a:

$$s \leq \begin{cases} 2h = 2 \cdot 10 = 20 \text{ cm} \\ 20 \text{ cm} \end{cases} \quad \therefore s_{\text{máx}} = 20 \text{ cm}$$

Na direção secundária (perpendicular à direção principal), a laje armada em uma direção deve ter uma armadura de distribuição, de área:

$$A_{s,\text{distr}} \geq \begin{cases} 0,2A_s = 0,2 \cdot 2,34 = 0,47 \text{ cm}^2/\text{m} \\ 0,9 \text{ cm}^2/\text{m} \\ 0,5A_{s,\text{mín}} = 0,5 \cdot 1,50 = 0,75 \text{ cm}^2/\text{m} \end{cases} \quad \therefore A_{s,\text{distr}} = 0,90 \text{ cm}^2/\text{m}$$

( $\phi 4,2 \text{ c}/15 \text{ cm} \rightarrow 0,92 \text{ cm}^2/\text{m}$ ), obedecendo ao espaçamento máximo de 33 cm entre as barras.

#### a6) Detalhamento das armaduras

O detalhamento esquemático das armaduras dimensionadas está na Figura 45. Deve-se observar que a armadura principal da laje em balanço é posicionada junto à face superior, isto é, onde ocorrem as tensões normais de tração. A armadura principal da laje deve ser cuidadosamente ancorada na viga V1, onde está engastada.<sup>13</sup> O detalhe em gancho das barras N1 no interior da viga V1 garante a necessária ancoragem.

A armadura inferior (barras N3) não é necessária ao equilíbrio da laje, podendo ser dispensada. No entanto, nas lajes em balanço a sua colocação pode ser útil para aumentar a segurança da laje numa eventual ruína, além de aumentar a ductilidade e diminuir a flecha da laje, que deve ser verificada no caso de um projeto completo.<sup>14</sup>

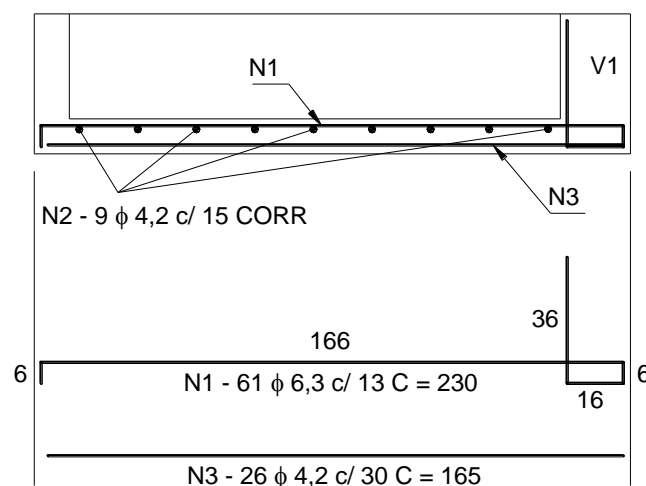


Figura 45 – Detalhamento esquemático das armaduras da laje.

<sup>13</sup> A ancoragem da armadura principal da laje pode ser avaliada de modo semelhante às vigas.

<sup>14</sup> A flecha da laje L3, por ser uma laje em balanço, deve ser cuidadosamente avaliada. Na apostila há a formulação e exemplos de aplicação: BASTOS, P.S.S. *Lajes de Concreto Armado*. Bauru/SP, Departamento de Engenharia Civil, Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2117 – Estruturas de Concreto I, Fev/2021, 109p. ([http://wwwwp.feb.unesp.br/pbastos/pag\\_concreto1.htm](http://wwwwp.feb.unesp.br/pbastos/pag_concreto1.htm))

### b) Dimensionamento da viga V1

Sobre a viga V1 atuam ações provenientes do peso próprio, da parede de alvenaria existente, das lajes internas L1 e L2 do edifício e da laje L3 em balanço (reação de apoio e momento fletor na seção de engastamento da laje, que leva à torção da viga). Todas essas ações são uniformemente distribuídas ao longo do comprimento da viga.

#### b1) Ações a considerar

- peso próprio:	$g_{pp} = 25 \cdot 0,19 \cdot 0,40 = 1,90 \text{ kN/m}$
- parede:	$g_{par} = 3,2 \cdot 2,60 = 8,32 \text{ kN/m}$
- laje L3 (marquise):	$p_{laje} = 6,30 \text{ kN/m}$
- laje interna (L1 ou L2):	$p_{laje} = 5,0 \text{ kN/m}$
- <b>CARGA TOTAL</b>	<b>(p) = 21,52 kN/m</b>

#### b2) Esforços solicitantes internos

O modelo adotado para o esquema estrutural da viga, para a determinação dos momentos fletores e torçores e forças cortantes, é aquele que considera a viga vinculada aos pilares extremos por meio de engastes elásticos (molas). Para a avaliação dos momentos torçores há que se considerar os dois tramos da viga engastados nos pilares P1, P2 e P3.

A viga V1 é simétrica em geometria e carregamento, de modo que os vãos livres e efetivos dos dois tramos são iguais.

$$\text{vão livre: } \ell_o = 394 + 10 - 30 - 15 = 359 \text{ cm}$$

$$a_1 \leq \begin{cases} t_1 / 2 = 30 / 2 = 15 \text{ cm} \\ 0,3h = 0,3 \cdot 40 = 12 \text{ cm} \end{cases} \quad \therefore a_1 = 12 \text{ cm} = a_2$$

$$\ell_{ef} = \ell_o + a_1 = 359 + 12 + 12 = 383 \text{ cm}$$

O apoio intermediário da viga (pilar P2) pode ser considerado como um apoio simples, pois de acordo com o esquema mostrado na Figura 43 tem-se que o comprimento de flambagem do lance inferior do pilar é  $\ell_e = 450 \text{ cm}$  e  $\ell_e/4 = 450/4 = 112,5 \text{ cm}$ . Como a dimensão do pilar na direção da viga ( $b_{int} = 30 \text{ cm}$ ) é menor que  $\ell_e/4$  (112,5 cm) pode considerar o pilar intermediário como um apoio simples. Caso  $b_{int}$  resultasse maior que  $\ell_e/4$ , os dois tramos da viga deveriam ser considerados engastados no pilar P2.

A Figura 46 mostra o esquema estático da viga, com os carregamentos atuantes, vãos efetivos, numeração das barras e nós, etc. Para determinação dos esforços solicitantes na viga pode ser utilizado algum programa computacional com essa finalidade. Para o exemplo foi aplicado o programa para cálculo de pórtico plano, chamado PPLAN4, de CORRÊA et al. (1992).

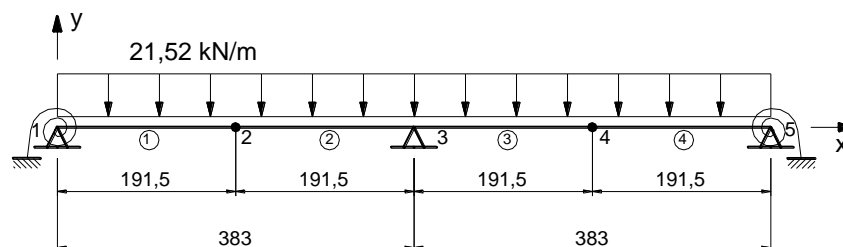


Figura 46 – Esquema estático, carregamento e numeração dos nós e barras da viga V1.

Considerando que os pilares extremos P1 e P3, nos quais a viga se encontra vinculada, estão engastados na estrutura de fundação (bloco de duas estacas e vigas baldrames), o coeficiente de rigidez do lance inferior do pilar será tomado como  $4EI/\ell_e$ . Quando o pilar for considerado apoiado na estrutura de



fundação, o coeficiente de rigidez poderá ser tomado como  $3EI/\ell_e$ . Pilares sobre blocos de uma estaca devem ser considerados simplesmente apoiados (articulados).

A rigidez da mola que vincula a viga a esses pilares é avaliada por:  $K_{mola} = K_{p,sup} + K_{p,inf}$

Supondo a viga trabalhando em serviço no estágio II (já fissurada), para o módulo de elasticidade do concreto será considerado o valor secante. O módulo tangente na origem pode ser avaliado pela seguinte expressão (NBR 6118, item 8.2.8):

$$E_{ci} = \alpha_E 5600 \sqrt{f_{ck}} = 1,2 \cdot 5600 \sqrt{25} = 33.600 \text{ MPa} = 3.360 \text{ kN/cm}^2$$

com  $\alpha_E = 1,2$  para brita de basalto (ou diabásio).

O módulo secante ( $E_{cs}$ ) é avaliado por:

$$E_{cs} = \alpha_i E_{ci} \quad , \text{ com } \alpha_i = 0,8 + 0,2 \frac{f_{ck}}{80} \leq 1,0$$

$$\alpha_i = 0,8 + 0,2 \frac{25}{80} = 0,8625 \leq 1,0 \quad \rightarrow \text{ok!}$$

$$E_{cs} = 0,8625 \cdot 3360 = 2.898 \text{ kN/cm}^2$$

O momento de inércia, dos lances inferior e superior do pilar, é:

$$I_{p,sup} = I_{p,inf} = \frac{b h^3}{12} = \frac{19 \cdot 30^3}{12} = 42.750 \text{ cm}^4$$

Observe que a dimensão do pilar considerada ao cubo é aquela coincidente com a direção do eixo longitudinal da viga. Os coeficientes de rigidez dos lances inferior e superior do pilar são:

$$K_{p,inf} = \frac{4EI}{\ell_e} = \frac{4 \cdot 2898 \cdot 42750}{\frac{450}{2}} = 2.202.480 \text{ kN.cm}$$

$$K_{p,sup} = \frac{4EI}{\ell_e} = \frac{4 \cdot 2898 \cdot 42750}{\frac{300}{2}} = 3.303.720 \text{ kN.cm}$$

Rigidez da mola:

$$K_{mola} = 2.202.480 + 3.303.720 = 5.506.200 \text{ kN.cm}$$

A viga em questão tem simetria de geometria e carregamento no pilar intermediário (nó 3). A viga pode, por simplicidade, ser calculada considerando-se apenas os nós 1, 2 e 3, e as barras 1 e 2. Para isso deve-se fazer o nó 3 com restrição de rotação, além das restrições de apoio simples. Os resultados devem ser idênticos àqueles para a viga completa.

O arquivo de dados de entrada no programa, considerando a simetria, tem o aspecto:

```

OPTE, 2, 2, 2, 2, 2,
UNESP - DISC. CONCRETO II
EXEMPLO 2
V1 (19 x 40)
NOGL
    1, 3, 1, 0, 0, 383, 0,
RES
    1, 1, 1, 2, 0, 0, 5506200,
    3, 1, 1, 1,
BARG
    1, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1,

```

PROP  
 1, 1, 760, 101333, 40,  
 MATL  
 1, 2898,  
 FIMG  
 CARR1  
 CBRG  
 1, 2, 1, 1, -0.2152, 1,  
 FIMC  
 FIME

A Figura 47 mostra os diagramas de forças cortantes e de momentos fletores (valores característicos máximos) obtidos no programa PPLAN4. A listagem dos resultados calculados pelo programa encontra-se no Anexo B2. Na Figura 47 também estão incluídos os esforços de torção (T), provocados pelo momento fletor na laje em balanço (5,36 kN.m), que é momento de torção externo na viga.

Os momentos de torção máximos nos apoios foram calculados considerando-se os tramos da viga biengastados. Conforme mostrado na Figura 47 os valores são:

$$T_k = \frac{5,36 \cdot 3,83}{2} = 10,26 \text{ kN.m} = 1.026 \text{ kN.cm}$$

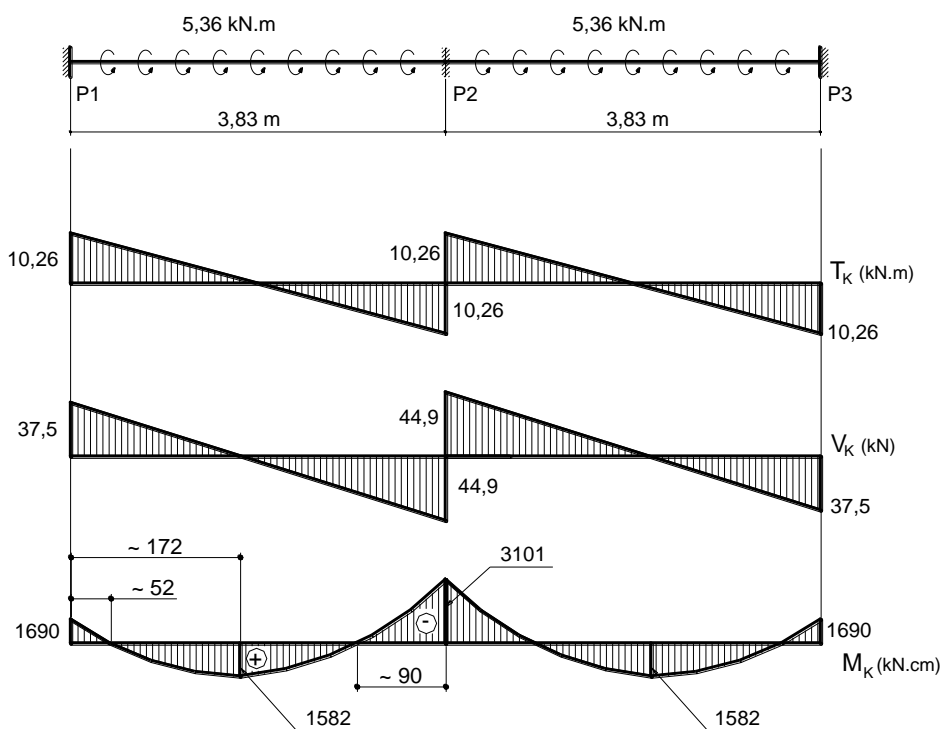


Figura 47 – Diagramas de esforços solicitantes característicos.

A flecha calculada pelo programa para o nó 2 (0,06 cm) não é a flecha máxima no vão, mas é próxima a ela, de modo que serve como um indicativo da deslocabilidade da viga.<sup>15</sup> A flecha de 0,06 cm é muito pequena e desprezível, e muito inferior à flecha máxima permitida para a viga.

### b3) Dimensionamento das armaduras

Serão dimensionadas as armaduras longitudinal e transversal, para os esforços solicitantes de força cortante e momentos fletores e torçores.

<sup>15</sup> Um valor mais próximo da flecha máxima poderia ser obtido colocando-se outros nós à esquerda do nó 2 (ver Figura 46).

### b3.1) Armadura mínima de flexão

Conforme a Tabela A-6, para seção retangular e concreto C25, a taxa mínima de armadura ( $\rho_{\min}$ ) deve ser de 0,15 %  $A_c$ , portanto:

$$A_{s,\min} = 0,0015 \cdot 19 \cdot 40 = 1,14 \text{ cm}^2$$

### b3.2) Armadura de pele

A armadura de pele não é necessária, dado que a viga não tem altura superior a 60 cm. Para a viga com largura de 19 cm e a altura de 40 cm não devem surgir fissuras por efeito de retração do concreto.

### b3.3) Momento fletor negativo

#### b3.3.1) Apoio interno (P2)

$$M_k = -3.101 \text{ kN.cm}$$

$$M_d = \gamma_f \cdot M_k = 1,4 \cdot (-3.101) = -4.341 \text{ kN.cm}$$

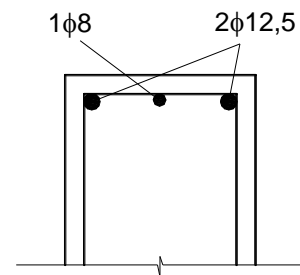
Por simplicidade e porque o momento fletor negativo no apoio do pilar P2 é pequeno, não será feita redução de M para  $\delta M$ . Para a altura da viga de 40 cm será adotada a altura útil de 36 cm. A laje em balanço (L3) está comprimida pelo momento fletor negativo, de modo que pode contribuir com a viga e forma uma viga de seção L. A largura colaborante proporcionada pela laje, conforme a NBR 6118, é:

$$b_3 = 0,10 (0,6 \cdot 383) = 23 \text{ cm}$$

$$b_f = b_w + b_3 = 19 + 23 = 42 \text{ cm}$$

$$K_c = \frac{b_f d^2}{M_d} = \frac{42 \cdot 36^2}{4341} = 12,5$$

Da Tabela A-1:  $\beta_x = x/d = 0,07 \leq 0,45$  (ok!),  $K_s = 0,024$  e domínio 2.



Ainda resulta que  $0,8x < h_f = 10 \text{ cm}$ , e o cálculo é de seção L como se fosse retangular  $b_f \cdot h$ .

$$A_s = K_s \frac{M_d}{d} = 0,024 \frac{4341}{36} = 2,89 \text{ cm}^2 > A_{s,\min} = 1,14 \text{ cm}^2$$

$$4 \phi 10 \text{ mm} \rightarrow 3,20 \text{ cm}^2 \text{ ou } 2 \phi 12,5 + 1 \phi 8 \rightarrow 3,00 \text{ cm}^2$$

No caso de se adotar  $2 \phi 12,5 + 1 \phi 8$  na primeira camada, a distância livre horizontal entre as barras deve ser superior a 25 mm, a fim de permitir a passagem da agulha do vibrador. Supondo o diâmetro do estribo igual a 6,3 mm, a distância livre resulta:

$$a_h = \frac{19 - [2(2,5 + 0,63) + 2 \cdot 1,25 + 0,8]}{2} = 4,7 \text{ cm}$$

distância mais que suficiente para a passagem da agulha do vibrador. A distância da base da viga ao CG da armadura é:

$$a_{cg} = 2,5 + 0,63 + 1,25/2 = 3,76 \text{ cm} \cong 4 \text{ cm (valor adotado)}$$

#### b3.3.2) Apoios extremos (P1 e P3)

$M_k = -1.690 \text{ kN.cm}$ , e também seção L com  $b_f = 42 \text{ cm}$

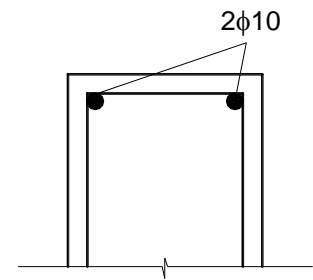
$$M_d = \gamma_f \cdot M_k = 1,4 \cdot (-1.218) = -2.366 \text{ kN.cm}$$

$$K_c = \frac{b_f d^2}{M_d} = \frac{42 \cdot 36^2}{2366} = 23,0$$

Tabela A-1:  $\beta_x = x/d = 0,04 \leq 0,45$  (ok!),  $K_s = 0,023$ , domínio 2, e  $0,8x < h_f$

$$A_s = K_s \frac{M_d}{d} = 0,023 \frac{2366}{36} = 1,51 \text{ cm}^2 > A_{s,\min} = 1,14 \text{ cm}^2$$

$$2 \phi 10 \text{ mm} \rightarrow 1,60 \text{ cm}^2$$



### b3.3.3) Momento fletor máximo positivo

$$M_k = 1.582 \text{ kN.cm}$$

$$M_d = \gamma_f \cdot M_k = 1,4 \cdot 1.582 = 2.215 \text{ kN.cm}$$

Considerando que as lajes internas (L1 e L2) sejam também maciças de concreto, no dimensionamento ao momento fletor positivo máximo pode-se considerar a contribuição da laje para formar uma seção L, dado que a laje está comprimida:

$$b_1 = 0,10 (0,6 \cdot 383) = 23 \text{ cm}$$

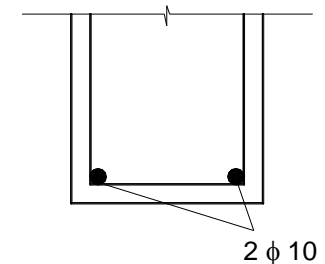
$$b_f = b_w + b_1 = 19 + 23 = 42 \text{ cm}$$

$$K_c = \frac{b_f d^2}{M_d} = \frac{42 \cdot 36^2}{2215} = 11,1$$

Tabela A-1:  $\beta_x = x/d = 0,08 \leq 0,45$  (ok!),  $K_s = 0,024$ , domínio 2, e  $0,8x < h_f$

$$A_s = K_s \frac{M_d}{d} = 0,024 \frac{2215}{36} = 1,48 \text{ cm}^2 > A_{s,\min} = 1,14 \text{ cm}^2$$

$$2 \phi 10 \text{ mm} \rightarrow 1,60 \text{ cm}^2$$



### b3.3.4) Armadura longitudinal máxima

A soma das armaduras de tração e de compressão ( $A_s + A'_s$ ) não deve ter valor maior que 4 %  $A_c$ , calculada na região fora da zona de emendas. Para a viga em questão, as áreas de armadura longitudinais são pequenas e não superam a armadura máxima.

### b4) Dimensionamento da armadura transversal à força cortante

A resolução da viga à força cortante será feita mediante as equações simplificadas desenvolvidas em BASTOS (2021). Será adotado o Modelo de Cálculo I ( $\theta = 45^\circ$ ) para a inclinação da diagonais comprimidas.

#### b4.1) Pilar interno P2

$$V_k = 44,9 \text{ kN.cm}$$

$$V_{Sd} = \gamma_f \cdot V_k = 1,4 \cdot 44,9 = 62,9 \text{ kN}$$

#### a) Verificação das diagonais de compressão

Da Tabela A-4, para o concreto C25, determina-se a força cortante máxima:

$$V_{Rd2} = 0,43 b_w d = 0,43 \cdot 19 \cdot 36 = 294,1 \text{ kN}$$

$$V_{Sd} = 62,9 \text{ kN} \leq V_{Rd2} = 294,1 \text{ kN} \rightarrow \text{ok!}$$

$\therefore$  não ocorrerá esmagamento do concreto nas diagonais de compressão.

#### b) Cálculo da armadura transversal

Da mesma Tabela A-4, para o concreto C25, a equação para determinar a força cortante correspondente à armadura mínima é:

$$V_{Sd,mín} = 0,117 b_w d = 0,117 \cdot 19 \cdot 36 = 80,0 \text{ kN}$$

$$V_{Sd} = 62,9 \text{ kN} < V_{Sd,mín} = 80,0 \text{ kN} \quad \rightarrow \quad \text{portanto, deve-se dispor a armadura transversal mínima}$$

A armadura mínima é calculada pela equação:

$$A_{sw,mín} = \frac{20 f_{ct,m}}{f_{yk}} b_w \quad (\text{cm}^2/\text{m}), \text{ com } f_{ct,m} = 0,3 \sqrt[3]{f_{ck}^2} = 0,3 \sqrt[3]{25^2} = 2,56 \text{ MPa}$$

$$A_{sw,mín} = \frac{20 \cdot 0,256}{50} 19 = 1,95 \text{ cm}^2/\text{m}$$

A força cortante de cálculo nos pilares extremos ( $V_{Sd} = 52,5 \text{ kN}$ ) é também menor que a força cortante mínima, o que significa que a armadura mínima deve se estender ao longo dos dois tramos da viga V1.

#### b4.2) Detalhamento da armadura transversal

a) Diâmetro do estribo:  $5 \text{ mm} \leq \phi_t \leq b_w/10 \quad \rightarrow \quad \phi_t \leq 190/10 \leq 19 \text{ mm}$

b) Espaçamento máximo:

$$0,67 V_{Rd2} = 0,67 \cdot 294,1 = 197,0 \text{ kN}$$

$$V_{Sd,máx} = 62,9 < 197,0 \text{ kN} \quad \rightarrow \quad s \leq 0,6 d \leq 30 \text{ cm}$$

$$0,6 d = 0,6 \cdot 36 = 21,6 \text{ cm} \quad \rightarrow \quad \text{Portanto, } s_{máx} = 21,6 \text{ cm}$$

#### b5) Ancoragem das armaduras longitudinais

##### b5.1) Armadura positiva nos pilares extremos P1 e P3

Como a viga tem simetria de carregamento e geometria, a ancoragem nos pilares P1 e P3 é idêntica.

Valor da decalagem do diagrama de momentos fletores ( $a_\ell$ ) segundo o Modelo de Cálculo I, para estribos verticais:<sup>16</sup>

$$a_\ell = \frac{d}{2} \frac{V_{Sd,máx}}{(V_{Sd,máx} - V_c)} \leq d, \quad \text{com } a_\ell \geq 0,5d$$

Na flexão simples,  $V_c = V_{c0} = 0,6 f_{ctd} b_w d = 0,6 \cdot 0,128 \cdot 19 \cdot 36 = 52,5 \text{ kN}$

$$f_{ctd} = \frac{f_{ctk,inf}}{\gamma_c} = \frac{0,7 f_{ct,m}}{\gamma_c} = \frac{0,7 \cdot 0,3 \sqrt[3]{f_{ck}^2}}{1,4} = \frac{0,7 \cdot 0,3 \sqrt[3]{25^2}}{1,4} = 1,28 \text{ MPa} = 0,128 \text{ kN/cm}^2$$

$$a_\ell = \frac{36}{2} \frac{52,5}{(52,5 - 52,5)} = 18 \frac{52,5}{0}$$

resultou uma fração de valor indefinido, portanto,  $a_\ell = 18 \text{ cm}$ , pois  $a_\ell \geq 0,5d$ .

A armadura a ancorar no apoio é:

$$A_{s,anc} = \frac{a_\ell}{d} \frac{V_{Sd}}{f_{yd}} = \frac{18}{36} \frac{52,5}{1,15} = 0,60 \text{ cm}^2$$

A armadura calculada a ancorar no apoio deve atender à armadura mínima:

<sup>16</sup> Ver BASTOS, P.S.S. *Ancoragem e emenda de armaduras*. Bauru/SP, Departamento Engenharia Civil, Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2123 – Estruturas de Concreto II, Mar/2018, 41p. ([http://www.feb.unesp.br/pbastos/pag\\_concreto2.htm](http://www.feb.unesp.br/pbastos/pag_concreto2.htm)).

$$A_{s,anc} \geq \begin{cases} \frac{1}{3} A_{s,v\tilde{a}o} & \text{se } M_{\text{apoio}} = 0 \text{ ou negativo de valor } |M_{\text{apoio}}| \leq \frac{M_{v\tilde{a}o}}{2} \\ \frac{1}{4} A_{s,v\tilde{a}o} & \text{se } M_{\text{apoio}} = \text{negativo e de valor } |M_{\text{apoio}}| > \frac{M_{v\tilde{a}o}}{2} \end{cases}$$

$$|M_{d,apoio}| = |-2.366| \text{ kN.cm} > M_{d,v\tilde{a}o}/2 = 2.215/2 = 1.107 \text{ kN.cm}$$

$$\text{Portanto, } A_{s,anc} \geq 1/4 A_{s,v\tilde{a}o} = 1,48/4 = 0,37 \text{ cm}^2$$

$$A_{s,anc} = 0,60 \text{ cm}^2 \geq 1/4 A_{s,v\tilde{a}o} = 0,37 \text{ cm}^2 \rightarrow \text{ok! portanto, ancorar } 0,60 \text{ cm}^2$$

A armadura positiva do vão adjacente é composta por 2  $\phi$  10 mm (1,60 cm<sup>2</sup>), que deverão ser obrigatoriamente estendidos até os apoios. Portanto,  $A_{s,ef} = 1,60 \text{ cm}^2 > A_{s,anc} = 0,60 \text{ cm}^2$ .

O comprimento de ancoragem mínimo no apoio ( $\ell_{b,m\acute{i}n}$ ) é:

$$\ell_{b,m\acute{i}n} \geq \begin{cases} r + 5,5\phi \\ 6 \text{ cm} \end{cases}$$

$$r = D/2 = 5\phi/2 = 5 \cdot 1,0/2 = 2,5 \text{ cm}$$

(com D determinado na Tabela A-10)

$$r + 5,5\phi = 2,5 + 5,5 \cdot 1,0 = 8,0 \text{ cm} > 6 \text{ cm} \rightarrow \therefore \ell_{b,m\acute{i}n} = 8,0 \text{ cm}$$

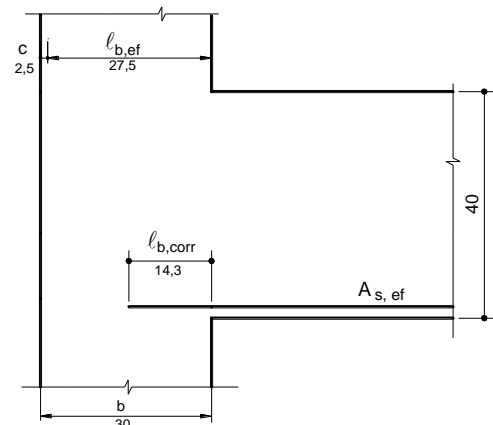
O comprimento de ancoragem básico ( $\ell_b$ ), conforme a Tabela A-7, para barra com diâmetro de 10 mm, concreto C25, aço CA-50, região de boa aderência e sem gancho, é 38 cm.

O comprimento de ancoragem corrigido é:

$$\ell_{b,corr} = \ell_b \frac{A_{s,anc}}{A_{s,ef}} = 38 \frac{0,60}{1,60} = 14,3 \text{ cm}$$

O comprimento de ancoragem efetivo no apoio é:

$$\ell_{b,ef} = b - c = 30 - 2,5 = 27,5 \text{ cm}$$



Verifica-se que o comprimento de ancoragem corrigido (sem gancho) é inferior ao comprimento de ancoragem efetivo ( $\ell_{b,corr} = 14,3 \text{ cm} < \ell_{b,ef} = 27,5 \text{ cm}$ ). Isto significa que é possível fazer a ancoragem reta, no comprimento de 14,3 cm. A favor da segurança, as duas barras serão estendidas até a face externa do pilar, obedecido o cobrimento, como mostrado na Figura 50 (barras N5).<sup>17</sup>

### b5.2) Armadura positiva no pilar intermediário P2

Estendendo 2  $\phi$  10 (1,60 cm<sup>2</sup>) da armadura longitudinal positiva até o pilar intermediário, esta armadura deve ser superior à mínima, dada por:

$$|M_{d,apoio}| = |-4.34| \text{ kN.cm} > M_{d,v\tilde{a}o}/2 = 2.215/2 = 1.107 \text{ kN.cm}$$

$$\text{Portanto, } A_{s,anc} \geq 1/4 A_{s,v\tilde{a}o} = 1,48/4 = 0,37 \text{ cm}^2$$

<sup>17</sup> A favor da segurança, para uma melhor ancoragem, o gancho pode ser feito na extremidade das barras.

$$A_{s,ef} = 1,60 \text{ cm}^2 > 1/4 A_{s,v\grave{a}o} = 0,37 \text{ cm}^2$$

As duas barras de 10 mm devem se estender pelo menos  $10\phi$  além da face do apoio.

### b5.3) Armadura negativa nos pilares extremos P1 e P3

A armadura negativa proveniente do engastamento elástico da viga nos pilares extremos deve penetrar até próximo à face externa do pilar, respeitando-se a espessura do cobrimento, e possuir um gancho direcionado para baixo, com comprimento de pelo menos  $35\phi$ . Para diâmetro de 10 mm, o diâmetro de dobramento deve ser de  $5\phi$ , como indicado na Figura 48.

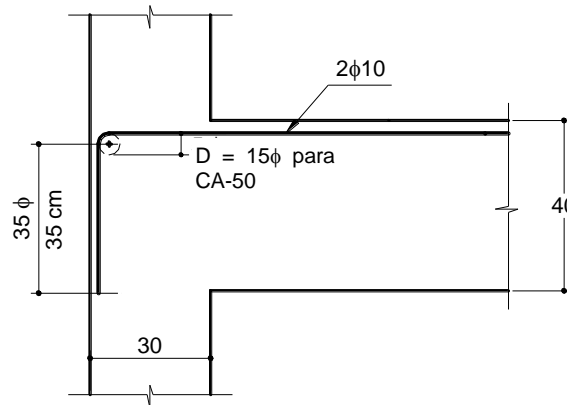


Figura 48 – Ancoragem da armadura negativa nos pilares extremos.

### b6) Dimensionamento à torção

O momento de torção característico ( $T_k$ ) é 1.026 kN.cm e o momento de cálculo é:  
 $T_{sd} = 1,4 \cdot 1026 = 1.436 \text{ kN.cm}$

A armadura transversal para a força cortante foi dimensionada segundo o Modelo de Cálculo I ( $\theta = 45^\circ$ ), ângulo que também deve ser considerado no dimensionamento da viga à torção.

#### b6.1) Verificação das diagonais comprimidas

$$\text{Área da seção transversal: } A = b_w \cdot h = 19 \cdot 40 = 760 \text{ cm}^2$$

$$\text{Perímetro da seção transversal: } u = 2(b_w + h) = 2(19 + 40) = 118 \text{ cm}$$

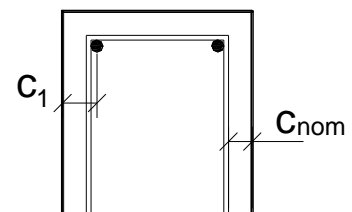
A Eq. 19 e a Eq. 20 fornecem os limites para a espessura  $h_e$  da parede fina:

$$h_e \leq \frac{A}{u} = \frac{760}{118} = 6,4 \text{ cm} \quad \text{e} \quad h_e \geq 2c_1$$

Com  $c = 2,5 \text{ cm}$  e supondo  $\phi_\ell = 12,5 \text{ mm}$  e  $\phi_t = 8 \text{ mm}$  tem-se:

$$c_1 = \phi_\ell/2 + \phi_t + c_{nom} = 1,25/2 + 0,8 + 2,5 = 3,925 \text{ cm}$$

$$h_e \geq 2c_1 \geq 2 \cdot 3,925 \geq 7,9 \text{ cm}$$



Portanto, os limites para  $h_e$  são:  $7,9 \text{ cm} \leq h_e \leq 6,4 \text{ cm}$ , ou seja:  $h_e \leq 6,4 \text{ cm}$  e  $h_e \geq 7,9 \text{ cm}$ , de modo que não é possível adotar um valor para  $h_e$  que atenda aos limites.

Na torção, para resolver o problema, aumentar a largura da viga é a solução mais efetiva, embora outras soluções sejam possíveis. Uma nova largura pode ser determinada fazendo  $h_e = A/u = 2c_1 = 7,9 \text{ cm}$ ,

que é o valor máximo para  $h_e$ . Com  $A/u = 7,9$  resulta a largura de 26 cm, e  $7,9 \text{ cm} \leq h_e \leq 7,9 \text{ cm}$ , que resolve o problema, com a seção 26 x 40. Resta verificar se o projeto arquitetônico permite a viga com esta largura.

No caso, por exemplo, de não ser permitido aumentar a largura de 19 cm, a altura necessária para resolver o problema é de 94 cm, o que também resulta  $7,9 \text{ cm} \leq h_e \leq 7,9 \text{ cm}$ . Conclui-se, portanto, que aumentar a altura da viga não é uma solução eficiente.

Quando ocorre  $A/u < 2c_1$  e não se deseja fazer alterações na seção transversal, a NBR 6118 permite adotar:

$$h_e = A/u \leq b_w - 2c_1$$

$$h_e = A/u = 6,4 \text{ cm} \leq b_w - 2c_1 = 19 - 2 \cdot 3,925 = 11,2 \text{ cm} \rightarrow \text{ok!}$$

$$\therefore h_e = 6,4 \text{ cm}$$

A área  $A_e$  é então definida pelos eixos das barras dos cantos (respeitando-se o cobrimento exigido nos estribos):

$$A_e = (b_w - 2c_1) \cdot (h - 2c_1) = (19 - 7,9) \cdot (40 - 7,9) = 356,3 \text{ cm}^2$$

Neste caso, o perímetro da área equivalente  $A_e$  é:

$$u_e = 2 [(b_w - 2c_1) + (h - 2c_1)] = 2 [(19 - 7,9) + (40 - 7,9)] = 86,4 \text{ cm}$$

O momento torçor máximo, determinado pela Eq. 22, com ângulo  $\theta = 45^\circ$  (igual ao ângulo aplicado no cálculo da viga à força cortante, no caso o Modelo de Cálculo I) é:

$$T_{Rd,2} = 0,5 \alpha_{v2} f_{cd} A_e h_e \sin 2\theta = 0,5 (1 - 25/250) \cdot (2,5/1,4) 356,3 \cdot 6,4 \cdot \sin 2 \cdot 45 = 1.832,4 \text{ kN.cm}$$

Para não ocorrer esmagamento das bielas comprimidas de concreto, conforme a Eq. 34 deve-se ter:

$$\frac{V_{Sd}}{V_{Rd2}} + \frac{T_{Sd}}{T_{Rd2}} \leq 1$$

Como o momento de torção (T) tem valor máximo igual nos três apoios, a verificação das diagonais de compressão será feita para a força cortante máxima atuante na viga ( $V_{Sd,P2} = 62,9 \text{ kN}$  no pilar P2). A força cortante máxima calculada para a viga é  $V_{Rd2} = 294,1 \text{ kN}$ , e substituindo os valores encontra-se:

$$\frac{62,9}{294,1} + \frac{1436}{1832,4} = 0,9975 \cong 1,0 \leq 1,0 \rightarrow \text{ok!}$$

Como a equação foi satisfeita, não ocorrerá o esmagamento do concreto nas diagonais de compressão.

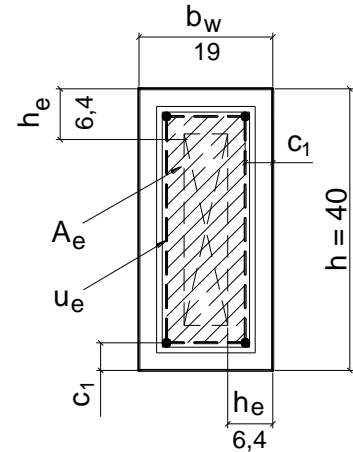
### b6.2) Cálculo das armaduras

As armaduras mínimas para torção, longitudinal e transversal, são (Eq. 32):

$$A_{s\ell, \text{mín}} = \frac{20 f_{ct,m}}{f_{ywk}} h_e = \frac{20 \cdot 0,256}{50} 6,4 = 0,66 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$A_{s,90\text{mín}} = \frac{20 f_{ct,m}}{f_{ywk}} b_w = \frac{20 \cdot 0,256}{50} 19 = 1,95 \text{ cm}^2/\text{m}$$

com  $f_{ct,m} = 0,3 \sqrt[3]{f_{ck}^2} = 0,3 \sqrt[3]{25^2} = 2,56 \text{ MPa}$  (resistência média do concreto à tração direta).





Armadura longitudinal conforme a Eq. 27:

$$\frac{A_{s\ell}}{u_e} = \frac{T_{Sd}}{2 A_e f_{ywd} \operatorname{tg} \theta} = \frac{1436}{2 \cdot 356,3 \frac{50}{1,15} \operatorname{tg} 45} = 0,0463 \text{ cm}^2/\text{cm}$$

com  $s = 100 \text{ cm}$ ,  $A_{s\ell} = 4,63 \text{ cm}^2/\text{m} \geq A_{s\ell,\text{mín}} = 0,66 \text{ cm}^2/\text{m} \rightarrow \text{ok!}$

Armadura transversal (estribos) conforme a Eq. 24:

$$\frac{A_{s,90}}{s} = \frac{T_{Sd}}{2 A_e f_{ywd}} \operatorname{tg} \theta = \frac{1436}{2 \cdot 356,3 \frac{50}{1,15}} \operatorname{tg} 45 = 0,0463 \text{ cm}^2/\text{cm}$$

com  $s = 100 \text{ cm}$ ,  $A_{s,90} = 4,63 \text{ cm}^2/\text{m} \geq A_{s,90\text{mín}} = 1,95 \text{ cm}^2/\text{m} \rightarrow \text{ok!}$

### b6.3) Detalhamento das armaduras

#### b6.3.1) Armadura longitudinal

A área de armadura longitudinal, em cada face da seção retangular da viga, é obtida pela soma das armaduras longitudinais de flexão e de torção. Deve ser feita uma análise dos diagramas de momentos fletores e de momentos torçores, de forma a que a armadura longitudinal final “cubra” tanto os momentos fletores quanto os torçores, conforme suas variações ao longo dos tramos. Se analisados os diagramas mostrados na Figura 47, observa-se que o momento de torção máximo (T) ocorre nos apoios, e diminui em direção ao centro do tramo. Assim, por simplicidade, podem ser analisadas as seções correspondentes aos apoios (pilares), combinando-se as armaduras longitudinais de flexão e de torção nessas seções.

Observe que a armadura longitudinal de torção foi calculada em função de  $u_e$ , que neste caso não é o perímetro do eixo da parede fina, e sim o perímetro da área equivalente  $A_e$ , delimitada pelos eixos das barras longitudinais dos cantos da seção transversal. Portanto,  $A_e$  e  $u_e$  foram calculados em função de  $c_1$  (distância do centro da barra do canto à face da seção), e não em função de  $h_e$ .

#### Pilares P1 e P3:

Face superior:

- da flexão:  $A_s = 1,51 \text{ cm}^2$
- da torção:  $A_s = (b_w - 2c_1) A_{s\ell} = (19 - 7,9) 0,0463 = 0,51 \text{ cm}^2$
- $A_{s,\text{total}} = 1,51 + 0,51 = 2,02 \text{ cm}^2$  ( $3 \phi 10 = 2,40 \text{ cm}^2$ )

Face inferior:

- da flexão:  $A_s = 0,60 \text{ cm}^2$  ( $A_{s,\text{anc}}$ )
- da torção:  $A_s = (b_w - 2c_1) A_{s\ell} = (19 - 7,9) 0,0463 = 0,51 \text{ cm}^2$
- $A_{s,\text{total}} = 0,60 + 0,51 = 1,11 \text{ cm}^2$  (esta armadura será atendida pela armadura longitudinal positiva do vão, que se estende até os apoios extremos -  $2 \phi 10 \text{ mm} \rightarrow 1,60 \text{ cm}^2$ )

Faces laterais:

- $A_{s,\text{total}} = (h - 2c_1) A_{s\ell} = (40 - 7,9) 0,0463 = 1,49 \text{ cm}^2$  ( $3 \phi 8 \text{ mm} \rightarrow 1,50 \text{ cm}^2$ ). Esta armadura contribui também para evitar possíveis fissuras causadas pela retração do concreto.

A armadura longitudinal total, considerando apenas a torção, é aquela relativa ao perímetro  $u_e$ :

$$\frac{A_{s\ell}}{u_e} = 0,0463 \text{ cm}^2/\text{cm} \quad \rightarrow \quad \text{com } u_e = 86,4 \text{ cm: } A_{s\ell,\text{tot}} = 0,0463 \cdot 86,4 = 4,00 \text{ cm}^2$$

Para uma conferência, pode-se determinar a armadura total em função da armadura calculada para as faces da viga:

$$A_{s\ell,\text{tot}} = 2(0,51 + 1,49) = 4,00 \text{ cm}^2 \quad \rightarrow \text{ok!}$$

*Pilar P2 (ambos os tramos da viga adjacentes ao pilar, devido à simetria)*

Face superior:

- da flexão:  $A_s = 2,89 \text{ cm}^2$
- da torção:  $A_s = (19 - 7,9) 0,0463 = 0,51 \text{ cm}^2$
- $A_{s,\text{total}} = 2,89 + 0,51 = 3,40 \text{ cm}^2$  ( $3 \phi 12,5 \rightarrow 3,75 \text{ cm}^2$ )

Face inferior:

- da flexão:  $A_s = 0,37 \text{ cm}^2$  ( $A_{s,\text{anc}}$ )
- da torção:  $A_s = (19 - 7,9) 0,0463 = 0,51 \text{ cm}^2$
- $A_{s,\text{total}} = 0,37 + 0,51 = 0,88 \text{ cm}^2$  (esta armadura será atendida pela armadura longitudinal positiva do vão, que se estende até o apoio intermediário -  $2 \phi 10 \text{ mm} \rightarrow 1,60 \text{ cm}^2$ )

Faces laterais:

- $A_{s,\text{total}} = (h - h_c) A_{s_\ell} = (40 - 7,9) 0,0463 = 1,49 \text{ cm}^2$  ( $3 \phi 8 \text{ mm} \rightarrow 1,50 \text{ cm}^2$ )

### *b6.3.2) Armadura transversal*

A área total de estribos verticais é calculada com a soma das áreas relativas à força cortante e à torção. A armadura para a força cortante resultou igual à armadura mínima, de  $0,0195 \text{ cm}^2/\text{cm}$ , ao longo de toda a viga.

Considerando o estribo composto por dois ramos verticais, e que a área mínima relativa à força cortante para um ramo é  $0,0195/2 = 0,00975 \text{ cm}^2/\text{cm}$ , a armadura transversal total é:

$$\frac{A_{s,\text{tot}}}{s} = \frac{A_{s_w,1\text{ramo}}}{s} + \frac{A_{s,90}}{s} = 0,00975 + 0,0463 = 0,0561 \text{ cm}^2/\text{cm}$$

onde  $A_{s,90}$  representa a área de um ramo vertical do estribo.

O diâmetro do estribo deve ser superior a 5 mm e inferior a  $b_w/10 = 190/10 = 19 \text{ mm}$ . Supondo estribo fechado de dois ramos com diâmetro de 5 mm ( $1 \phi 5 \text{ mm} \rightarrow 0,20 \text{ cm}^2$ ) tem-se:

$$\frac{0,20}{s} = 0,0561$$

$$s = 3,7 \text{ cm} < s_{\text{máx}} = 21,6 \text{ cm} \text{ (este espaçamento máximo é válido para a força cortante e para a torção).}$$

O espaçamento resultou muito pequeno. Considerando o estribo com diâmetro de 6,3 mm fica:

$$\frac{0,31}{s} = 0,0561 \quad \rightarrow \quad s = 5,5 \text{ cm} < s_{\text{máx}} = 21,6 \text{ cm}$$

O espaçamento também resultou pequeno. Considerando o estribo com diâmetro de 8 mm fica:

$$\frac{0,50}{s} = 0,0561 \quad \rightarrow \quad s = 8,9 \text{ cm} \cong 9 \text{ cm} < s_{\text{máx}} = 21,6 \text{ cm}$$

Portanto, pode-se dispor estribos  $\phi 8 \text{ mm}$  c/9 cm em toda a extensão dos vãos livres dos dois tramos da viga, a favor da segurança. A rigor, as regiões no centro dos tramos pode ter uma armadura transversal menor, onde os esforços solicitantes V e T são menores.

A Figura 50 mostra o detalhamento final das armaduras da viga V1.

### *b7) Detalhamento da armadura longitudinal*

A decalagem ( $a_s$ ) do diagrama de momentos fletores de cálculo foi determinada como 18 cm (ver item b5.1). O “cobrimento” do diagrama de momentos fletores deve ser feito apenas para a armadura

negativa no pilar P2, porque as armaduras positivas dos vãos têm apenas duas barras, que devem se estender obrigatoriamente até os apoios. As armaduras longitudinais mostradas na Figura 49 consideram a flexão e a torção, ou seja, as armaduras somadas.

Os comprimentos de ancoragem básicos (sem gancho) para barras  $\phi 10$  e  $12,5$  mm, em região de má aderência, aço CA-50 e concreto C25, conforme a Tabela A-7, são respectivamente 54 e 67 cm.

A Figura 49 mostra o cobrimento do diagrama de momentos fletores de cálculo. Como a viga é simétrica o “cobrimento” foi feito sobre um tramo apenas.

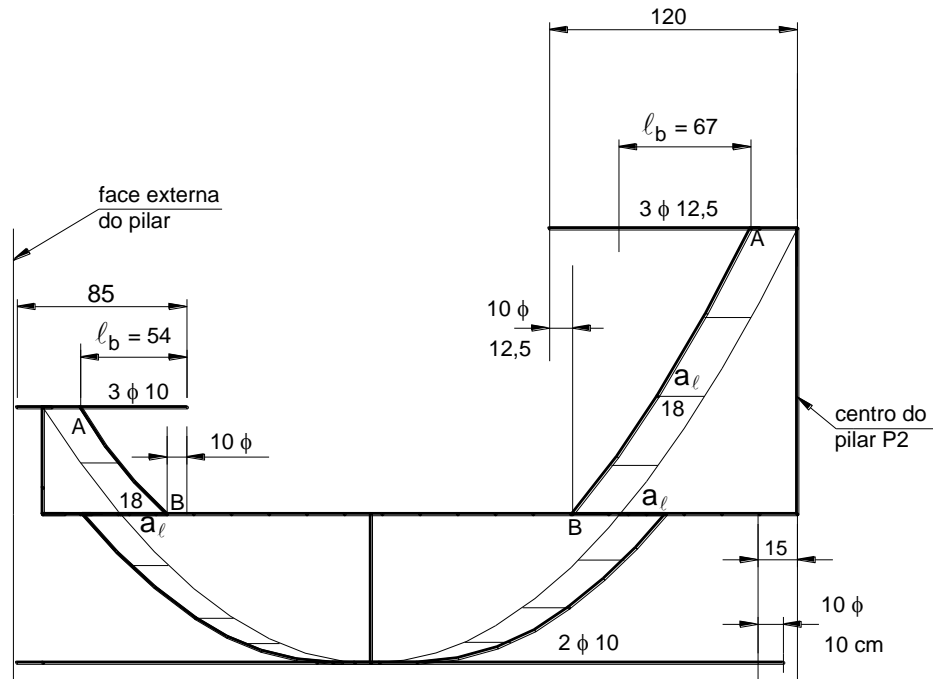


Figura 49 – Esquema do cobrimento do diagrama de momentos fletores de cálculo.

A Figura 50 mostra o detalhamento final das armaduras da viga V1. As barras N5 foram estendidas até as faces do pilar intermediário (P2) com o propósito de melhorar a ancoragem dessas barras, dado que elas trabalham também à torção.

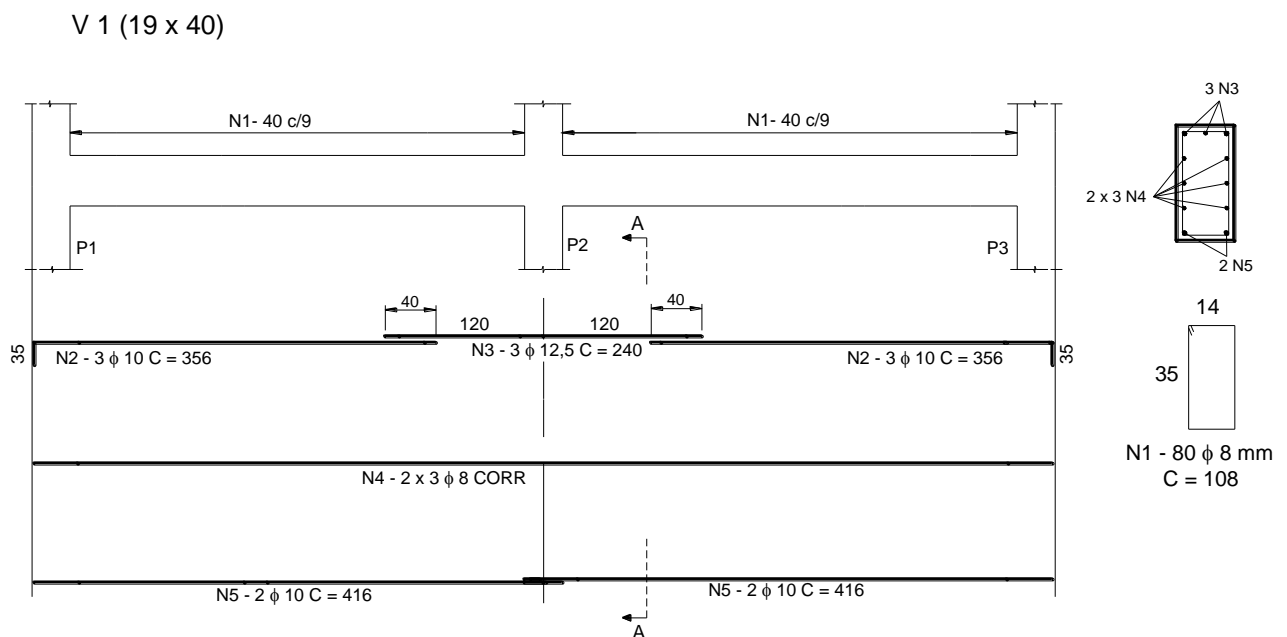


Figura 50 – Detalhamento final das armaduras da viga V1.

### 14.3 Exemplo 3

A Figura 51, Figura 52 e Figura 53 mostram a estrutura em três dimensões, a planta de fôrma e um corte esquemático da estrutura de concreto de uma edificação com dois pavimentos. Essa estrutura já teve a viga VS1 dimensionada (BASTOS, 2017)<sup>18</sup>. Agora, a viga VS1 tem seu traçado modificado com o objetivo de introduzir esforços internos de torção, e para exemplificação e comparação, o concreto terá a resistência à compressão alterada para 35 MPa, ou seja, do concreto C25 para o C35. O propósito do exemplo é dimensionar e detalhar as armaduras das vigas VS1 e VS6, são conhecidos:

- coeficientes de ponderação:  $\gamma_c = \gamma_f = 1,4$  ;  $\gamma_s = 1,15$  ;
- peso específico do Concreto Armado:  $\gamma_{conc} = 25 \text{ kN/m}^3$  ; aço CA-50;
- conforme NBR 6120: argamassa de revestimento com  $\gamma_{arg,rev} = 19 \text{ kN/m}^3$  e argamassa de contrapiso com  $\gamma_{arg,contr} = 21 \text{ kN/m}^3$ ;
- edificação em área urbana de cidade: classe II de agressividade ambiental, concreto C35 ( $f_{ck} = 35 \text{ MPa}$ ), relação  $a/c \leq 0,60$ ,  $c_{nom} = 2,5 \text{ cm}$  para  $\Delta c = 5 \text{ mm}$ .

#### OBSERVAÇÕES:

- a) há uma parede de vedação em toda a extensão das vigas VS1 e VS6, constituída por blocos cerâmicos de oito furos (dimensões de  $9 \times 19 \times 19 \text{ cm}$ ), espessura final de 23 cm e altura de 2,40 m, com carga por metro quadrado de área de  $3,20 \text{ kN/m}^2$ , valor esse que considera os diferentes pesos específicos do bloco cerâmico e das argamassas de assentamento (1 cm) e de revestimento (1,5 cm)<sup>19</sup>;
- b) a laje é do tipo pré-fabricada treliçada, com altura total de 16 cm e peso próprio de  $2,33 \text{ kN/m}^2$ ;
- c) ação variável (carga acidental da NBR 6120 - q) nas lajes de  $2,0 \text{ kN/m}^2$ ;
- d) revestimento (piso final) em porcelanato sobre a laje, com  $\gamma_{piso} = 0,20 \text{ kN/m}^2$ ;
- e) espessura do revestimento inferior da laje = 1,5 cm; espessura do contrapiso = 3,0 cm;
- f) a ação do vento e os esforços solicitantes decorrentes serão desprezados por se tratar de uma edificação de baixa altura (apenas dois pavimentos), em região não sujeita a ventos de alta intensidade.

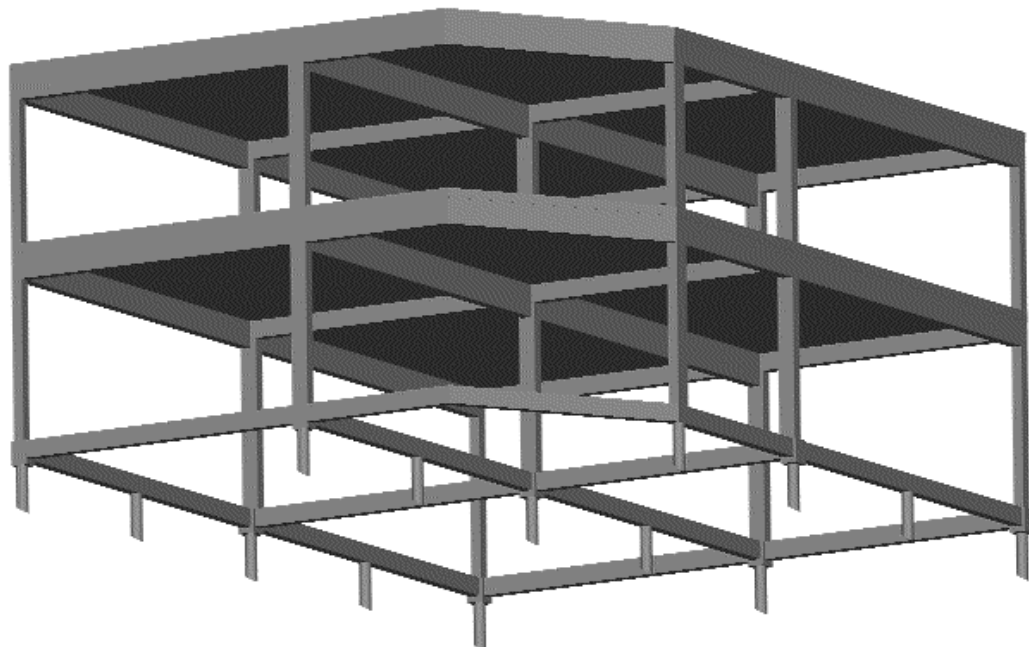


Figura 51 – Perspectiva da estrutura.

### RESOLUÇÃO

<sup>18</sup> BASTOS, P.S.S. *Vigas de Concreto Armado*. Bauru/SP, Departamento Engenharia Civil, Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2123 – Estruturas de Concreto II, Jun/2017, 57p. ([http://wwwp.feb.unesp.br/pbastos/pag\\_concreto2.htm](http://wwwp.feb.unesp.br/pbastos/pag_concreto2.htm)).

<sup>19</sup> Valores encontrados em GIONGO, J.S. *Concreto armado: projeto estrutural de edifícios*. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos, Usp, Dep. de Estruturas. 1994.

Todas as vigas do pavimento superior serão representadas segundo um modelo de grelha (Figura 55), para a determinação dos esforços solicitantes e deslocamentos verticais (flechas). As vigas serão consideradas vinculadas aos pilares extremos por meio de engastes elásticos.

Devido à mudança de direção que existe nos tramos finais das vigas VS1 e VS6, entre os pilares P3 e P6, surgem esforços de torção nesses tramos.

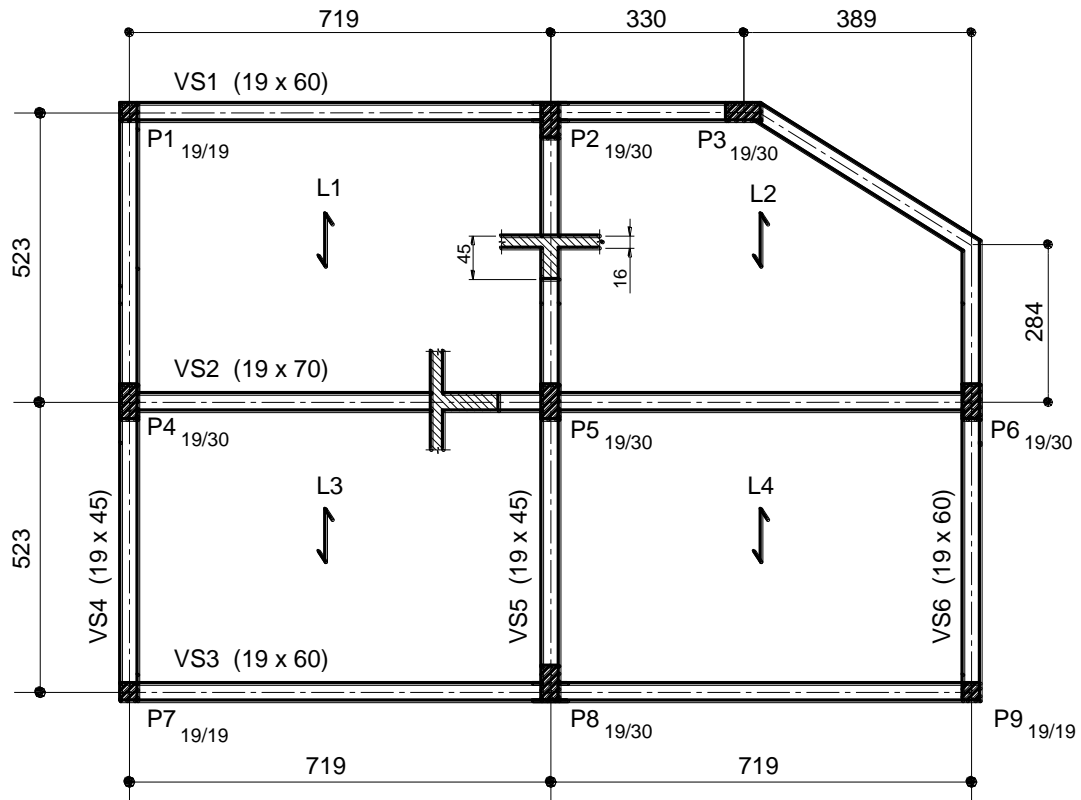


Figura 52 – Planta de fôrma do pavimento superior com as vigas VS1 e VS6.

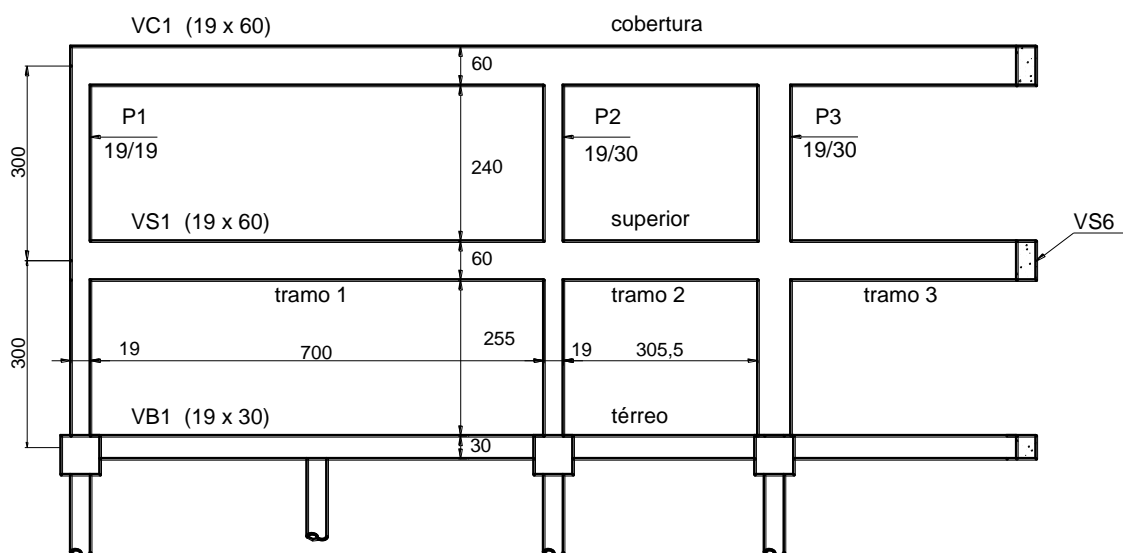


Figura 53 – Vista em elevação do pórtico que contém a viga VS1.

#### a) Vãos efetivos

Por questão de simplicidade e porque o erro cometido será pequeno e a favor da segurança, na discretização dos nós da grelha os apoios verticais (pilares) serão considerados no centro geométrico dos

pilares. Essa simplificação leva a vãos para as vigas um pouco maiores que aqueles que resultariam caso se considerassem os vãos efetivos exatos. O modelo de grelha está mostrado na Figura 55.

### b) Estimativa da altura das vigas

A largura das vigas foi adotada igual à dimensão do bloco cerâmico de oito furos, assentado na posição “deitada”, ou seja, na dimensão de 19 cm. Para a estimativa da altura da viga VS1 foi aplicada a seguinte equação, relativa ao tramo de maior vão:

$$h = \frac{\ell_{ef}}{12} = \frac{719}{12} = 59,9 \text{ cm} \quad \therefore h = 60 \text{ cm}$$

A viga VS6, embora não tenha as nervuras das lajes pré-fabricadas apoiadas sobre ela, terá a mesma seção transversal da VS1, isto é, 19 x 60 cm, porque no trabalho conjunto das duas vigas no trecho onde ocorre a mudança de direção, o tramo final da viga VS1 trabalhará de certa forma apoiando-se sobre o tramo final da VS6, o que vai acarretar uma alta solicitação de flexão nessa viga na seção sobre o pilar P6.

Quanto à instabilidade lateral, como as vigas têm lajes apoiadas em toda a extensão dos vãos, a estabilidade está garantida.

### c) Cargas nas lajes e nas vigas

Como se pode observar na Figura 52, existe o carregamento das lajes L1 e L2 sobre a viga VS1, pois as nervuras da laje nela se apoiam. Na viga VS6 as lajes L2 e L4 aplicam apenas uma pequena parcela de carga, dado que as nervuras das lajes não se apoiam sobre a viga.

#### c1) Lajes

Para as lajes de piso do pavimento superior considerou-se a laje do tipo pré-fabricada treliçada, com altura total de 16 cm e peso próprio de 2,33 kN/m<sup>2</sup>. A carga total por m<sup>2</sup> de área da laje é:

- peso próprio:	$g_{pp} = 2,33 \text{ kN/m}^2$
- revestimento argam. inferior:	$g_{arg,rev} = 19 \cdot 0,015 = 0,29 \text{ kN/m}^2$
- arg. regularização (contrapiso):	$g_{arg,contr} = 21 \cdot 0,03 = 0,63 \text{ kN/m}^2$
- piso final (porcelanato):	$g_{piso} = 0,20 \text{ kN/m}^2$
- ação variável:	$q = 2,00 \text{ kN/m}^2$
<b>CARGA TOTAL:</b>	<b><math>p = 5,45 \text{ kN/m}^2</math></b>

#### c2) Viga VS1

Considerando a carga total na viga consistindo de uma parede apoiada sobre toda extensão (composta por blocos cerâmicos de oito furos, espessura final de 23 cm e altura de 2,40 m, e peso específico 3,20 kN/m<sup>3</sup>), da laje pré-fabricada com carga total de 5,45 kN/m<sup>2</sup> e comprimento de 5,325 m (distância entre o centro da viga VS2 e a face externa da viga VS1), e o peso próprio da viga (com seção transversal de 19 x 60 cm), o carregamento total atuante nos tramos entre os pilares P1 e P3 é:

- peso próprio:	$g_{pp} = 25 \cdot 0,19 \cdot 0,60 = 2,85 \text{ kN/m}$
- parede de alvenaria:	$g_{par} = 3,20 \cdot 2,40 = 7,68 \text{ kN/m}$
- laje:	$p_{laje} = 5,45 \cdot (5,325/2) = 14,51 \text{ kN/m}$
<b>CARGA TOTAL:</b>	<b><math>P = 25,04 \text{ kN/m}</math></b>

No tramo onde ocorre a mudança de direção, entre o pilar P3 e a viga VS6, com comprimento de 389 cm, a carga da laje na VS1 foi diminuída proporcionalmente à diminuição do comprimento das nervuras da laje (Figura 54). O vão entre o pilar P3 e a viga VS6 foi dividido ao meio para separar dois trechos de carga, com as nervuras da laje tendo os comprimentos médios de 474 cm e 341 cm. A carga da laje sobre a viga VS1 foi calculada segundo esses comprimentos médios.

Relativamente ao comprimento de 474 cm foi considerada a carga de 23,72 kN/m, e de 20,09 kN/m no comprimento de 341 cm.

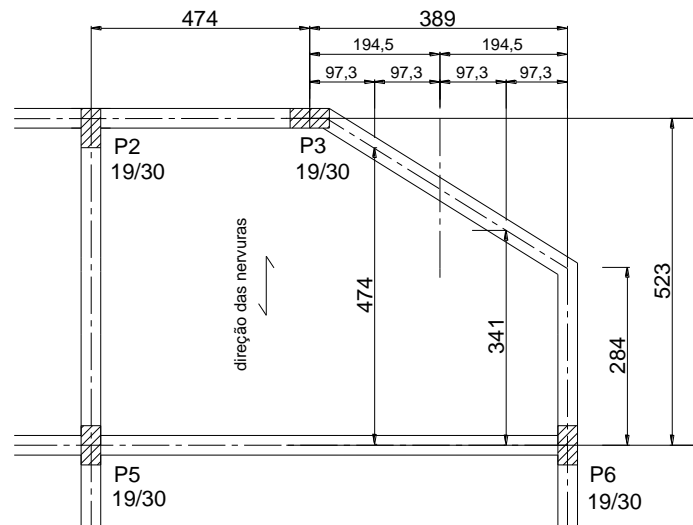


Figura 54 – Comprimentos médios considerados para as nervuras da laje no tramo da viga VS1.

### c.3) Viga VS6

A carga da laje na viga foi calculada como sendo a correspondente à largura de uma lajota, com 30 cm. A carga atuante na viga VS6 é:

- peso próprio:	$g_{pp} = 25 \cdot 0,19 \cdot 0,60 = 2,85 \text{ kN/m}$
- parede de alvenaria:	$g_{par} = 3,20 \cdot 2,40 = 7,68 \text{ kN/m}$
- laje:	$g_{laje} = 5,45 \cdot 0,30 = 1,64 \text{ kN/m}$
<b>CARGA TOTAL:</b>	<b><math>p = 12,17 \text{ kN/m}</math></b>

### d) Modelo de grelha para as vigas do pavimento

O comprimento de flambagem ( $\ell_e$ ) dos pilares, considerados biarticulados (na base e no topo), é de 300 cm, e  $\ell_e/4 = 300/4 = 75 \text{ cm}$ . Para a maior dimensão dos pilares na direção das vigas ( $b_{int}$ ) tem-se:

$$b_{int} = 30 \text{ cm} < \ell_e/4 = 75 \text{ cm}$$

Portanto, os pilares intermediários podem ser considerados como apoios simples para as vigas.

A NBR 6118 considera que as vigas contínuas, quando calculadas individualmente e separadas do restante da estrutura, tenham a vinculação obrigatoriamente considerada com os pilares extremos. Neste exemplo, as vigas serão consideradas vinculadas aos pilares extremos por meio de engastamentos elásticos (molas). O pilar P3 não será considerado como engaste elástico devido à continuidade da viga VS1 no pilar.

Para determinação dos esforços solicitantes segundo o modelo de grelha pode ser utilizado algum programa computacional com essa finalidade. Para o exemplo foi aplicado o programa GLAN4, de CORRÊA et al. (1992). Na Figura 55 mostra-se o modelo de grelha, representativo das vigas do pavimento superior, com a numeração dos nós e das barras. Os números externos no desenho indicam as propriedades das barras. No total são 16 nós e 19 barras. Alguns nós, posicionados no meio de algumas barras, foram introduzidos apenas para fornecerem uma indicação das flechas nas vigas.

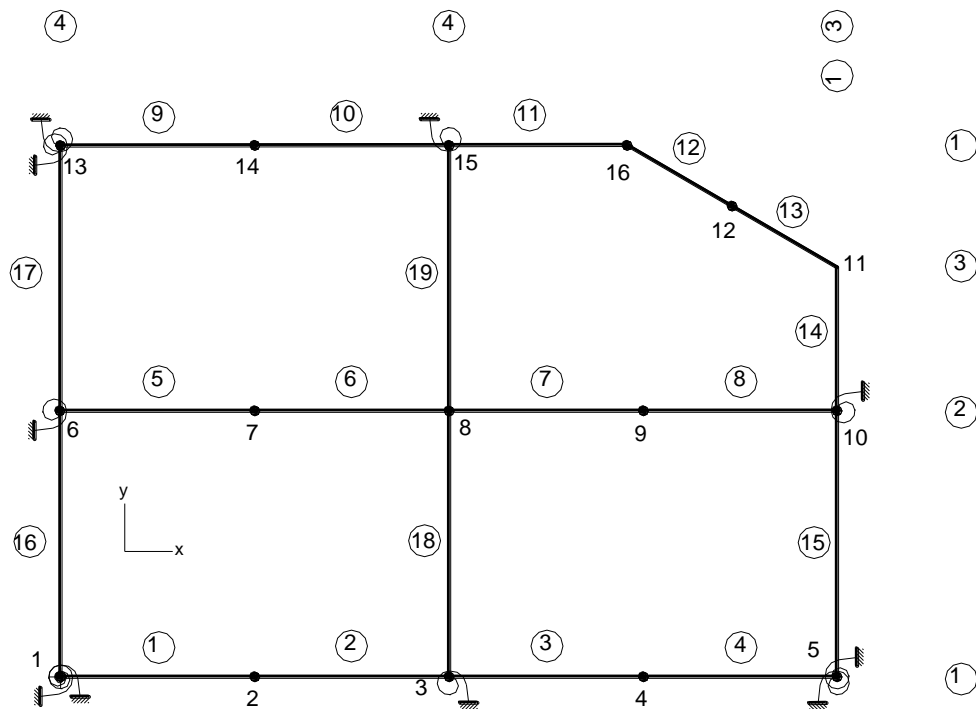


Figura 55 – Numeração dos nós, das barras, das propriedades das barras e indicação dos engastes elásticos nos pilares extremos.

#### d1) Rigidez da mola

A rigidez da mola dos engastes elásticos pode ser avaliada pela equação:  $K_{mola} = K_{p,sup} + K_{p,inf}$

Como os comprimentos de flambagem dos lances inferior e superior e a seção transversal dos pilares extremos são idênticos, as rigidezes dos lances inferior e superior são iguais e valem:

$$K_{p,sup} = K_{p,inf} = \frac{4EI}{\ell_e}$$

A rigidez da mola vale portanto:  $K_{mola} = \frac{8EI}{\ell_e}$

Supondo a viga trabalhando em serviço no estágio II (já fissurada), para o módulo de elasticidade do concreto será considerado o valor secante. O módulo tangente na origem pode ser avaliado pela seguinte expressão (NBR 6118, item 8.2.8):

$$E_{ci} = \alpha_E 5600 \sqrt{f_{ck}} = 1,2 \cdot 5600 \sqrt{35} = 39.756 \text{ MPa} = 3.975,6 \text{ kN/cm}^2$$

com  $\alpha_E = 1,2$  para brita de basalto (ou diabásio).

O módulo de elasticidade secante ( $E_{cs}$ ) é avaliado por:

$$E_{cs} = \alpha_i E_{ci} \quad , \quad \text{com} \quad \alpha_i = 0,8 + 0,2 \frac{f_{ck}}{80} \leq 1,0$$

$$\alpha_i = 0,8 + 0,2 \frac{35}{80} = 0,8875 \leq 1,0 \rightarrow \text{ok!}$$

$$E_{cs} = 0,8875 \cdot 3.975,6 = 3.528 \text{ kN/cm}^2$$

Para o módulo de elasticidade transversal ( $G$  - NBR 6118, item 8.2.9) pode-se considerar a relação:



$$G_c = \frac{E_{cs}}{2,4} = \frac{3528}{2,4} = 1.470 \text{ kN/cm}^2$$

O momento de inércia dos lances inferior e superior dos pilares P1, P7 e P9 (seção 19/19) é:

$$I_{p,\text{sup}} = I_{p,\text{inf}} = \frac{19 \cdot 19^3}{12} = 10.860 \text{ cm}^4$$

Rigidez da mola:<sup>20</sup>

$$K_{\text{mola}} = \frac{8EI}{\ell_e} = \frac{8 \cdot 3528 \cdot 10860}{\frac{300}{2}} = 2.043.418 \text{ kN.cm}$$

O momento de inércia dos lances inferior e superior dos pilares P4 e P6 (seção 19/30), considerando a direção da viga VS2, é:

$$I_{p,\text{sup}} = I_{p,\text{inf}} = \frac{30 \cdot 19^3}{12} = 17.148 \text{ cm}^4 \quad \rightarrow \quad K_{\text{mola}} = \frac{8EI}{\ell_e} = \frac{8 \cdot 3528 \cdot 17148}{\frac{300}{2}} = 3.226.568 \text{ kN.cm}$$

O momento de inércia dos lances inferior e superior dos pilares P2 e P8 (seção 19/30), considerando a direção da viga VS5, é:

$$I_{p,\text{sup}} = I_{p,\text{inf}} = \frac{19 \cdot 30^3}{12} = 42.750 \text{ cm}^4 \quad \rightarrow \quad K_{\text{mola}} = \frac{8EI}{\ell_e} = \frac{8 \cdot 3528 \cdot 42750}{\frac{300}{2}} = 8.043.840 \text{ kN.cm}$$

#### d2) Arquivo de dados

Para o arquivo de dados de entrada da grelha seguiram-se as recomendações contidas no manual de utilização do programa computacional GPLAN4.<sup>21</sup> Para o módulo de elasticidade do concreto adotou-se o valor calculado de 3.528 kN/cm<sup>2</sup>, e para o módulo de elasticidade transversal (G) o valor de 1.470 kN/cm<sup>2</sup>.

Nas barras com mudança de direção (12, 13 e 14) é necessário considerar o momento de inércia à torção. Nas demais barras, onde a torção de compatibilidade, quando existir, pode ser desprezada, apenas um pequeno valor foi adotado para não causar problema no processamento do programa (foi considerado 100).

Os momentos de inércia à torção (J) das barras 12, 13 e 14 foram calculados com a Eq. 38 e a Tabela 2, considerando a seção transversal 19 x 60 cm:

$$n = \frac{b}{h} = \frac{19}{60} = 0,317$$

$$J = j b^3 h = 0,266 \cdot 19^3 \cdot 60 = 109.470 \text{ cm}^4$$

O arquivo de dados de entrada para o programa GPLAN4 tem o aspecto:

```

OPTE, 2, 2, 2, 2, 2,
UNESP - BAURU. TORÇÃO EM VIGAS
EXEMPLO 3
GRELHA PAV.
NOGP
  1, 5, 1, 0, 0, 1438, 0,
  6, 10, 5, 0, 523, 1438, 523,
NOGL
  11, 12, 1, 1438, 807, 1243.5, 926.5,

```

<sup>20</sup> Se as dimensões e comprimento de flambagem dos pilares forem diferentes nos lances inferior e superior, os valores devem ser calculados individualmente para cada lance.

<sup>21</sup> CORRÊA, M.R.S. ; RAMALHO, M.A. ; CEOTTO, L.H. *Sistema PPLAN3/GPLAN3 – Manual de utilização*. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos – USP, Departamento de Engenharia de Estruturas, 1992, 80p. Disponível em [http://wwwwp.feb.unesp.br/pbastos/pag\\_concreto2.htm](http://wwwwp.feb.unesp.br/pbastos/pag_concreto2.htm)

```

13,15,1,0,1046,719,1046,
NO
16,1049,1046,
RESG
1,5,4,1,2,2,0,2043418,2043418,
6,10,4,1,0,2,0,0,3226568,
3,15,12,1,2,0,0,8043840,
RES
13,1,2,2,0,2043418,2043418,
8,1,
16,1,
BARG
1,4,1,1,1,2,1,1,1,
5,8,1,6,1,7,1,2,1,
9,11,1,13,1,14,1,1,1,
12,13,1,16,-4,12,-1,3,1,
16,17,1,1,5,6,7,4,1,
18,19,1,3,5,8,7,4,1,
BAR
14,11,10,3,1,
15,10,5,1,1,
PROP
1,1,1140,342000,100,60,
2,1,1330,543083,100,70,
3,1,1140,342000,109470,60,
4,1,855,144281,100,45,
MATL
1,3528,1470,
FIMG
CARR1
CBRG
1,4,1,1,-.2504,1,
5,8,1,1,-.4003,1,
9,11,1,1,-.2504,1,
14,15,1,1,-.1217,1,
16,17,1,1,-.1194,1,
18,19,1,1,-.1357,1,
CBR
12,1,-.2372,1,
13,1,-.2009,1,
FIMC
FIME

```

### *d3) Esforços solicitantes*

A Figura 56 e a Figura 57 mostram os diagramas de esforços solicitantes característicos (forças cortantes, momentos fletores e momentos torçores) obtidos no programa GPLAN4 para as vigas VS1 e VS6, respectivamente. A listagem completa dos resultados calculados pelo programa encontra-se no Anexo B3.

A flecha calculada (deslocamentos  $z$ ) pelo programa para os nós 2 (0,3 cm), 7 (0,3 cm), 11 (0,5 cm), 12 (0,4 cm) e 14 (0,4 cm), embora não sendo exatamente as flechas máximas das vigas, servem como valores indicativos da deslocabilidade vertical. A maior flecha, de 0,5 cm no nó 11 é menor que a flecha máxima permitida pela NBR 6118, de 10 mm para a situação de “*Efeitos em elementos não estruturais*”, considerando que sobre a viga existirá uma parede de alvenaria. Conclui-se que a seção transversal adotada para a viga é suficiente.

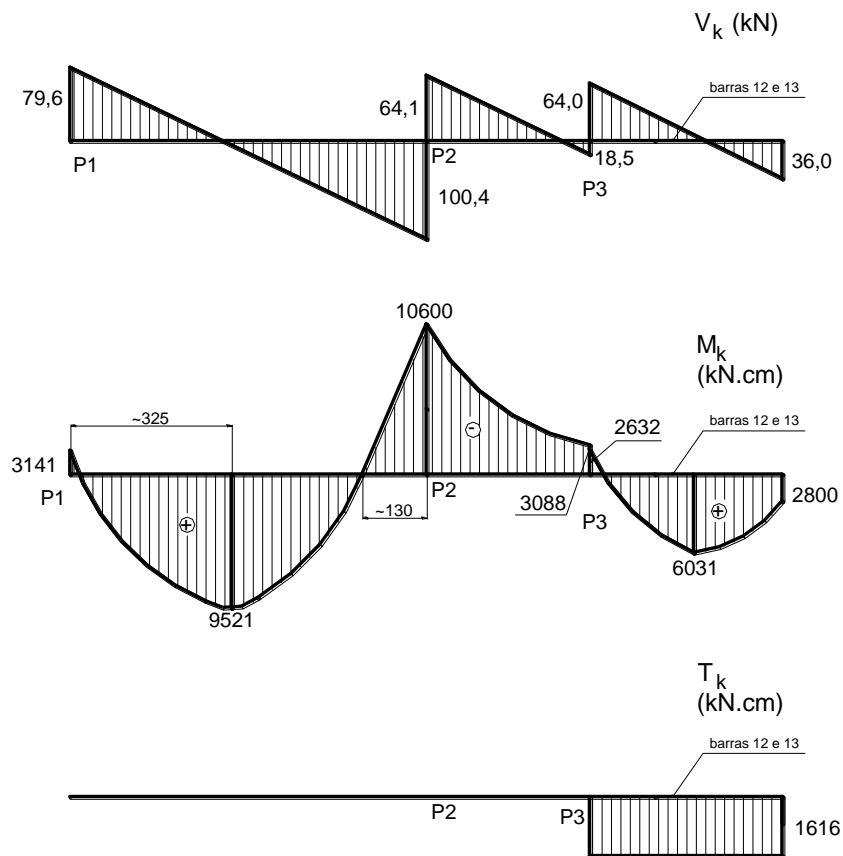


Figura 56 – Diagrama de esforços solicitantes característicos na viga VS1.

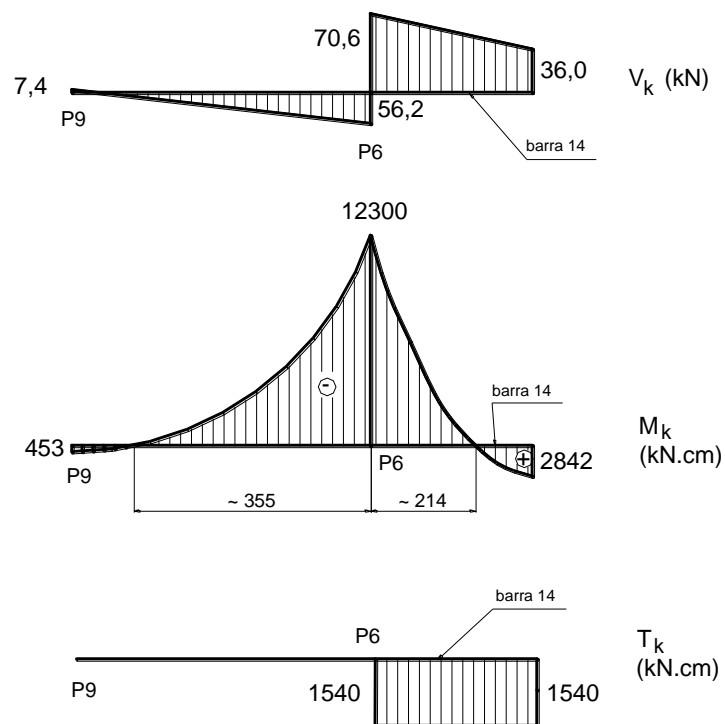


Figura 57 – Diagrama de esforços solicitantes característicos na viga VS6.

e) Armadura mínima de flexão

Conforme a Tabela A-6, para seção retangular e concreto C35, a taxa mínima de armadura ( $\rho_{\min}$ ) deve ser de 0,164 %  $A_c$ , portanto:

$$A_{s,\min} = 0,00164 \cdot 19 \cdot 60 = 1,87 \text{ cm}^2$$

#### f) Armadura de pele

A armadura de pele não é necessária, dado que a viga não tem altura superior a 60 cm (NBR 6118). No entanto, a fim de evitar fissuras de retração que possam surgir na viga, será colocada uma armadura de pele com área de 0,05 %  $A_c$  (área da armadura de pele conforme a NBR 6118/80), em cada face da viga:

$$A_{s,\text{pele}} = 0,0005 \cdot 19 \cdot 60 = 0,57 \text{ cm}^2$$

$4 \phi 4,2 \text{ mm} \rightarrow 0,56 \text{ cm}^2$  em cada face, distribuídos ao longo da altura (ver Figura 62).

#### g) Dimensionamento das armaduras da viga VS1

Serão dimensionadas as armaduras longitudinais e transversais, para os esforços solicitantes máximos de M, V e T.

##### g1) Armadura longitudinal de flexão

Normalmente a armadura longitudinal é calculada apenas para os momentos fletores máximos, positivos e negativos. A contribuição da capa (mesa) das lajes pré-fabricadas treliçadas não será considerada para formar seções L ou T, no dimensionamento à flexão.

##### g1.1) Momento fletor negativo

##### g1.1.1) Apoio pilar intermediário P2

Como o momento fletor negativo não é muito maior que o momento fletor máximo positivo no tramo esquerdo, por simplicidade não será feita a redução de M para  $\delta M$ , como permitida pela NBR 6118.

$$M_k = -10.600 \text{ kN.cm}$$

$$M_d = \gamma_f \cdot M_k = 1,4 \cdot (-10600) = -14.840 \text{ kN.cm}$$

Para a altura da viga de 60 cm será adotada a altura útil de 56 cm:

$$K_c = \frac{b_w d^2}{M_d} = \frac{19 \cdot 56^2}{14840} = 4,0$$

Da Tabela A-1:  $\beta_x = x/d = 0,16 \leq 0,45$  (ok!),  $K_s = 0,025$  e dom. 2.

$$A_s = K_s \frac{M_d}{d} = 0,025 \frac{14840}{56} = 6,63 \text{ cm}^2 > A_{s,\min} = 1,87 \text{ cm}^2$$

$$4 \phi 12,5 \text{ mm} (5,00 \text{ cm}^2) + 2 \phi 10 \text{ mm} (1,60 \text{ cm}^2) \rightarrow 6,60 \text{ cm}^2$$

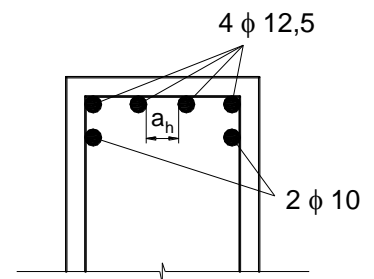
Considerando que o vibrador de agulha que será aplicado no adensamento do concreto tenha agulha com diâmetro de 25 mm, a distância livre horizontal entre as barras da primeira fiada deve superar 25 mm. Supondo estribo com diâmetro de 6,3 mm e  $c = 2,5$  cm, para o detalhamento mostrado a distância livre resulta:

$$a_h = \frac{19 - [2(2,5 + 0,63) + 4 \cdot 1,25]}{3} = 2,6 \text{ cm} = 26 \text{ mm}$$

distância suficiente para a passagem da agulha do vibrador.

##### g1.1.2) Apoio pilar intermediário P3

Neste pilar, devido aos esforços de torção e mudança na direção dos tramos, ocorrem dois diferentes valores para o momento fletor negativo. O cálculo será feito para o maior valor, de  $-3.088 \text{ kN.cm}$ .



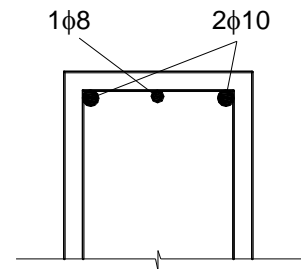
$$M_d = \gamma_f \cdot M_k = 1,4 \cdot (-3088) = -4.323 \text{ kN.cm}$$

$$K_c = \frac{b_w d^2}{M_d} = \frac{19 \cdot 56^2}{4323} = 13,8$$

Da Tabela A-1:  $\beta_x = x/d = 0,04 \leq 0,45$  (ok!),  $K_s = 0,023$  e dom. 2.

$$A_s = K_s \frac{M_d}{d} = 0,023 \frac{4323}{56} = 1,78 \text{ cm}^2 < A_{s,\text{mín}} = 1,87 \text{ cm}^2$$

$$2 \phi 10 \text{ mm} + 1 \phi 8 \text{ mm} = 2,10 \text{ cm}^2$$



### g1.1.3) Apoio pilar extremo P1

$$M_k = -3.141 \text{ kN.cm}$$

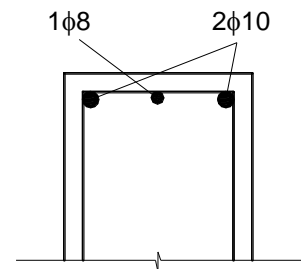
$$M_d = \gamma_f \cdot M_k = 1,4 \cdot (-3141) = -4.397 \text{ kN.cm}$$

$$K_c = \frac{b_w d^2}{M_d} = \frac{19 \cdot 56^2}{4397} = 13,6$$

Da Tabela A-1:  $\beta_x = x/d = 0,04 \leq 0,45$  (ok!),  $K_s = 0,023$  e dom. 2.

$$A_s = K_s \frac{M_d}{d} = 0,023 \frac{4397}{56} = 1,81 \text{ cm}^2 < A_{s,\text{mín}} = 1,87 \text{ cm}^2$$

$$2 \phi 10 \text{ mm} + 1 \phi 8 \text{ mm} = 2,10 \text{ cm}^2$$



### g1.1.4) Momento fletor positivo entre os pilares P1 e P2

Como a laje adjacente à viga é do tipo nervurada pré-fabricada, com capa de concreto de espessura 4 cm, normalmente não se considera a contribuição dessa capa de pequena espessura para formar a mesa da seção T, de modo que a viga será calculada como seção retangular.

$$M_k = 9.521 \text{ kN.cm}$$

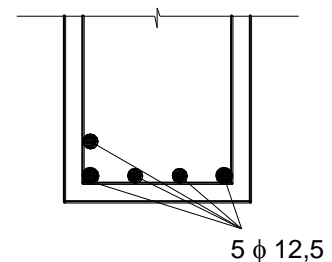
$$M_d = \gamma_f \cdot M_k = 1,4 \cdot 9521 = 13.329 \text{ kN.cm}$$

$$K_c = \frac{b_w d^2}{M_d} = \frac{19 \cdot 56^2}{13329} = 4,5$$

Da Tabela A-1:  $\beta_x = x/d = 0,14 \leq 0,45$  (ok!),  $K_s = 0,024$  e dom. 2.

$$A_s = K_s \frac{M_d}{d} = 0,024 \frac{13329}{56} = 5,71 \text{ cm}^2 > A_{s,\text{mín}} = 1,87 \text{ cm}^2$$

$$5 \phi 12,5 = 6,25 \text{ cm}^2$$



### g1.1.5) Momento fletor positivo entre os pilares P2 e P3

Os momentos fletores no tramo entre os pilares P2 e P3 resultaram negativos no modelo de grelha (ver Figura 56). Neste caso, particularmente, é importante verificar a ocorrência de momento fletor positivo, conforme exige a NBR 6118, fazendo o tramo isolado, como mostrado na Figura 58. O pilar P3 será considerado apoio simples devido à mudança de direção dos tramos nesse pilar.

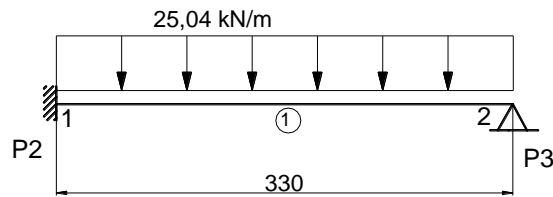


Figura 58 – Esquema estático, carregamento e numeração dos nós e barra para obtenção do momento fletor positivo considerando engaste no apoio interno P2 da viga VS1.

O arquivo de dados de entrada no programa PPLAN4 está apresentado a seguir. O relatório com os resultados encontra-se no Anexo B4.

```

OPTE,2,2,2,2,2,
UNESP, BAURU/SP - DISC. CONCRETO II - TORÇÃO
MOMENTO POSITIVO ENTRE OS PILARES P2 E P3, COM ENGASTE NO PILAR P2
VS1 (19 x 60)
NOGL
    1,2,1,0,0,330,0,
RES
    1,1,1,1,
    2,1,1,
BAR
    1,1,2,1,1,
PROP
    1,1,1140,342000,60,
MATL
    1,3528,
FIMG
CARR1
CBR
    1,1,-0.2504,1,
FIMC
FIME

```

O máximo momento fletor positivo para o esquema mostrado na Figura 58 resulta 1.909 kN.cm. Esse momento deve ser considerado no dimensionamento da armadura longitudinal positiva do tramo.

$$M_k = 1.909 \text{ kN.cm} \quad (\text{ver Anexo B4})$$

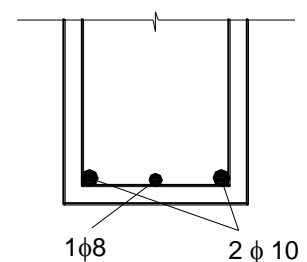
$$M_d = 1,4 \cdot 1.909 = 2.673 \text{ kN.cm}$$

$$K_c = \frac{b_w d^2}{M_d} = \frac{19 \cdot 56^2}{2673} = 22,3$$

Da Tabela A-1:  $\beta_x = x/d = 0,03 \leq 0,45$  (ok!),  $K_s = 0,023$  e dom. 2.

$$A_s = K_s \frac{M_d}{d} = 0,023 \frac{2673}{56} = 1,10 \text{ cm}^2 < A_{s,\min} = 1,87 \text{ cm}^2$$

$$2 \phi 10 \text{ mm} + 1 \phi 8 \text{ mm} = 2,10 \text{ cm}^2$$



#### g1.1.6) Momento fletor positivo à direita do pilar P3

$$M_k = 6.031 \text{ kN.cm}$$

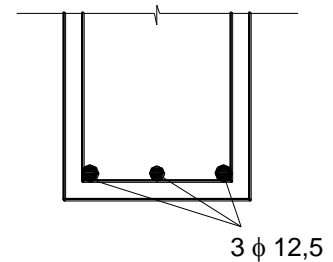
$$M_d = \gamma_f \cdot M_k = 1,4 \cdot 6.031 = 8.443 \text{ kN.cm}$$

$$K_c = \frac{b_w d^2}{M_d} = \frac{19 \cdot 56^2}{8443} = 7,1$$

Da Tabela A-1:  $\beta_x = x/d = 0,09 \leq 0,45$  (ok!),  $K_s = 0,024$  e dom. 2.

$$A_s = K_s \frac{M_d}{d} = 0,024 \frac{8443}{56} = 3,62 \text{ cm}^2 > A_{s,\text{mín}} = 1,87 \text{ cm}^2$$

$$3 \phi 12,5 = 3,75 \text{ cm}^2$$



## g2) Armadura transversal à força cortante

O dimensionamento à força cortante será feito com as equações simplificadas apresentadas em BASTOS (2021). Será considerado o Modelo de Cálculo I ( $\theta = 45^\circ$  - ângulo de inclinação das diagonais de compressão). O cálculo está apresentado apenas para a força cortante máxima na viga VS1.

### g2.1) Tramo à esquerda do pilar intermediário P2

$$V_k = 100,4 \text{ kN.cm}$$

$$V_{Sd} = \gamma_f \cdot V_k = 1,4 \cdot 100,4 = 140,6 \text{ kN}$$

#### g2.1.1) Verificação das diagonais de compressão

Na Tabela A-4, para o concreto C35 determina-se a força cortante máxima:

$$V_{Rd2} = 0,58 b_w d = 0,58 \cdot 19 \cdot 56 = 617,1 \text{ kN}$$

$$V_{Sd} = 140,6 \leq V_{Rd2} = 617,1 \text{ kN} \quad \rightarrow \text{ ok!, não ocorrerá o esmagamento do concreto nas diagonais de compressão.}$$

#### g2.1.2) Cálculo da armadura transversal

Na Tabela A-4, para o concreto C35 a equação para determinar a força cortante correspondente à armadura mínima é:

$$V_{Sd,\text{mín}} = 0,147 b_w d = 0,147 \cdot 19 \cdot 56 = 156,4 \text{ kN}$$

$$V_{Sd} = 140,6 < V_{Sd,\text{mín}} = 156,4 \text{ kN} \quad \rightarrow \text{ portanto, deve-se dispor a armadura mínima transversal.}$$

Como todas as demais forças cortantes atuantes são menores que  $V_k$  de 100,4 kN, conclui-se que todos os tramos devem ter a armadura transversal mínima.

A armadura mínima é calculada pela equação:

$$A_{sw,\text{mín}} = \frac{20 f_{ct,m}}{f_{yk}} b_w \quad (\text{cm}^2/\text{m}), \text{ com } f_{ct,m} = 0,3 \sqrt[3]{f_{ck}^2} = 0,3 \sqrt[3]{35^2} = 3,21 \text{ MPa}$$

$$A_{sw,\text{mín}} = \frac{20 \cdot 0,321}{50} 19 = 2,44 \text{ cm}^2/\text{m}$$

#### g2.1.3) Detalhamento da armadura transversal

$$\text{- Diâmetro do estribo: } 5 \text{ mm} \leq \phi_t \leq b_w/10 \quad \rightarrow \phi_t \leq 190/10 \leq 19 \text{ mm}$$

- Espaçamento máximo:

$$0,67 V_{Rd2} = 0,67 \cdot 617,1 = 413,5 \text{ kN}$$

$$V_{Sd} = 140,6 < 413,5 \text{ kN} \quad \rightarrow \quad s \leq 0,6 d \leq 30 \text{ cm}$$

$$0,6 d = 0,6 \cdot 56 = 33,6 \text{ cm} \quad \rightarrow \quad \text{portanto, } s_{\text{máx}} = 30 \text{ cm}$$

- Espaçamento transversal entre os ramos verticais do estribo:

$$0,20 V_{Rd2} = 0,20 \cdot 617,1 = 123,4 \text{ kN}$$

$$V_{Sd} = 140,6 > 123,4 \text{ kN} \quad \rightarrow \quad s_t \leq 0,6 d \leq 35 \text{ cm}$$

$$0,6 d = 0,6 \cdot 56 = 33,6 \text{ cm} \quad \rightarrow \quad \text{portanto, } s_{t,\text{máx}} = 33,6 \text{ cm}$$

#### g2.1.4) Detalhamento da armadura transversal

No tramo da viga VS1 do lado esquerdo do pilar P2 tem-se  $A_{sw} = A_{sw,\text{mín}} = 2,44 \text{ cm}^2/\text{m} = 0,0244 \text{ cm}^2/\text{cm}$ . Considerando estribo vertical composto por dois ramos e diâmetro de 5 mm ( $1\phi 5 \text{ mm} \rightarrow 0,20 \text{ cm}^2$ ), tem-se:

$$\frac{A_{sw}}{s} = 0,0244 \text{ cm}^2/\text{cm} \quad \rightarrow \quad \frac{0,40}{s} = 0,0244 \quad \rightarrow \quad s = 16,4 \text{ cm} \leq s_{\text{máx}} = 30 \text{ cm} \quad (\text{ok!})$$

portanto, estribo  $\phi 5 \text{ mm}$  c/16 cm para os tramos.

#### g3) Ancoragem das armaduras longitudinais

##### g3.1) Armadura positiva no pilar extremo P1

A força cortante na viga na posição do pilar P1 é:

$$V_k = 79,6 \text{ kN} \quad \rightarrow \quad V_{Sd} = 1,4 \cdot 79,6 = 111,4 \text{ kN}$$

Valor da decalagem do diagrama de momentos fletores ( $a_\ell$ ) segundo o Modelo de Cálculo I, para estribos verticais:<sup>22</sup>

$$a_\ell = \frac{d}{2} \frac{V_{Sd,\text{máx}}}{(V_{Sd,\text{máx}} - V_c)} \leq d, \quad \text{com } a_\ell \geq 0,5d$$

Na flexão simples,  $V_c = V_{c0} = 0,6 f_{ctd} b_w d = 0,6 \cdot 0,160 \cdot 19 \cdot 56 = 102,1 \text{ kN}$

$$f_{ctd} = \frac{f_{ctk,\text{inf}}}{\gamma_c} = \frac{0,7 f_{ct,m}}{\gamma_c} = \frac{0,7 \cdot 0,3}{\gamma_c} \sqrt[3]{f_{ck}^2} = \frac{0,7 \cdot 0,3}{1,4} \sqrt[3]{35^2} = 1,60 \text{ MPa} = 0,160 \text{ kN/cm}^2$$

$$a_\ell = \frac{56}{2} \frac{111,4}{(111,4 - 102,1)} = 335,4 \text{ cm} \leq d = 56 \text{ cm} \quad \rightarrow \quad \text{portanto, } a_\ell = 56 \text{ cm}$$

A armadura a ancorar no apoio é:

$$A_{s,\text{anc}} = \frac{a_\ell V_{Sd}}{d f_{yd}} = \frac{56 (111,4)}{56 \frac{50}{1,15}} = 2,56 \text{ cm}^2$$

A armadura a ancorar no apoio deve atender à armadura mínima:

$$A_{s,\text{anc}} \geq \begin{cases} \frac{1}{3} A_{s,\text{vão}} & \text{se } M_{\text{apoio}} = 0 \text{ ou negativo e de valor } |M_{\text{apoio}}| \leq \frac{M_{\text{vão}}}{2} \\ \frac{1}{4} A_{s,\text{vão}} & \text{se } M_{\text{apoio}} = \text{negativo e de valor } |M_{\text{apoio}}| > \frac{M_{\text{vão}}}{2} \end{cases}$$

$$|M_{d,\text{apoio}}| = |-4.397| \text{ kN.cm} < M_{d,\text{vão}}/2 = 13.329/2 = 6.665 \text{ kN.cm}$$

Portanto,  $A_{s,\text{anc}} \geq 1/3 A_{s,\text{vão}} = 5,71/3 = 1,90 \text{ cm}^2$

<sup>22</sup> BASTOS, P.S.S. *Ancoragem e emenda de armaduras*. Bauru/SP, Departamento Engenharia Civil, Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2123 – Estruturas de Concreto II, Mar/2018, 41p. ([http://www.feb.unesp.br/pbastos/pag\\_concreto2.htm](http://www.feb.unesp.br/pbastos/pag_concreto2.htm)).



$$A_{s,anc} = 2,56 \text{ cm}^2 \geq 1/3 A_{s,v\tilde{a}o} = 1,90 \text{ cm}^2 \rightarrow \text{ok!}$$

Se resultar  $A_{s,anc}$  menor que o valor mínimo, deve-se seguir nos cálculos com  $A_{s,anc}$  igual ao valor mínimo (1/3 ou 1/4 do  $A_{s,v\tilde{a}o}$ ).

A armadura positiva do vão adjacente ao pilar é composta por 5  $\phi$  12,5 mm, onde 2  $\phi$  12,5 posicionados nos vértices dos estribos devem ser obrigatoriamente estendidos até os apoios. Portanto, pode-se considerar que 2  $\phi$  12,5 ( $2,50 \text{ cm}^2 = A_{s,ef}$ ) atendem a área necessária a ancorar, de  $2,56 \text{ cm}^2$ . A armadura a ancorar deve penetrar no pilar no comprimento de ancoragem básico ( $\ell_b$ ).

Conforme a Tabela A-7, o comprimento de ancoragem básico (sem gancho), para barra de diâmetro 12,5 mm, concreto C35, aço CA-50, em região de boa aderência, é 38 cm.

O comprimento de ancoragem corrigido é:

$$\ell_{b,corr} = \ell_b \frac{A_{s,anc}}{A_{s,ef}} = 38 \frac{2,56}{2,50} = 38,9 \text{ cm}$$

O comprimento de ancoragem efetivo do apoio é:

$$\ell_{b,ef} = b - c = 19 - 2,5 = 16,5 \text{ cm}$$

O comprimento mínimo da ancoragem no apoio ( $\ell_{b,m\acute{i}n}$ ) é:

$$\ell_{b,m\acute{i}n} \geq \begin{cases} r + 5,5\phi \\ 6 \text{ cm} \end{cases}$$

$$r = 5\phi/2 = 5 \cdot 1,25/2 = 3,1 \text{ cm}$$

(com D determinado na Tabela A-10)

$$r + 5,5\phi = 3,1 + 5,5 \cdot 1,25 = 10,0 \text{ cm} > 6 \text{ cm} \rightarrow \therefore \ell_{b,m\acute{i}n} = 10,0 \text{ cm}$$

Tem-se que  $\ell_{b,corr} = 38,9 \text{ cm} > \ell_{b,m\acute{i}n} = 10,0 \text{ cm} \rightarrow \text{ok!}$

Numa primeira análise verifica-se que o comprimento de ancoragem corrigido é superior ao comprimento de ancoragem efetivo ( $\ell_{b,corr} = 38,9 \text{ cm} > \ell_{b,ef} = 16,5 \text{ cm}$ ). Isto significa que não é possível fazer a ancoragem reta. A próxima tentativa de ancoragem é fazer o gancho na extremidade das barras. O comprimento de ancoragem, com gancho, é:

$$\ell_{b,gancho} = 0,7 \cdot 38,9 = 27,2 \text{ cm}$$

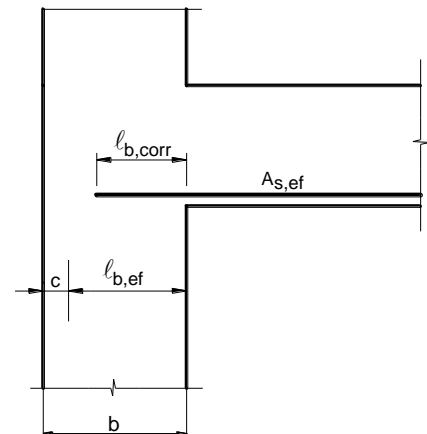
Verifica-se que mesmo com o gancho ainda não é possível fazer a ancoragem, pois o comprimento de ancoragem resultou maior que o comprimento de ancoragem efetivo: ( $\ell_{b,gancho} = 27,2 \text{ cm} > \ell_{b,ef} = 16,5 \text{ cm}$ ).

A próxima alternativa é aumentar a armadura longitudinal a ancorar no apoio, para  $A_{s,corr}$ :

$$A_{s,corr} = \frac{0,7 \ell_b}{\ell_{b,ef}} A_{s,anc} = \frac{0,7 \cdot 38}{16,5} 2,56 = 4,13 \text{ cm}^2$$

Para atender a armadura corrigida pode-se estender mais duas barras das cinco barras da armadura positiva no vão, ou seja,  $A_{s,ef} = 5,00 \text{ cm}^2$  (4  $\phi$  12,5), o que atende com folga à armadura corrigida. Como uma alternativa a este arranjo, pode-se manter 2  $\phi$  12,5 ( $A_{s,ef} = 2,50 \text{ cm}^2$ ) da armadura longitudinal e acrescentar grampos complementares, com área de:

$$A_{s,gr} = A_{s,corr} - A_{s,ef} = 4,13 - 2,50 = 1,63 \text{ cm}^2 \rightarrow (1 \text{ grampo: } 2 \phi 10 \text{ mm} \rightarrow 1,60 \text{ cm}^2)$$



A armadura a ancorar fica com  $2 \phi 12,5 + 2 \phi 10 \rightarrow 4,10 \text{ cm}^2$ . O detalhe da ancoragem está mostrado na Figura 59.

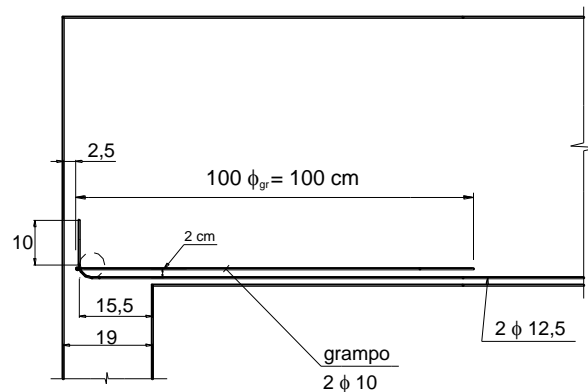


Figura 59 – Detalhe da ancoragem nos pilares extremos.

### g3.2) Armadura positiva nos pilares intermediários (internos)

Estendendo  $2 \phi 12,5$  (dos vértices dos estribos) da armadura longitudinal positiva do vão até o pilar intermediário P2 ( $A_{s,anc} = 2,50 \text{ cm}^2$ ), esta armadura deve ser superior à armadura mínima a ancorar:

$$|M_{d,apoiio}| = |-14.840| \text{ kN.cm} > M_{d,v\tilde{a}o}/2 = 13.329/2 = 6.665 \text{ kN.cm}$$

$$\text{Portanto, } A_{s,anc} \geq 1/4 A_{s,v\tilde{a}o} = 5,71/4 = 1,43 \text{ cm}^2$$

$$A_{s,anc} = 2,50 \text{ cm}^2 > 1/4 A_{s,v\tilde{a}o} = 1,43 \text{ cm}^2 \rightarrow \text{ok!}$$

As duas barras de 12,5 mm devem se estender  $10\phi$  além da face do pilar.

No caso do tramo à esquerda do pilar P3, como o vão é pequeno, não há necessidade de interromper parte da armadura antes dos apoios, ou seja, pode-se estender até os apoios todas as barras da armadura longitudinal positiva ( $2 \phi 10 + 1 \phi 8 \rightarrow 2,10 \text{ cm}^2$ ). Esta área deve ser superior à armadura mínima a ancorar, de  $1/4 A_{s,v\tilde{a}o} = 1,10/4 = 0,28 \text{ cm}^2$ .

$$\text{Portanto, } A_{s,anc} = 2,10 \text{ cm}^2 > 1/4 A_{s,v\tilde{a}o} = 0,28 \text{ cm}^2 \rightarrow \text{ok!}$$

No tramo à direita do pilar P3 tem-se:

$$|M_{d,apoiio}| = |-3.685| \text{ kN.cm} < M_{d,v\tilde{a}o}/2 = 8.443/2 = 4.222 \text{ kN.cm}$$

$$\text{Portanto, } A_{s,anc} \geq 1/3 A_{s,v\tilde{a}o} = 3,62/3 = 1,21 \text{ cm}^2$$

ancorando as duas barras dos vértices dos estribos:  $2 \phi 12,5 \text{ mm} \rightarrow 2,50 \text{ cm}^2$ , é atendida a área mínima de  $1,21 \text{ cm}^2$ .

Para a força cortante  $V_k = 100,4 \text{ kN}$  no tramo à esquerda do pilar P2, o valor da decalagem do diagrama de momentos fletores ( $a_\ell$ ), segundo o Modelo de Cálculo I, é:

$$V_{Sd} = 1,4 \cdot 100,4 = 140,6 \text{ kN}$$

$$a_\ell = \frac{d}{2} \frac{V_{Sd,m\acute{a}x}}{(V_{Sd,m\acute{a}x} - V_c)} \leq d, \quad \text{com } a_\ell \geq 0,5d$$

$$\text{Na flex\~ao simples, } V_c = V_{c0} = 0,6f_{ctd} b_w d = 0,6 \cdot 0,160 \cdot 19 \cdot 56 = 102,1 \text{ kN}$$

$$f_{ctd} = \frac{f_{ctk,inf}}{\gamma_c} = \frac{0,7 f_{ct,m}}{\gamma_c} = \frac{0,7 \cdot 0,3}{\gamma_c} \sqrt[3]{f_{ck}^2} = \frac{0,7 \cdot 0,3}{1,4} \sqrt[3]{35^2} = 1,60 \text{ MPa} = 0,160 \text{ kN/cm}^2$$

$$a_{\ell} = \frac{56}{2} \frac{140,6}{(140,6 - 102,1)} = 102,2 \text{ cm} \leq d = 56 \text{ cm} \quad \rightarrow \text{portanto, } a_{\ell} = 56 \text{ cm}$$

este valor, que é o máximo possível, será adotado para os demais tramos.

### g3.3) Armadura negativa no pilar extremo P1

A armadura negativa proveniente do engastamento elástico nos pilares extremos deve penetrar até próximo à face externa do pilar, respeitando-se a espessura do cobrimento, e possuir um gancho direcionado para baixo, com comprimento de pelo menos  $35\phi$ . O diâmetro de dobramento deve ser de  $5\phi$  (para CA-50 e  $\phi < 20 \text{ mm}$ ), como indicado na Figura 60.

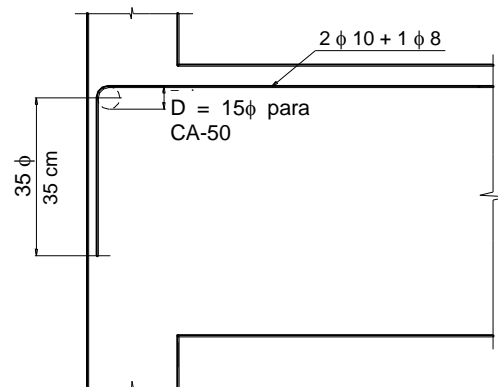


Figura 60 – Ancoragem da armadura negativa nos pilares extremos.

### g4) Dimensionamento à torção

O tramo à direita do pilar P3 está submetido ao momento de torção característico ( $T_k$ ) de 1.616 kN.cm. O momento de cálculo é:

$$T_{sd} = \gamma_f \cdot T_k = 1,4 \cdot 1.616 = 2.262 \text{ kN.cm}$$

#### g4.1) Verificação das diagonais comprimidas

$$\text{Área da seção transversal: } A = b_w \cdot h = 19 \cdot 60 = 1.140 \text{ cm}^2$$

$$\text{Perímetro da seção transversal: } u = 2(b_w + h) = 2(19 + 60) = 158 \text{ cm}$$

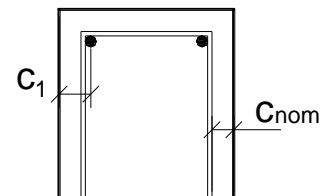
As Eq. 19 e 20 fornecem os limites para a espessura  $h_e$  da parede fina:

$$h_e \leq \frac{A}{u} = \frac{1140}{158} = 7,2 \text{ cm} \quad \text{e} \quad h_e \geq 2c_1$$

Sendo  $c = 2,5 \text{ cm}$  e supondo  $\phi_{\ell} = 12,5 \text{ mm}$  e  $\phi_t = 8 \text{ mm}$  encontra-se:

$$c_1 = \phi_{\ell}/2 + \phi_t + c_{\text{nom}} = 1,25/2 + 0,8 + 2,5 = 3,925 \text{ cm}$$

$$h_e \geq 2c_1 = 2 \cdot 3,925 = 7,85 \text{ cm}$$



Portanto, os limites para  $h_e$  são:  $7,85 \text{ cm} \leq h_e \leq 7,2 \text{ cm}$ , ou seja:  $h_e \leq 7,2 \text{ cm}$  e  $h_e \geq 7,85 \text{ cm}$ . Não é possível adotar um valor para  $h_e$  que atenda aos limites.

Neste caso, para resolver o problema, entre outras soluções, pode-se aumentar as dimensões da seção transversal da viga. A solução que melhor resolve o problema é aumentar a largura da viga.<sup>23</sup>

Quando ocorre  $A/u < 2c_1$ , e não se deseja fazer alterações na viga, a NBR 6118 permite adotar:  $h_e = A/u \leq b_w - 2c_1$ :

$$h_e = A/u = 7,2 \text{ cm} \leq b_w - 2c_1 = 19 - 7,85 = 11,15 \text{ cm} \rightarrow \text{ok!}$$

$$\therefore h_e = 7,2 \text{ cm}$$

A área  $A_e$  deve ser definida pelos eixos das barras dos cantos (respeitando-se o cobrimento exigido nos estribos):

$$A_e = (b_w - 2c_1) \cdot (h - 2c_1) = (19 - 7,85) \cdot (60 - 7,85) = 581,5 \text{ cm}^2$$

O perímetro da área equivalente neste caso é:

$$u_e = 2 [(b_w - 2c_1) + (h - 2c_1)] = 2 [(19 - 7,85) + (60 - 7,85)] = 126,6 \text{ cm}$$

O momento torçor máximo, determinado pela Eq. 23, com ângulo  $\theta$  ( $45^\circ$ ) igual ao aplicado no cálculo da viga à força cortante (Modelo de Cálculo I), é:

$$T_{Rd,2} = 0,5 \alpha_{v2} f_{cd} A_e h_e \sin 2\theta = 0,5 (1 - 35/250) \cdot (3,5/1,4) 581,5 \cdot 7,2 \cdot \sin 2 \cdot 45 = 4.500,8 \text{ kN.cm}$$

Para não ocorrer esmagamento do concreto nas bielas comprimidas, conforme a Eq. 34 deve-se ter:

$$\frac{V_{Sd}}{V_{Rd2}} + \frac{T_{Sd}}{T_{Rd2}} \leq 1$$

Sendo  $V_{Rd2} = 617,1 \text{ kN}$  e  $V_{Sd,m\acute{a}x} = 89,6 \text{ kN}$  (de  $V_k = 64,0 \text{ kN}$  – do tramo direito no pilar P3), aplicando os valores numéricos na Eq. 34 fica:

$$\frac{89,6}{617,1} + \frac{2262}{4500,8} = 0,65 \leq 1,0 \rightarrow \text{ok!}$$

Como a equação foi satisfeita não ocorrerá o esmagamento do concreto nas diagonais de compressão.

#### g4.2) Cálculo das armaduras

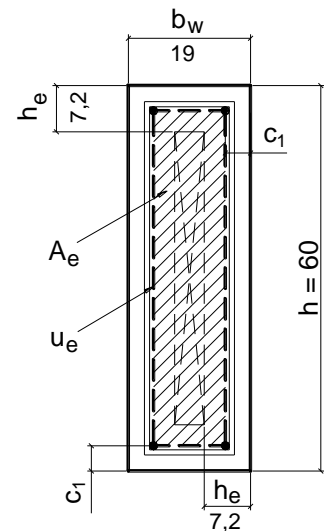
As armaduras mínimas para torção, longitudinal e transversal, são (Eq. 32):

$$A_{s\ell,m\acute{i}n} = \frac{20 f_{ct,m}}{f_{ywk}} h_e = \frac{20 \cdot 0,321}{50} 7,2 = 0,92 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$A_{s,90m\acute{i}n} = \frac{20 f_{ct,m}}{f_{ywk}} b_w = \frac{20 \cdot 0,321}{50} 19 = 2,44 \text{ cm}^2/\text{m}$$

com  $f_{ct,m} = 0,3 \sqrt[3]{f_{ck}^2} = 0,3 \sqrt[3]{35^2} = 3,21 \text{ MPa}$  (resistência média do concreto à tração direta).

<sup>23</sup> Ver o Exemplo 2.



Armadura longitudinal conforme a Eq. 27:

$$\frac{A_{s\ell}}{u_e} = \frac{T_{Sd}}{2 A_e f_{ywd} \operatorname{tg} \theta} = \frac{2262}{2 \cdot 581,5 \frac{50}{1,15} \operatorname{tg} 45} = 0,0447 \text{ cm}^2/\text{cm}$$

com  $u_e = 100 \text{ cm}$ ,  $A_{s\ell} = 4,47 \text{ cm}^2/\text{m} \geq A_{s\ell, \min} = 0,92 \text{ cm}^2/\text{m} \rightarrow \text{ok!}$

Armadura transversal (estribos) conforme a Eq. 24:

$$\frac{A_{s,90}}{s} = \frac{T_{Sd}}{2 A_e f_{ywd}} \operatorname{tg} \theta = \frac{2262}{2 \cdot 581,5 \frac{50}{1,15}} \operatorname{tg} 45 = 0,0447 \text{ cm}^2/\text{cm}$$

com  $s = 100 \text{ cm}$ ,  $A_{s,90} = 4,47 \text{ cm}^2/\text{m} \geq A_{s,90 \min} = 2,44 \text{ cm}^2/\text{m} \rightarrow \text{ok!}$

#### g4.3) Detalhamento das armaduras

O diagrama de  $T_k$  na

Figura 56 mostra que as armaduras para torção devem ser mantidas obrigatoriamente constantes ao longo do tramo.

##### g4.3.1) Armadura longitudinal

A armadura longitudinal de torção pode ser combinada com a armadura longitudinal de flexão, considerando as seções onde ocorreram os momentos fletores máximos, no pilar P3 e no vão. A análise deve ser feita para cada uma das quatro faces da viga, mantendo-se a proporcionalidade de armadura.

*Seção adjacente ao pilar P3:*

Face superior:

- da flexão:  $A_s = 1,51 \text{ cm}^2$  (armadura de flexão calculada para  $M_k = -2.632 \text{ kN.cm}$ )
- da torção:  $A_s = (b_w - 2c_1) A_{s\ell} = (19 - 7,85) 0,0447 = 0,50 \text{ cm}^2$
- $A_{s, \text{total}} = 1,51 + 0,50 = 2,01 \text{ cm}^2$  ( $2 \phi 12,5 \rightarrow 2,50 \text{ cm}^2$ )

Na região sob momento fletor negativo a resistência será proporcionada por  $2 \phi 12,5$ , e no restante do tramo (sob momento fletor positivo) serão colocados  $2 \phi 8 \text{ mm}$ , que atendem com folga a armadura necessária para torção ( $0,50 \text{ cm}^2$ ), e as barras trabalham também como porta-estribos.

Face inferior:

- da flexão:  $A_s = 1,21 \text{ cm}^2$  (armadura mínima a ancorar no pilar P3)
- da torção:  $A_s = (b_w - 2c_1) A_{s\ell} = (19 - 7,85) 0,0447 = 0,50 \text{ cm}^2$
- $A_{s, \text{total}} = 1,21 + 0,50 = 1,71 \text{ cm}^2$

Esta armadura será atendida pela armadura longitudinal positiva à direita do pilar P3, que será estendida do vão e ancorada no pilar:  $3 \phi 12,5 \text{ mm} \rightarrow 3,75 \text{ cm}^2$ .

Faces laterais:

-  $A_{s, \text{total}} = (h - 2c_1) A_{s\ell} = (60 - 7,85) 0,0447 = 2,33 \text{ cm}^2$  ( $3 \phi 10 \text{ mm} \rightarrow 2,40 \text{ cm}^2$ ). Esta armadura, em cada face, deve estender-se do pilar P3 até a intersecção com a viga VS6; essa armadura contribui também para evitar possíveis fissuras por retração do concreto.

##### Região do máximo momento fletor positivo

Face superior:

- da flexão:  $A_s = 0,00 \text{ cm}^2$

- da torção:  $A_s = (19 - 7,85) 0,0447 = 0,50 \text{ cm}^2$
- $A_{s,\text{total}} = 0,50 \text{ cm}^2$  ( $2 \phi 8 \rightarrow 1,00 \text{ cm}^2$ )

Face inferior:

- da flexão:  $A_s = 3,62 \text{ cm}^2$
- da torção:  $A_s = (19 - 7,85) 0,0447 = 0,50 \text{ cm}^2$
- $A_{s,\text{total}} = 3,62 + 0,50 = 4,12 \text{ cm}^2$  ( $3 \phi 12,5 + 1 \phi 8 \rightarrow 4,25 \text{ cm}^2$ )

Faces laterais:

- $A_{s,\text{total}} = (h - 2c_1) A_{s\ell} = (60 - 7,85) 0,0447 = 2,33 \text{ cm}^2$  ( $3 \phi 10 \text{ mm} \rightarrow 2,40 \text{ cm}^2$ )

Para uma conferência pode-se calcular a armadura longitudinal total, considerando apenas a torção, relativa ao perímetro  $u_e$ :

$$\frac{A_{s\ell}}{u_e} = 0,0447 \text{ cm}^2/\text{cm} \quad \rightarrow \quad \text{com } u_e = 126,6 \text{ cm: } A_{s\ell,\text{tot}} = 0,0447 \cdot 126,6 = 5,66 \text{ cm}^2$$

A armadura total, em função das áreas calculadas para as faces da viga, é:

$$A_{s\ell,\text{tot}} = 2(0,50 + 2,33) = 5,66 \text{ cm}^2 \quad \rightarrow \quad \text{ok!}$$

#### g4.3.2) Armadura transversal

A área total de estribos verticais é calculada pela soma das áreas relativas à força cortante e à torção. A armadura para a força cortante máxima entre o pilar P3 e a interseção com a viga VS6 resultou na armadura mínima, de  $0,0244 \text{ cm}^2/\text{cm}$ .

Considerando o estribo composto por dois ramos verticais, e que a área relativa à força cortante para um ramo é  $0,0244/2 = 0,0122 \text{ cm}^2/\text{m}^2$ , a armadura transversal total é:

$$\frac{A_{s,\text{total}}}{s} = \frac{A_{sw,1\text{ramo}}}{s} + \frac{A_{s,90}}{s} = 0,0122 + 0,0447 = 0,0569 \text{ cm}^2/\text{cm} = 5,69 \text{ cm}^2/\text{m}$$

onde  $A_{s,90}$  representa a área de um ramo vertical do estribo.

O diâmetro mínimo para o estribo à torção é de 5 mm. Supondo estribo fechado de dois ramos verticais com diâmetro de 6,3 mm ( $1 \phi 6,3 \rightarrow 0,31 \text{ cm}^2$ ) tem-se:

$$\frac{0,31}{s} = 0,0569 \quad \rightarrow \quad s = 5,4 \text{ cm}$$

que é um espaçamento muito pequeno. Alterando o diâmetro para 8 mm ( $1 \phi 8 \rightarrow 0,50 \text{ cm}^2$ ) tem-se:

$$\frac{0,50}{s} = 0,0569 \quad \rightarrow \quad s = 8,8 \text{ cm} \leq s_{\text{máx}} = 30 \text{ cm} \quad \rightarrow \quad \text{ok!}$$

Portanto, pode-se escolher estribo  $\phi 8 \text{ mm}$  c/9 cm. Na Figura 62 encontra-se mostrado o detalhamento final das armaduras da viga VS1.

#### g5) Detalhamento da armadura longitudinal

Conforme os cálculos da decalagem  $a_\ell$  executados, pode-se considerar o valor de 56 cm (d) para todos os tramos, a ser aplicado no deslocamento do diagrama de momentos fletores de cálculo.

Os comprimentos de ancoragem básicos, para concreto C35 e conforme a Tabela A-7 (colunas sem gancho), são: para  $\phi 10 \text{ mm}$  (43 cm para má aderência e 30 cm para boa aderência), e para  $\phi 12,5 \text{ mm}$  (54 cm para má aderência e 38 cm para boa aderência).

A Figura 61 mostra o “cobrimento” do diagrama de momentos fletores de cálculo, feito para determinação do comprimento das barras das armaduras longitudinais, positivas e negativas.

A Figura 62 apresenta o detalhamento final das armaduras da viga. Este desenho é feito comumente na escala 1:50. O desenho do corte da seção transversal e do estribo é feito normalmente na escala de 1:25 ou 1:20.

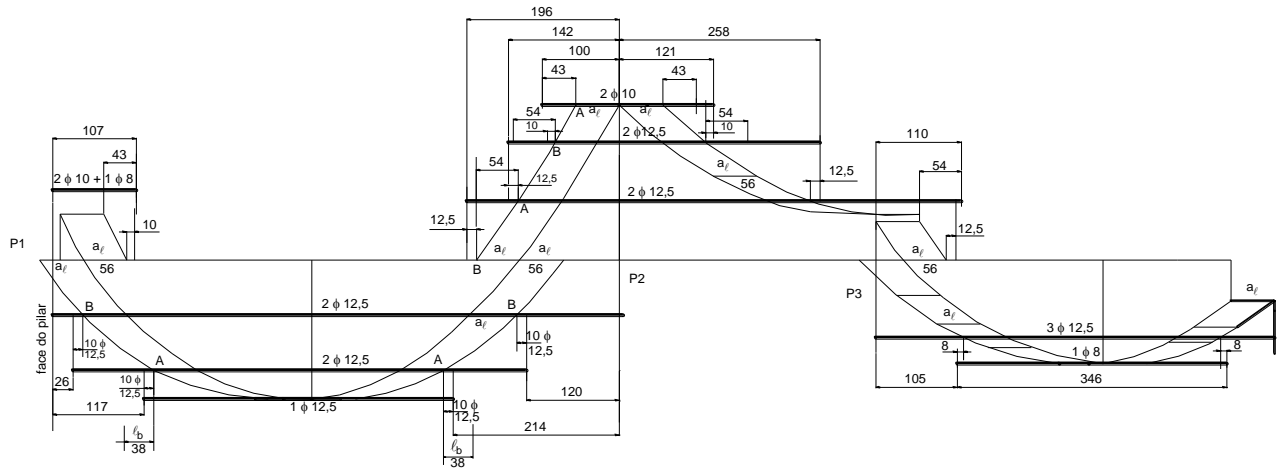


Figura 61 – Cobrimento do diagrama de momentos fletores de cálculo da viga VS1.

VS 1 (19 x 60)

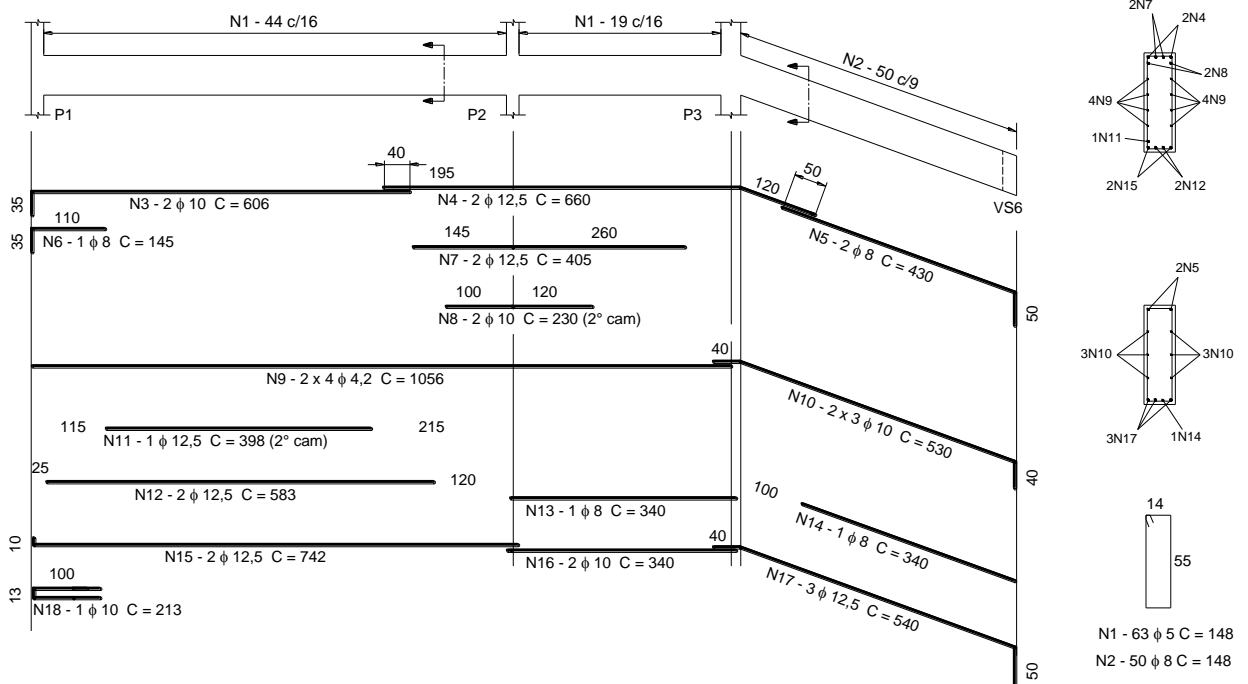


Figura 62 – Detalhamento final das armaduras da viga VS1.

*h) Dimensionamento das armaduras da viga VS6*

Serão dimensionadas as armaduras longitudinais e transversais para os esforços solicitantes internos máximos de M, V e T.

*h1) Armadura longitudinal de flexão*

*h1.1) Apoio intermediário P6*

$$M_k = -12.300 \text{ kN.cm}$$

$$M_d = \gamma_f \cdot M_k = 1,4 \cdot (-12.300) = -17.220 \text{ kN.cm}$$

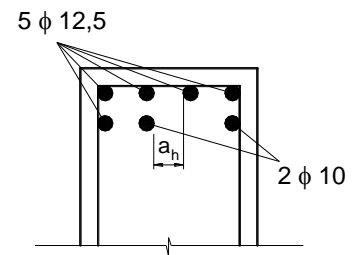
Para a altura da viga de 60 cm será adotada a altura útil de 55 cm:

$$K_c = \frac{b_w d^2}{M_d} = \frac{19 \cdot 55^2}{17220} = 3,4$$

Da Tabela A-1:  $\beta_x = x/d = 0,19 \leq 0,45$  (ok!),  $K_s = 0,025$  e dom. 2.

$$A_s = K_s \frac{M_d}{d} = 0,025 \frac{17220}{55} = 7,83 \text{ cm}^2 > A_{s,\text{mín}} = 1,87 \text{ cm}^2$$

$$5 \phi 12,5 + 2 \phi 10 = 7,85 \text{ cm}^2$$



Supondo que o concreto será adensado com um vibrador com diâmetro de agulha de 25 mm, a distância livre horizontal entre as barras longitudinais das camadas superiores deve ser superior a esse diâmetro. Considerando estribo com diâmetro de 5 mm, para o detalhamento mostrado, a distância livre entre as barras da primeira camada resulta:

$$a_h = \frac{19 - [2(2,5 + 0,5) + 4 \cdot 1,25]}{3} = 2,7 \text{ cm}$$

distância suficiente para a passagem da agulha do vibrador. Supondo que o centro de gravidade da armadura esteja posicionado 0,5 cm abaixo da face inferior das barras da primeira camada, a distância entre a face tracionada e o CG é:

$$a_{cg} = 2,5 + 0,5 + 1,25 + 0,5 = 4,8 \text{ cm} \quad (\text{valor compatível com a altura útil } d = 55 \text{ cm})$$

#### h1.2) Momento fletor positivo na extremidade direita

$$M_k = 2.842 \text{ kN.cm}$$

$$M_d = \gamma_f \cdot M_k = 1,4 \cdot 2.842 = 3.979 \text{ kN.cm}$$

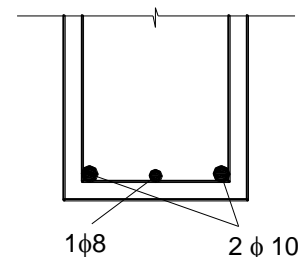
Com  $d = 56$  cm:

$$K_c = \frac{b_w d^2}{M_d} = \frac{19 \cdot 56^2}{3979} = 15,0$$

Da Tabela A-1:  $\beta_x = x/d = 0,04 \leq 0,45$  (ok!),  $K_s = 0,023$  e dom. 2.

$$A_s = K_s \frac{M_d}{d} = 0,023 \frac{3979}{56} = 1,63 \text{ cm}^2 < A_{s,\text{mín}} = 1,87 \text{ cm}^2$$

$$2 \phi 10 + 1 \phi 8 \rightarrow 2,10 \text{ cm}^2$$



#### h1.3) Momento fletor positivo entre os pilares P9 e P6

Para verificação do momento fletor positivo máximo na viga VS6, entre os pilares P9 e P6, será calculado o momento considerando o tramo engastado no pilar P6 e com engaste elástico no pilar P9 (Figura 63). A rigidez da mola relativa ao pilar P9, com seção 19/19 é de 2.043.418 kN.cm, valor já determinado.



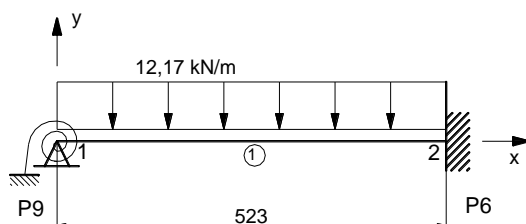


Figura 63 – Esquema estático, carregamento e numeração dos nós e barras para obtenção do momento fletor positivo considerando engaste perfeito no apoio intermediário (P6) da viga VS6.

O arquivo de dados de entrada no programa PPLAN4 está apresentado a seguir. O relatório com os resultados encontra-se no Anexo B5.

```

OPTE, 2, 2, 2, 2, 2,
UNESP, BAURU/SP - DISC. CONCRETO II - TORÇÃO
MOMENTO POSITIVO ENTRE OS PILARES P9 E P6
VS6 (19 x 60)
NOGL
1, 2, 1, 0, 0, 523, 0,
RES
1, 1, 1, 2, 0, 0, 2043418,
2, 1, 1, 1,
BAR
1, 1, 2, 1, 1,
PROP
1, 1, 1140, 342000, 60,
MATL
1, 3528,
FIMG
CARR1
CBR
1, 1, -0.1217, 1,
FIMC
FIME

```

O máximo momento fletor positivo para o esquema mostrado na Figura 59 resulta 2.129 kN.cm, muito superior ao valor de 453 kN.cm calculado segundo o modelo de grelha. Aliás, o tramo apresenta-se sob momentos fletores negativos em quase toda a extensão (ver

Figura 57). No dimensionamento da armadura positiva do tramo deve ser considerado o maior valor, conforme indicado na NBR 6118.

$$M_k = 2.129 \text{ kN.cm}$$

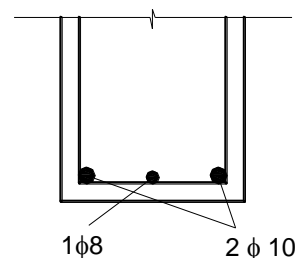
$$M_d = \gamma_f \cdot M_k = 1,4 \cdot 2.129 = 2.981 \text{ kN.cm}$$

$$K_c = \frac{b_w d^2}{M_d} = \frac{19.56^2}{2981} = 20,0$$

Da Tabela A-1:  $\beta_x = x/d = 0,03 \leq 0,45$  (ok!),  $K_s = 0,023$  e dom. 2.

$$A_s = K_s \frac{M_d}{d} = 0,023 \frac{2981}{56} = 1,22 \text{ cm}^2 < A_{s,\min} = 1,87 \text{ cm}^2$$

$$2 \phi 10 + 1 \phi 8 \rightarrow 2,10 \text{ cm}^2$$



## h2) Armadura transversal à força cortante

Na viga VS6 a força cortante máxima é  $V_k = 70,6 \text{ kN}$  ( $V_{sd} = 98,8 \text{ kN}$ ), valor menor que a força cortante mínima calculada ( $V_{sd,\min} = 156,4 \text{ kN}$ ), o que leva à armadura transversal mínima em toda extensão da VS6 ( $A_{sw,\min} = 2,44 \text{ cm}^2/\text{m}$ ).

## h3) Ancoragem das armaduras longitudinais

### h3.1) Armadura positiva no pilar extremo P9

No pilar extremo P9 existe um pequeno momento fletor positivo (453 kN.cm), para o qual deve existir uma armadura de flexão resistente. A armadura mínima de flexão do tramo adjacente ( $2 \phi 10 + 1 \phi 8$ ) pode ser estendida até o pilar e é mais do que suficiente para resistir a este momento fletor. Por simplicidade e a favor da segurança pode-se estender as três barras até o pilar P9, fazendo-se o gancho na extremidade das barras (ver Figura 65).

### h3.2) Armadura positiva no pilar intermediário P6

A armadura mínima a ancorar no pilar, tomando o tramo à direita que está sob momento fletor positivo, é:

$$|M_{d,apoiio}| = |-17.220| \text{ kN.cm} > M_{d,v\tilde{a}o}/2 = 3.979/2 = 1.990 \text{ kN.cm}$$

$$\text{Portanto, } A_{s,anc} \geq 1/4 A_{s,v\tilde{a}o} = 1,63/4 = 0,41 \text{ cm}^2$$

As armaduras positivas de flexão dos dois tramos adjacentes ao pilar P6 ( $2 \phi 10 + 1 \phi 8 \rightarrow 2,10 \text{ cm}^2$ ) atendem à armadura mínima a ancorar. As barras devem estender-se  $10\phi$  além da face do pilar.

Para a força cortante máxima de  $V_k = 70,6 \text{ kN}$  no pilar P6, o valor da decalagem do diagrama de momentos fletores ( $a_\ell$ ), segundo o Modelo de Cálculo I, é:

$$V_{Sd} = 1,4 \cdot 70,6 = 98,8 \text{ kN}$$

$$a_\ell = \frac{d}{2} \frac{V_{Sd,m\acute{a}x}}{(V_{Sd,m\acute{a}x} - V_c)} \leq d, \quad \text{com } a_\ell \geq 0,5d$$

$$\text{Na flexão simples, } V_c = V_{c0} = 0,6f_{ctd} b_w d = 0,6 \cdot 0,160 \cdot 19 \cdot 56 = 102,1 \text{ kN}$$

$$f_{ctd} = \frac{f_{ctk,inf}}{\gamma_c} = \frac{0,7 f_{ct,m}}{\gamma_c} = \frac{0,7 \cdot 0,3}{\gamma_c} \sqrt[3]{f_{ck}^2} = \frac{0,7 \cdot 0,3}{1,4} \sqrt[3]{35^2} = 1,60 \text{ MPa} = 0,160 \text{ kN/cm}^2$$

Como  $V_{Sd}$  é menor que  $V_{c0}$ , deve ser tomado  $a_\ell \geq 0,5d = 0,5 \cdot 56 = 28 \text{ cm}$ , valor a ser adotado para os dois tramos adjacentes ao pilar P6.

### h4) Dimensionamento à torção

No tramo final da VS6 ocorre o momento de torção característico ( $T_k$ ) de 1.540 kN.cm, constante ao longo do tramo. O momento de cálculo é:

$$T_{Sd} = \gamma_f \cdot T_k = 1,4 \cdot 1540 = 2.156 \text{ kN.cm}$$

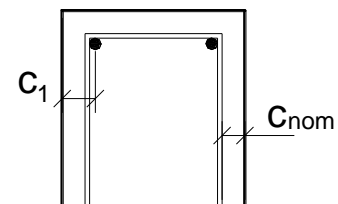
Os valores de  $A$  e  $u$  são os mesmos já calculados para a viga VS1, pois a seção transversal é idêntica:  $A = 1.140 \text{ cm}^2$  e  $u = 158 \text{ cm}$ . As Eq. 19 e 20 fornecem os limites para a espessura  $h_e$  da parede fina:

$$h_e \leq \frac{A}{u} = \frac{1140}{158} = 7,2 \text{ cm} \quad \text{e} \quad h_e \geq 2c_1$$

Sendo  $c = 2,5 \text{ cm}$  e supondo  $\phi_\ell = 12,5 \text{ mm}$  e  $\phi_t = 8 \text{ mm}$  encontra-se:

$$c_1 = \phi_\ell/2 + \phi_t + c_{nom} = 1,25/2 + 0,8 + 2,5 = 3,925 \text{ cm}$$

$$h_e \geq 2c_1 = 2 \cdot 3,925 = 7,85 \text{ cm}$$



Portanto, os limites para  $h_e$  são:  $7,85 \text{ cm} \leq h_e \leq 7,2 \text{ cm}$ , ou seja:  $h_e \leq 7,2 \text{ cm}$  e  $h_e \geq 7,85 \text{ cm}$ . Não é possível adotar um valor para  $h_e$  que atenda aos limites. Neste caso, onde ocorreu  $A/u < 2c_1$ , foram apresentadas soluções nos exemplos anteriores para resolver o problema. Uma solução é fornecida pela NBR 6118, que permite adotar:

$$h_e = A/u \leq b_w - 2c_1$$

$$h_e = A/u = 7,2 \text{ cm} \leq b_w - 2c_1 = 19 - 7,85 = 11,15 \text{ cm} \rightarrow \text{ok!}$$

$$\therefore h_e = 7,2 \text{ cm}$$

A área  $A_e$  é definida pelos eixos das barras dos cantos (respeitando o cobrimento exigido nos estribos):

$$A_e = (b_w - 2c_1) \cdot (h - 2c_1) = (19 - 7,85) \cdot (60 - 7,85) = 581,5 \text{ cm}^2$$

O perímetro da área equivalente é:

$$u_e = 2 [(b_w - 2c_1) + (h - 2c_1)] = 2 [(19 - 7,85) + (60 - 7,85)] = 126,6 \text{ cm}$$

O momento torçor máximo, determinado pela Eq. 23, com ângulo  $\theta$  ( $45^\circ$ ) igual ao aplicado no cálculo da viga à força cortante, considerando o Modelo de Cálculo I, é:

$$T_{Rd,2} = 0,5 \alpha_{v2} f_{cd} A_e h_e \sin 2\theta = 0,5 (1 - 35/250) \cdot (3,5/1,4) 581,5 \cdot 7,2 \cdot \sin 2 \cdot 45 = 4.500,8 \text{ kN.cm}$$

Para não ocorrer esmagamento das bielas comprimidas de concreto, conforme a Eq. 34 deve-se ter:

$$\frac{V_{Sd}}{V_{Rd2}} + \frac{T_{Sd}}{T_{Rd2}} \leq 1$$

Sendo  $V_{Rd2} = 617,1 \text{ kN}$  e  $V_{Sd,m\acute{a}x} = 1,4 \cdot 70,6 = 98,8 \text{ kN}$  (força cortante máxima atuante no tramo com torção), aplicando os valores numéricos na Eq. 34 fica:

$$\frac{98,8}{617,1} + \frac{2156}{4500,8} = 0,64 \leq 1,0 \rightarrow \text{ok!}$$

Como a equação foi satisfeita não ocorrerá o esmagamento do concreto nas diagonais de compressão.

#### h4.1) Cálculo das armaduras

As armaduras mínimas para torção, já calculadas para a viga VS1, são:

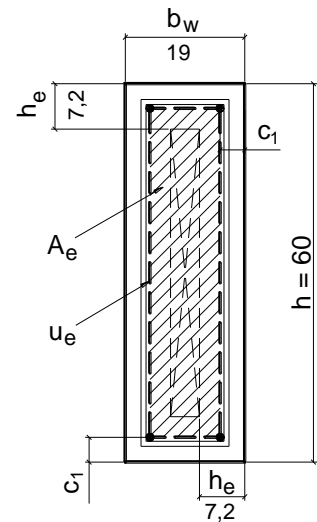
$$A_{s\ell, \text{mín}} = 0,92 \text{ cm}^2/\text{m} \quad \text{e} \quad A_{s,90\text{mín}} = 2,44 \text{ cm}^2/\text{m}$$

Armadura longitudinal conforme a Eq. 27:

$$\frac{A_{s\ell}}{u_e} = \frac{T_{Sd}}{2 A_e f_{ywd} \text{tg } \theta} = \frac{2156}{2 \cdot 581,5 \cdot \frac{50}{1,15} \text{tg } 45} = 0,0426 \text{ cm}^2/\text{cm}$$

$$\text{com } u_e = 100 \text{ cm}, A_{s\ell} = 4,26 \text{ cm}^2/\text{m} \geq A_{s\ell, \text{mín}} = 0,92 \text{ cm}^2/\text{m} \rightarrow \text{ok!}$$

Armadura transversal (estribos) conforme a Eq. 24:



$$\frac{A_{s,90}}{s} = \frac{T_{Sd}}{2 A_e f_{ywd}} \operatorname{tg} \theta = \frac{2156}{2 \cdot 581,5 \cdot \frac{50}{1,15}} \operatorname{tg} 45 = 0,0426 \text{ cm}^2/\text{cm}$$

com  $s = 100 \text{ cm}$ ,  $A_{s,90} = 4,26 \text{ cm}^2/\text{m} \geq A_{s,90\text{mín}} = 2,44 \text{ cm}^2/\text{m} \rightarrow \text{ok!}$

#### h4.2) Detalhamento das armaduras

##### h4.2.1) Armadura longitudinal

Analisando os diagramas de momentos fletores e momentos torçores, mostrados na Figura 57, observa-se que pode ser considerada somente a seção onde ocorre o momento fletor máximo negativo (no pilar P6), para calcular a armadura longitudinal combinada de modo a atender a ambos momentos. A área total de armadura pode então ser obtida pela soma das armaduras de flexão e de torção, calculadas para cada uma das quatro faces externas da viga:

Face superior:

- da flexão:  $A_s = 7,83 \text{ cm}^2$
- da torção:  $A_s = (b_w - 2c_1) 0,0426 = (19 - 7,85) 0,0426 = 0,47 \text{ cm}^2$
- $A_{s,\text{total}} = 7,83 + 0,47 = 8,30 \text{ cm}^2$  ( $5 \phi 12,5 + 3 \phi 10 \rightarrow 8,65 \text{ cm}^2$ )

Face inferior:

- da flexão:  $A_s = 0,41 \text{ cm}^2$  (armadura mínima a ancorar no pilar P6)
- da torção:  $A_s = (b_w - 2c_1) 0,0426 = (19 - 7,85) 0,0426 = 0,47 \text{ cm}^2$
- $A_{s,\text{total}} = 0,41 + 0,47 = 0,88 \text{ cm}^2$

Esta armadura será atendida pela armadura mínima positiva que se estende até o pilar ( $2 \phi 10 + 1 \phi 8 \rightarrow 2,10 \text{ cm}^2$ ).

Faces laterais:

- $A_{s,\text{total}} = (h - 2c_1) 0,0426 = (60 - 7,85) 0,0426 = 2,22 \text{ cm}^2$  ( $3 \phi 10 \text{ mm} \rightarrow 2,40 \text{ cm}^2$ ).

Esta armadura deverá se estender do pilar P6 até a intersecção com a viga VS1.

##### h5.3.2) Armadura transversal

A área total de estribos verticais é calculada pela soma das áreas relativas à força cortante e à torção. A armadura para a força cortante máxima entre o pilar P6 e a intersecção com a viga VS1 resultou na armadura mínima, de  $0,0244 \text{ cm}^2/\text{cm}$ .

Considerando o estribo composto por dois ramos verticais, e que a área relativa à força cortante para um ramo é  $0,0244/2 = 0,0122 \text{ cm}^2/\text{m}^2$ , a armadura transversal total é:

$$\frac{A_{s,\text{total}}}{s} = \frac{A_{sw,1\text{ramo}}}{s} + \frac{A_{s,90}}{s} = 0,0122 + 0,0426 = 0,0548 \text{ cm}^2/\text{cm} = 5,48 \text{ cm}^2/\text{m}$$

Supondo estribo fechado de dois ramos com diâmetro de 8 mm ( $1 \phi 8 \rightarrow 0,50 \text{ cm}^2$ ) tem-se:

$$\frac{0,50}{s} = 0,0548 \rightarrow s = 9,1 \text{ cm} \leq s_{\text{máx}} = 30 \text{ cm} \rightarrow \text{ok!}$$

Portanto, pode-se dispor estribo  $\phi 8 \text{ mm}$  c/9 cm. Na Figura 65 encontra-se mostrado o detalhamento final das armaduras da viga VS6.

##### h5) Detalhamento da armadura longitudinal

O valor da decalagem ( $a_c$ ) para deslocamento do diagrama de momentos fletores de cálculo é 28 cm. O comprimento de ancoragem básico para barras  $\phi 12,5 \text{ mm}$ , em situação de má aderência, aço CA-50 e concreto C35, é 54 cm (coluna sem gancho).

A Figura 64 mostra o cobrimento do diagrama de momentos fletores de cálculo, feito para determinação do comprimento das barras das armaduras longitudinais, positivas e negativas.

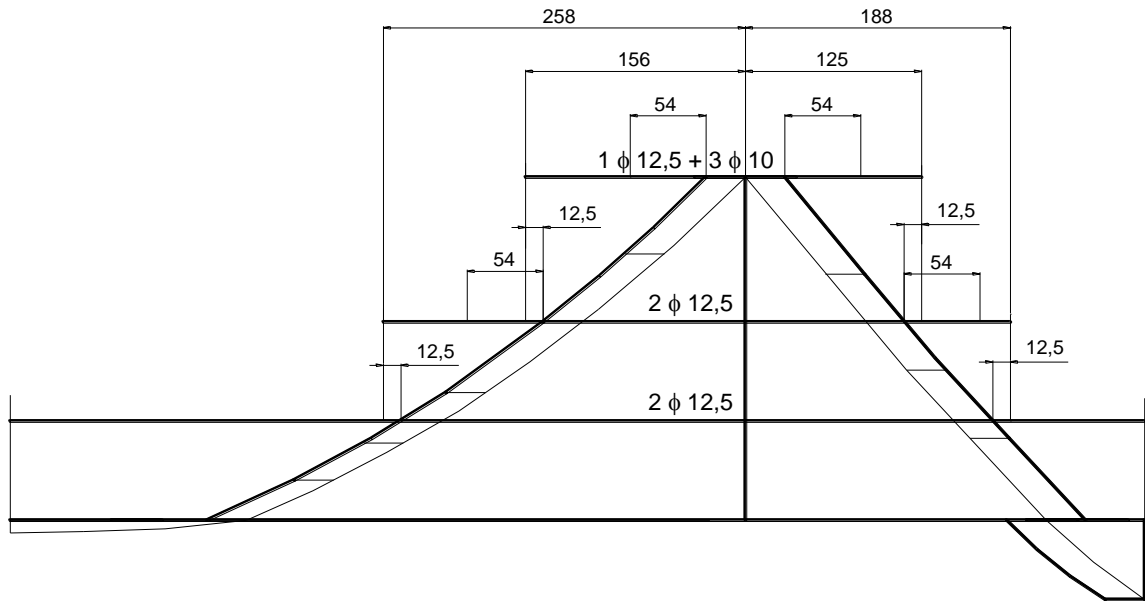


Figura 64 – Esquema do cobrimento do diagrama de momentos fletores de cálculo.

A Figura 65 apresenta o detalhamento final das armaduras da viga. Este desenho é feito normalmente na escala 1:50. O desenho do corte da seção transversal e do estribo é feito normalmente na escala de 1:25 ou 1:20. Atenção máxima deve ser dispensada ao detalhamento final, pois comumente é apenas com ele que a armação da viga será executada.

### VS 6 (19 x 60)

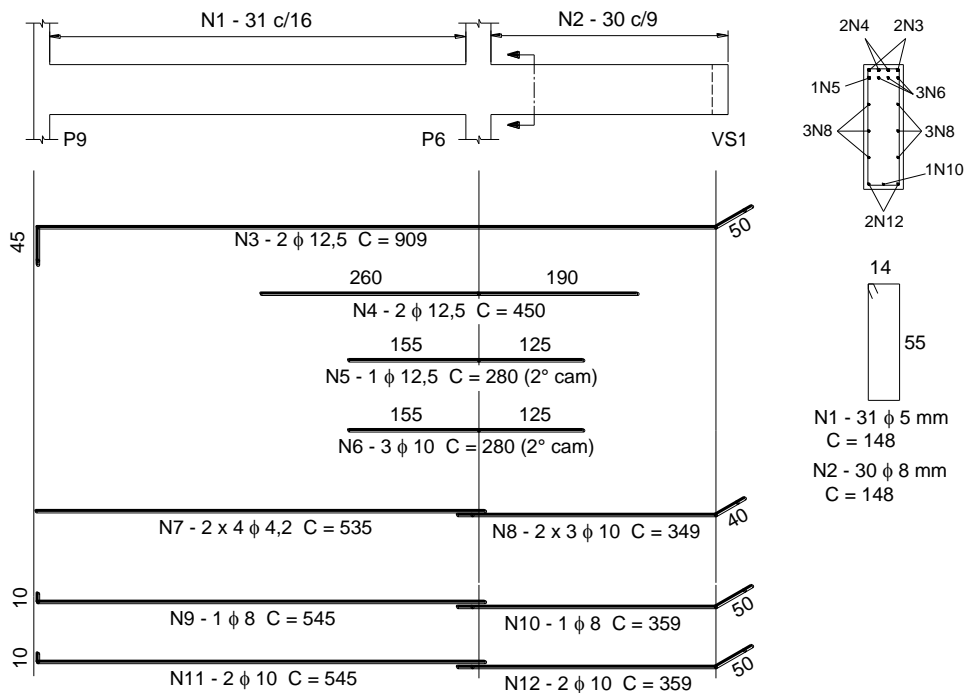


Figura 65 – Desenho com a armadura final da viga VS6.

## 15. QUESTIONÁRIO

- 1ª) Comente sobre os casos mais comuns de torção nas estruturas das edificações.
- 2ª) O que são torção de equilíbrio e torção de compatibilidade? Cite exemplos.
- 3ª) Qual o valor do momento de torção solicitante no caso de viga biengastada sob solicitação de torção externa uniforme no tramo?
- 4ª) O que é torção de St. Venant?
- 5ª) Para uma seção circular, mostre numa figura como se configuram as tensões principais devidas à torção.
- 6ª) E como se configuram as tensões de cisalhamento devidas à torção?
- 7ª) Qual a equação que define a tensão de cisalhamento devida à torção para uma seção vazada?
- 8ª) Indique numa figura o que é a área  $A_e$  e o perímetro  $u$ .
- 9ª) Verifique a eficiência alcançada pela viga em função dos diferentes arranjos para a armadura.
- 10ª) Por que uma viga de Concreto Armado retangular pode ser analisada à torção como se fosse oca e com espessura da casca constante?
- 11ª) Por que se pode fazer uma analogia da viga sob torção com uma treliça espacial?
- 12ª) Como se configura a treliça espacial generalizada?
- 13ª) Como se configuram as trajetórias das fissuras numa viga sob torção?
- 14ª) Explique resumidamente quais são as formas de ruptura de uma viga por torção.
- 15ª) Estude a dedução das equações desenvolvidas para a treliça espacial generalizada.
- 16ª) Como a norma define a espessura da casca da seção vazada?
- 17ª) Qual é a resistência proporcionada pelas diagonais comprimidas de concreto?
- 18ª) Como são as equações que definem as armaduras para a torção?
- 19ª) No caso de torção combinada com força cortante, como se verifica a biela comprimida de concreto?
- 20ª) Qual o objetivo de se dispor uma armadura mínima à torção?
- 21ª) Como é calculada a armadura mínima para a torção?
- 22ª) Qual o diâmetro mínimo e máximo para os estribos? Qual é o espaçamento máximo?
- 23ª) Por que os estribos para torção não podem ser abertos?
- 24ª) Como deve ser feita a distribuição da armadura longitudinal nas faces da viga?

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. Building code requirements for structural concrete and Commentary. ACI 318-11, 2011, 503p.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. Projeto de estruturas de concreto – Procedimento. NBR 6118, ABNT, 2014, 238p.

BASTOS, P.S.S. *Flexão normal simples - Vigas*. Bauru/SP, Departamento de Engenharia Civil, Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2117 – Estruturas de Concreto I, Dez/2020, 74p. ([http://www.feb.unesp.br/pbastos/pag\\_concreto1.htm](http://www.feb.unesp.br/pbastos/pag_concreto1.htm)).

BASTOS, P.S.S. *Dimensionamento de vigas de concreto armado à força cortante*. Bauru/SP, Departamento de Engenharia Civil, Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2123 – Estruturas de Concreto II, Mar/2021, 75p. ([http://www.feb.unesp.br/pbastos/pag\\_concreto2.htm](http://www.feb.unesp.br/pbastos/pag_concreto2.htm)).

BASTOS, P.S.S. *Ancoragem e emenda de armaduras*. Bauru/SP, Departamento Engenharia Civil, Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2123 – Estruturas de Concreto II, Mar/2018, 41p. ([http://www.feb.unesp.br/pbastos/pag\\_concreto2.htm](http://www.feb.unesp.br/pbastos/pag_concreto2.htm)).

BASTOS, P.S.S. *Vigas de Concreto Armado*. Bauru/SP, Departamento Engenharia Civil, Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2123 – Estruturas de Concreto II, Jun/2017, 57p. ([http://www.feb.unesp.br/pbastos/pag\\_concreto2.htm](http://www.feb.unesp.br/pbastos/pag_concreto2.htm)).

COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. *Model Code 1990*, MC-90, CEB-FIP, Bulletin D'Information n. 204, Lausanne, 1991.

CORRÊA, M.R.S. ; RAMALHO, M.A. ; CEOTTO, L.H. *Sistema PPLAN4/GPLAN4 – Manual de utilização*. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos – USP, Departamento de Engenharia de Estruturas, 1992, 80p.

GIONGO, J.S. *Concreto armado: Vigas submetidas a esforços de torção*. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos – USP, Departamento de Engenharia de Estruturas, 1996, 40p.

GIONGO, J.S. *Concreto armado: projeto estrutural de edifícios*. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos, Usp, Dep. de Estruturas. 1994.

LEONHARDT, F. ; MÖNNIG, E. *Construções de concreto – Princípios básicos do dimensionamento de estruturas de concreto armado*, v. 1, Rio de Janeiro, Ed. Interciência, 1982, 305p.

LIMA, J.S. ; GUARDA, M.C. ; PINHEIRO, L.M. *Análise de torção em vigas de acordo com a nova NBR 6118*. In: 42 CONGRESSO BRASILEIRO DO CONCRETO, IBRACON. Fortaleza, ago/2000, CD-ROM, 16p.

MACGREGOR, J.G. ; WIGHT, J.K. *Reinforced concrete – Mechanics and design*. 4a ed., Upper Saddle River, Ed. Prentice Hall, 2005, 1132p.

SÁNCHEZ, E. *Dimensionamento à torção: novas prescrições normativas brasileiras*. In: Nova normalização brasileira para o concreto estrutural. 2001, p.155-185.

SÜSSEKIND, J.C. *Curso de concreto*, v. 1, 4ª ed., Porto Alegre, Ed. Globo, 1985, 376p.

#### **BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR**

FUSCO, P.B. *Técnica de armar as estruturas de concreto*. São Paulo, Ed. Pini, 2000, 382p.

LEONHARDT, F. ; MÖNNIG, E. *Construções de concreto – Princípios básicos sobre a armação de estruturas de concreto armado*, v. 3, Rio de Janeiro, Ed. Interciência, 1982, 273p.

NAWY, E.G. *Reinforced concrete – A fundamental approach*. Englewood Cliffs, Ed. Prentice Hall, 2005, 5a. ed., 824p.

SÁNCHEZ, E. *Análise crítica do projeto de revisão da NB-1: Prescrições para o dimensionamento à torção*. In: XXIX JORNADAS SUDAMERICANAS DE INGENIERIA ESTRUCTURAL, 2000, CD-ROM, 7p.

## ANEXO A - TABELAS

Tabela A-1 – Valores de  $K_c$  e  $K_s$  para o aço CA-50 (para concretos do Grupo I de resistência –  $f_{ck} \leq 50$  MPa,  $\gamma_c = 1,4$ ,  $\gamma_s = 1,15$ ).

<b>FLEXÃO SIMPLES EM SEÇÃO RETANGULAR - ARMADURA SIMPLES</b>										
$\beta_x = \frac{x}{d}$	$K_c$ (cm <sup>2</sup> /kN)								$K_s$ (cm <sup>2</sup> /kN)	Dom.
	C15	C20	C25	C30	C35	C40	C45	C50	CA-50	
0,01	137,8	103,4	82,7	68,9	59,1	51,7	45,9	41,3	0,023	2
0,02	69,2	51,9	41,5	34,6	29,6	25,9	23,1	20,8	0,023	
0,03	46,3	34,7	27,8	23,2	19,8	17,4	15,4	13,9	0,023	
0,04	34,9	26,2	20,9	17,4	14,9	13,1	11,6	10,5	0,023	
0,05	28,0	21,0	16,8	14,0	12,0	10,5	9,3	8,4	0,023	
0,06	23,4	17,6	14,1	11,7	10,0	8,8	7,8	7,0	0,024	
0,07	20,2	15,1	12,1	10,1	8,6	7,6	6,7	6,1	0,024	
0,08	17,7	13,3	10,6	8,9	7,6	6,6	5,9	5,3	0,024	
0,09	15,8	11,9	9,5	7,9	6,8	5,9	5,3	4,7	0,024	
0,10	14,3	10,7	8,6	7,1	6,1	5,4	4,8	4,3	0,024	
0,11	13,1	9,8	7,8	6,5	5,6	4,9	4,4	3,9	0,024	
0,12	12,0	9,0	7,2	6,0	5,1	4,5	4,0	3,6	0,024	
0,13	11,1	8,4	6,7	5,6	4,8	4,2	3,7	3,3	0,024	
0,14	10,4	7,8	6,2	5,2	4,5	3,9	3,5	3,1	0,024	
0,15	9,7	7,3	5,8	4,9	4,2	3,7	3,2	2,9	0,024	
0,16	9,2	6,9	5,5	4,6	3,9	3,4	3,1	2,7	0,025	
0,17	8,7	6,5	5,2	4,3	3,7	3,2	2,9	2,6	0,025	
0,18	8,2	6,2	4,9	4,1	3,5	3,1	2,7	2,5	0,025	
0,19	7,8	5,9	4,7	3,9	3,4	2,9	2,6	2,3	0,025	
0,20	7,5	5,6	4,5	3,7	3,2	2,8	2,5	2,2	0,025	
0,21	7,1	5,4	4,3	3,6	3,1	2,7	2,4	2,1	0,025	
0,22	6,8	5,1	4,1	3,4	2,9	2,6	2,3	2,1	0,025	
0,23	6,6	4,9	3,9	3,3	2,8	2,5	2,2	2,0	0,025	
0,24	6,3	4,7	3,8	3,2	2,7	2,4	2,1	1,9	0,025	
0,25	6,1	4,6	3,7	3,1	2,6	2,3	2,0	1,8	0,026	
0,26	5,9	4,4	3,5	2,9	2,5	2,2	2,0	1,8	0,026	
0,27	5,7	4,3	3,4	2,8	2,4	2,1	1,9	1,7	0,026	
0,28	5,5	4,1	3,3	2,8	2,4	2,1	1,8	1,7	0,026	
0,29	5,4	4,0	3,2	2,7	2,3	2,0	1,8	1,6	0,026	
0,30	5,2	3,9	3,1	2,6	2,2	1,9	1,7	1,6	0,026	
0,31	5,1	3,8	3,0	2,5	2,2	1,9	1,7	1,5	0,026	
0,32	4,9	3,7	3,0	2,5	2,1	1,8	1,6	1,5	0,026	
0,33	4,8	3,6	2,9	2,4	2,1	1,8	1,6	1,4	0,026	
0,34	4,7	3,5	2,8	2,3	2,0	1,8	1,6	1,4	0,027	
0,35	4,6	3,4	2,7	2,3	2,0	1,7	1,5	1,4	0,027	
0,36	4,5	3,3	2,7	2,2	1,9	1,7	1,5	1,3	0,027	
0,37	4,4	3,3	2,6	2,2	1,9	1,6	1,5	1,3	0,027	
0,38	4,3	3,2	2,6	2,1	1,8	1,6	1,4	1,3	0,027	
0,40	4,1	3,1	2,5	2,0	1,8	1,5	1,4	1,2	0,027	
0,42	3,9	2,9	2,4	2,0	1,7	1,5	1,3	1,2	0,028	
0,44	3,8	2,8	2,3	1,9	1,6	1,4	1,3	1,1	0,028	
0,45	3,7	2,8	2,2	1,9	1,6	1,4	1,2	1,1	0,028	
0,46	3,7	2,7	2,2	1,8	1,6	1,4	1,2	1,1	0,028	
0,48	3,5	2,7	2,1	1,8	1,5	1,3	1,2	1,1	0,028	
0,50	3,4	2,6	2,1	1,7	1,5	1,3	1,1	1,0	0,029	
0,52	3,3	2,5	2,0	1,7	1,4	1,2	1,1	1,0	0,029	
0,54	3,2	2,4	1,9	1,6	1,4	1,2	1,1	1,0	0,029	
0,56	3,2	2,4	1,9	1,6	1,4	1,2	1,1	0,9	0,030	
0,58	3,1	2,3	1,8	1,5	1,3	1,2	1,0	0,9	0,030	
0,60	3,0	2,3	1,8	1,5	1,3	1,1	1,0	0,9	0,030	
0,62	2,9	2,2	1,8	1,5	1,3	1,1	1,0	0,9	0,031	
0,63	2,9	2,2	1,7	1,5	1,2	1,1	1,0	0,9	0,031	



Tabela A-2 – Área e massa linear de fios e barras de aço (NBR 7480).

Diâmetro (mm)		Massa (kg/m)	Área (mm <sup>2</sup> )	Perímetro (mm)
Fios	Barras			
2,4	-	0,036	4,5	7,5
3,4	-	0,071	9,1	10,7
3,8	-	0,089	11,3	11,9
4,2	-	0,109	13,9	13,2
4,6	-	0,130	16,6	14,5
5	5	0,154	19,6	17,5
5,5	-	0,187	23,8	17,3
6	-	0,222	28,3	18,8
-	6,3	0,245	31,2	19,8
6,4	-	0,253	32,2	20,1
7	-	0,302	38,5	22,0
8	8	0,395	50,3	25,1
9,5	-	0,558	70,9	29,8
10	10	0,617	78,5	31,4
-	12,5	0,963	122,7	39,3
-	16	1,578	201,1	50,3
-	20	2,466	314,2	62,8
-	22	2,984	380,1	69,1
-	25	3,853	490,9	78,5
-	32	6,313	804,2	100,5
-	40	9,865	1256,6	125,7

Tabela A-3 – Área de aço e largura  $b_w$  mínima.

Diâm. (mm)	$A_s$ (cm <sup>2</sup> ) $b_w$ (cm)	Número de barras										
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
4,2	As	0,14	0,28	0,42	0,56	0,70	0,84	0,98	1,12	1,26	1,40	
	$b_w$	Br. 1	-	8	11	14	16	19	22	25	27	30
		Br. 2	-	9	13	16	19	23	26	30	33	36
5	As	0,20	0,40	0,60	0,80	1,00	1,20	1,40	1,60	1,80	2,00	
	$b_w$	Br. 1	-	9	11	14	17	20	22	25	28	31
		Br. 2	-	9	13	16	20	23	27	30	34	37
6,3	As	0,31	0,62	0,93	1,24	1,55	1,86	2,17	2,48	2,79	3,10	
	$b_w$	Br. 1	-	9	12	15	18	20	23	26	29	32
		Br. 2	-	10	13	17	20	24	28	31	35	39
8	As	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00	4,50	5,00	
	$b_w$	Br. 1	-	9	12	15	18	21	25	28	31	34
		Br. 2	-	10	14	17	21	25	29	33	36	40
10	As	0,80	1,60	2,40	3,20	4,00	4,80	5,60	6,40	7,20	8,00	
	$b_w$	Br. 1	-	10	13	16	19	23	26	29	33	36
		Br. 2	-	10	14	18	22	26	30	34	38	42
12,5	As	1,25	2,50	3,75	5,00	6,25	7,50	8,75	10,00	11,25	12,50	
	$b_w$	Br. 1	-	10	14	17	21	24	28	31	35	38
		Br. 2	-	11	15	19	24	28	32	36	41	45
16	As	2,00	4,00	6,00	8,00	10,00	12,00	14,00	16,00	18,00	20,00	
	$b_w$	Br. 1	-	11	15	19	22	26	30	34	38	42
		Br. 2	-	11	16	21	25	30	34	39	44	48
20	As	3,15	6,30	9,45	12,60	15,75	18,90	22,05	25,20	28,35	31,50	
	$b_w$	Br. 1	-	12	16	20	24	29	33	37	42	46
		Br. 2	-	12	17	22	27	32	37	42	47	52
22	As	3,80	7,60	11,40	15,20	19,00	22,80	26,60	30,40	34,20	38,00	
	$b_w$	Br. 1	-	12	16	21	25	30	34	39	43	48
		Br. 2	-	13	18	23	28	33	39	44	49	54
25	As	4,90	9,80	14,70	19,60	24,50	29,40	34,30	39,20	44,10	49,00	
	$b_w$	Br. 1	-	13	18	23	28	33	38	43	48	53
		Br. 2	-	13	19	24	30	35	41	46	52	57
32	As	8,05	16,10	24,15	32,20	40,25	48,30	56,35	64,40	72,45	80,50	
	$b_w$	Br. 1	-	15	21	28	34	40	47	53	60	66
		Br. 2	-	15	21	28	34	40	47	53	60	66
40	As	12,60	25,20	37,80	50,40	63,00	75,60	88,20	100,80	113,40	126,00	
	$b_w$	Br. 1	-	17	25	33	41	49	57	65	73	81
		Br. 2	-	17	25	33	41	49	57	65	73	81

largura  $b_w$  mínima:

$$b_{w,\min} = 2(c + \phi_t) + n^\circ \text{ barras} \cdot \phi_\ell + a_{h,\min} (n^\circ \text{ barras} - 1)$$

Br. 1 = brita 1 ( $d_{\max} = 19 \text{ mm}$ ) ; Br. 2 = brita 2 ( $d_{\max} = 25 \text{ mm}$ )Valores adotados:  $\phi_t = 6,3 \text{ mm}$  ;  $c_{\text{nom}} = 2,0 \text{ cm}$ Para  $c_{\text{nom}} \neq 2,0 \text{ cm}$ , aumentar  $b_{w,\min}$  conforme: $c_{\text{nom}} = 2,5 \text{ cm} \rightarrow + 1,0 \text{ cm}$  $c_{\text{nom}} = 3,0 \text{ cm} \rightarrow + 2,0 \text{ cm}$  $c_{\text{nom}} = 3,5 \text{ cm} \rightarrow + 3,0 \text{ cm}$  $c_{\text{nom}} = 4,0 \text{ cm} \rightarrow + 4,0 \text{ cm}$ 

$$a_{h,\min} \geq \begin{cases} 2 \text{ cm} \\ \phi_\ell \\ 1,2d_{\max\text{agr}} \end{cases}$$

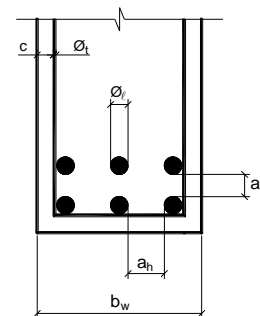


Tabela A-4 – Equações simplificadas segundo o **Modelo de Cálculo I** para concretos do Grupo I.

<b>Modelo de Cálculo I</b> (estribo vertical, $\gamma_c = 1,4$ , $\gamma_s = 1,15$ , aços CA-50 e CA-60, flexão simples).			
Concreto	$V_{Rd2}$ (kN)	$V_{Sd,min}$ (kN)	$A_{sw}$ (cm <sup>2</sup> /m)
<b>C20</b>	$0,35 b_w d$	$0,101 b_w d$	$2,55 \frac{V_{Sd}}{d} - 0,17 b_w$
<b>C25</b>	$0,43 b_w d$	$0,117 b_w d$	$2,55 \frac{V_{Sd}}{d} - 0,20 b_w$
<b>C30</b>	$0,51 b_w d$	$0,132 b_w d$	$2,55 \frac{V_{Sd}}{d} - 0,22 b_w$
<b>C35</b>	$0,58 b_w d$	$0,147 b_w d$	$2,55 \frac{V_{Sd}}{d} - 0,25 b_w$
<b>C40</b>	$0,65 b_w d$	$0,160 b_w d$	$2,55 \frac{V_{Sd}}{d} - 0,27 b_w$
<b>C45</b>	$0,71 b_w d$	$0,173 b_w d$	$2,55 \frac{V_{Sd}}{d} - 0,29 b_w$
<b>C50</b>	$0,77 b_w d$	$0,186 b_w d$	$2,55 \frac{V_{Sd}}{d} - 0,31 b_w$

$b_w$  = largura da viga, cm;  $V_{Sd}$  = força cortante de cálculo, kN;  
 $d$  = altura útil, cm;

Tabela A-5 – Equações simplificadas segundo **Modelo de Cálculo II** para concretos do Grupo I.

<b>Modelo de Cálculo II</b> (estribo vertical, $\gamma_c = 1,4$ , $\gamma_s = 1,15$ , aços CA-50 e CA-60, flexão simples)			
Concreto	$V_{Rd2}$ (kN)	$V_{Sd,min}$ (kN)	$A_{sw}$ (cm <sup>2</sup> /m)
<b>C20</b>	$0,71 b_w \cdot d \cdot \text{sen } \theta \cdot \cos \theta$	$0,035 \cdot b_w \cdot d \cdot \cot g \theta + V_{cl}$	$2,55 \text{tg } \theta \frac{(V_{Sd} - V_{cl})}{d}$
<b>C25</b>	$0,87 b_w \cdot d \cdot \text{sen } \theta \cdot \cos \theta$	$0,040 \cdot b_w \cdot d \cdot \cot g \theta + V_{cl}$	
<b>C30</b>	$1,02 b_w \cdot d \cdot \text{sen } \theta \cdot \cos \theta$	$0,045 \cdot b_w \cdot d \cdot \cot g \theta + V_{cl}$	
<b>C35</b>	$1,16 b_w \cdot d \cdot \text{sen } \theta \cdot \cos \theta$	$0,050 \cdot b_w \cdot d \cdot \cot g \theta + V_{cl}$	
<b>C40</b>	$1,30 b_w \cdot d \cdot \text{sen } \theta \cdot \cos \theta$	$0,055 \cdot b_w \cdot d \cdot \cot g \theta + V_{cl}$	
<b>C45</b>	$1,42 b_w \cdot d \cdot \text{sen } \theta \cdot \cos \theta$	$0,059 \cdot b_w \cdot d \cdot \cot g \theta + V_{cl}$	
<b>C50</b>	$1,54 b_w \cdot d \cdot \text{sen } \theta \cdot \cos \theta$	$0,064 \cdot b_w \cdot d \cdot \cot g \theta + V_{cl}$	

$b_w$  = largura da viga, cm;  $V_{Sd}$  = força cortante de cálculo, kN;  
 $d$  = altura útil, cm;  $\theta$  = ângulo de inclinação das bielas de compressão (°);  
 $V_{cl}$  = força cortante proporcionada pelos mecanismos complementares ao de treliça, kN;

Tabela A-6 – Taxas mínimas de armadura de flexão para vigas (Tabela 17.3 da NBR 6118).

Forma da seção	Valores de $\rho_{\min}^{(a)}$ (%)														
	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90
Retangular	0,150	0,150	0,150	0,164	0,179	0,194	0,208	0,211	0,219	0,226	0,233	0,239	0,245	0,251	0,256

(a) Os valores de  $\rho_{\min}$  estabelecidos nesta Tabela pressupõem o uso de aço CA-50,  $d/h = 0,8$ ,  $\gamma_c = 1,4$  e  $\gamma_s = 1,15$ . Caso esses fatores sejam diferentes,  $\rho_{\min}$  deve ser recalculado.

$$\rho_{\min} = A_{s,\min}/A_c$$

Tabela A-7 – Comprimento de ancoragem (cm) para o aço CA-50 nervurado.

COMPRIMENTO DE ANCORAGEM (cm) PARA $A_{s,ef} = A_{s,calc}$ CA-50 nervurado																
$\phi$ (mm)	Concreto															
	C15		C20		C25		C30		C35		C40		C45		C50	
	Sem	Com	Sem	Com	Sem	Com	Sem	Com	Sem	Com	Sem	Com	Sem	Com	Sem	Com
6,3	48	33	39	28	34	24	30	21	27	19	25	17	23	16	21	15
	33	23	28	19	24	17	21	15	19	13	17	12	16	11	15	10
8	61	42	50	35	43	30	38	27	34	24	31	22	29	20	27	19
	42	30	35	24	30	21	27	19	24	17	22	15	20	14	19	13
10	76	53	62	44	54	38	48	33	43	30	39	28	36	25	34	24
	53	37	44	31	38	26	33	23	30	21	28	19	25	18	24	17
12,5	95	66	78	55	67	47	60	42	54	38	49	34	45	32	42	30
	66	46	55	38	47	33	42	29	38	26	34	24	32	22	30	21
16	121	85	100	70	86	60	76	53	69	48	63	44	58	41	54	38
	85	59	70	49	60	42	53	37	48	34	44	31	41	29	38	27
20	151	106	125	87	108	75	95	67	86	60	79	55	73	51	68	47
	106	74	87	61	75	53	67	47	60	42	55	39	51	36	47	33
22,5	170	119	141	98	121	85	107	75	97	68	89	62	82	57	76	53
	119	83	98	69	85	59	75	53	68	47	62	43	57	40	53	37
25	189	132	156	109	135	94	119	83	108	75	98	69	91	64	85	59
	132	93	109	76	94	66	83	58	75	53	69	48	64	45	59	42
32	242	169	200	140	172	121	152	107	138	96	126	88	116	81	108	76
	169	119	140	98	121	84	107	75	96	67	88	62	81	57	76	53
40	329	230	271	190	234	164	207	145	187	131	171	120	158	111	147	103
	230	161	190	133	164	115	145	102	131	92	120	84	111	77	103	72

Valores de acordo com a NBR 6118.  
 N° Superior: Má Aderência ; N° Inferior: Boa Aderência  
 Sem e Com indicam sem ou com gancho na extremidade da barra  
 $A_{s,ef}$  = área de armadura efetiva ;  $A_{s,calc}$  = área de armadura calculada

O comprimento de ancoragem deve ser maior do que o comprimento mínimo:  $\ell_{b,\min} \geq \begin{cases} 0,3 \ell_b \\ 10 \phi \\ 100\text{mm} \end{cases}$

$\gamma_c = 1,4$  ;  $\gamma_s = 1,15$

Tabela A-8 – Comprimento de ancoragem (cm) para o aço CA-60 entalhado.

COMPRIMENTO DE ANCORAGEM (cm) PARA $A_{s,ef} = A_{s,calc}$ CA-60 entalhado																
$\phi$ (mm)	Concreto															
	C15		C20		C25		C30		C35		C40		C45		C50	
	Sem	Com	Sem	Com	Sem	Com	Sem	Com	Sem	Com	Sem	Com	Sem	Com	Sem	Com
3,4	50	35	41	29	35	25	31	22	28	20	26	18	24	17	22	16
	35	24	29	20	25	17	22	15	20	14	18	13	17	12	16	11
4,2	61	43	51	35	44	31	39	27	35	24	32	22	29	21	27	19
	43	30	35	25	31	21	27	19	24	17	22	16	21	14	19	13
5	73	51	60	42	52	36	46	32	41	29	38	27	35	25	33	23
	51	36	42	30	36	25	32	23	29	20	27	19	25	17	23	16
6	88	61	72	51	62	44	55	39	50	35	46	32	42	29	39	27
	61	43	51	35	44	31	39	27	35	24	32	22	29	21	27	19
7	102	71	84	59	73	51	64	45	58	41	53	37	49	34	46	32
	71	50	59	41	51	36	45	32	41	28	37	26	34	24	32	22
8	117	82	96	67	83	58	74	51	66	46	61	42	56	39	52	37
	82	57	67	47	58	41	51	36	46	33	42	30	39	27	37	26
9,5	139	97	114	80	99	69	87	61	79	55	72	50	67	47	62	43
	97	68	80	56	69	48	61	43	55	39	50	35	47	33	43	30

Valores de acordo com a NBR 6118.  
 N° Superior: Má Aderência ; N° Inferior: Boa Aderência  
 Sem e Com indicam sem ou com gancho na extremidade da barra  
 $A_{s,ef}$  = área de armadura efetiva ;  $A_{s,calc}$  = área de armadura calculada

O comprimento de ancoragem deve ser maior do que o comprimento mínimo:  $\ell_{b,min} \geq \begin{cases} 0,3 \ell_b \\ 10\phi \\ 100mm \end{cases}$

$\gamma_c = 1,4$  ;  $\gamma_s = 1,15$

Tabela A-9 – Valores mínimos para armaduras passivas aderentes em lajes (Tabela 19.1 da NBR 6118).

Armadura	Elementos estruturais sem armaduras ativas
Armaduras negativas	$\rho_s \geq \rho_{\min}$
Armaduras negativas de bordas sem continuidade	$\rho_s \geq 0,67\rho_{\min}$
Armaduras positivas de lajes armadas nas duas direções	$\rho_s \geq 0,67\rho_{\min}$
Armadura positiva (principal) de lajes armadas em uma direção	$\rho_s \geq \rho_{\min}$
Armadura positiva (secundária) de lajes armadas em uma direção	$A_s/s \geq 20\%$ da armadura principal $A_s/s \geq 0,9 \text{ cm}^2/\text{m}$ $\rho_s \geq 0,5 \rho_{\min}$
$\rho_s = A_s/(b_w h)$ Os valores de $\rho_{\min}$ constam da Tabela A-6.	

Tabela A-10 – Diâmetro dos pinos de dobramento (D) (Tabela 9.1 da NBR 6118).

Bitola (mm)	Tipo de aço		
	CA-25	CA-50	CA-60
< 20	4 $\phi$	5 $\phi$	6 $\phi$
$\geq 20$	5 $\phi$	8 $\phi$	-

Tabela A-11 – Área de armadura por metro de largura ( $\text{cm}^2/\text{m}$ ).

ÁREA DE ARMADURA POR METRO DE LARGURA ( $\text{cm}^2/\text{m}$ )						
Espaçamento (cm)	Diâmetro Nominal (mm)					
	4,2	5	6,3	8	10	12,5
5	2,77	4,00	6,30	10,00	16,00	25,00
5,5	2,52	3,64	5,73	9,09	14,55	22,73
6	2,31	3,33	5,25	8,33	13,33	20,83
6,5	2,13	3,08	4,85	7,69	12,31	19,23
7	1,98	2,86	4,50	7,14	11,43	17,86
7,5	1,85	2,67	4,20	6,67	10,67	16,67
8	1,73	2,50	3,94	6,25	10,00	15,63
8,5	1,63	2,35	3,71	5,88	9,41	14,71
9	1,54	2,22	3,50	5,56	8,89	13,89
9,5	1,46	2,11	3,32	5,26	8,42	13,16
10	1,39	2,00	3,15	5,00	8,00	12,50
11	1,26	1,82	2,86	4,55	7,27	11,36
12	1,15	1,67	2,62	4,17	6,67	10,42
12,5	1,11	1,60	2,52	4,00	6,40	10,00
13	1,07	1,54	2,42	3,85	6,15	9,62
14	0,99	1,43	2,25	3,57	5,71	8,93
15	0,92	1,33	2,10	3,33	5,33	8,33
16	0,87	1,25	1,97	3,13	5,00	7,81
17	0,81	1,18	1,85	2,94	4,71	7,35
17,5	0,79	1,14	1,80	2,86	4,57	7,14
18	0,77	1,11	1,75	2,78	4,44	6,94
19	0,73	1,05	1,66	2,63	4,21	6,58
20	0,69	1,00	1,58	2,50	4,00	6,25
22	0,63	0,91	1,43	2,27	3,64	5,68
24	0,58	0,83	1,31	2,08	3,33	5,21
25	0,55	0,80	1,26	2,00	3,20	5,00
26	0,53	0,77	1,21	1,92	3,08	4,81
28	0,49	0,71	1,12	1,79	2,86	4,46
30	0,46	0,67	1,05	1,67	2,67	4,17
33	0,42	0,61	0,95	1,52	2,42	3,79

Elaborada por PINHEIRO (1994)  
Diâmetros especificados pela NBR 7480.

## ANEXO B - LISTAGENS DE RESULTADOS DOS PROGRAMAS GPLAN4 E PPLAN4

### B1) GRELHA DO EXEMPLO 1

ESCOLA DE ENGENHARIA DE SAO CARLOS - USP  
 SISTEMA ANSER - ANALISE DE SISTEMAS ESTRUTURAIIS RETICULADOS  
 PROGRAMA GPLAN4 - ANALISE DE GRELHAS - VERSAO FEV/92

PROJETO: TORCAO  
 CLIENTE: UNESP - DISC. CONCRETO II

=====  
 GRELHA: TORÇÃO - EXEMPLO 1  
 =====

=====  
 COORDENADAS E RESTRICOES NODAIS  
 =====

NO	COORD X	COORD Y	RESTR Z	RESTR X	RESTR Y
1	165.000	.000	0	0	0
2	.000	95.000	1	1	1
3	165.000	95.000	0	0	0

=====  
 CARACTERISTICAS DAS BARRAS  
 =====

BARRA	NO INIC	ROT INIC	NO FIN	ROT FIN	PROP	COMPRIMENTO	COSENO DIRETOR
1	1	0	3	0	1	95.000	.0000
2	2	0	3	0	2	165.000	1.0000

=====  
 PROPRIEDADES DAS BARRAS  
 =====

PROP	MAT	AREA	I FLEXAO	I TORCAO	ALTURA
1	1	.10000E+04	.20833E+06	.10000E+03	50.00
2	1	.17500E+04	.36458E+06	.40517E+06	50.00

=====  
 PROPRIEDADES DOS MATERIAIS  
 =====

MAT	MOD LONG	MOD TRANS	PESO ESP	COEF TERM
-----	----------	-----------	----------	-----------

=====



1 .241500E+04 .100630E+04 .00000E+00 .0000E+00

-----  
GERACAO DE CARGAS EM BARRAS

BARRA	TIPO	CARGA I	CARGA F	REL C/L	REL I/L	IDENT
1	1	-.0250	-.0250	1.000	.000	CBR
2	1	-.0437	-.0437	1.000	.000	CBR

-----  
GERACAO DE CARGAS NODAIS

NO	FORCA Z	MOMENTO X	MOMENTO Y	IDENT
1	-50.000	.000	.000	CNO

-----  
ESTATISTICA DOS DADOS DO CARREGAMENTO

NUMERO DE NOS CARREGADOS.....	1
NUMERO DE NOS DESCARREGADOS.....	2
NUMERO DE BARRAS CARREGADAS (EXCETO PESO PROPRIO) .....	2
NUMERO DE BARRAS DESCARREGADAS (EXCETO PESO PROPRIO) .....	0
SOMATORIO DAS FORCAS TRANSVERSAIS ATUANTES.....	-59.594

=====

DESLOCAMENTOS NODAIS

NO	DESLOC Z	ROTACAO X	ROTACAO Y
1	-.3095357	.0024235	.0008469
2	.0000000	.0000000	.0000000
3	-.0936757	.0019679	.0008469

=====

ESFORCOS NAS EXTREMIDADES DAS BARRAS

BARRA	NO	CORTANTE	M FLETOR	M TORCOR
1	1	-50.000	-.005	.000
	3	-52.375	-4862.803	.000
2	2	59.594	-9237.424	4862.807
	3	52.375	.000	4862.807

=====

RESULTANTES NODAIS

NO	FORÇA Z	MOMENTO X	MOMENTO Y
1	.000	.005	.000
2	59.594	-4862.807	-9237.424
3	.000	.004	.000
SOMATORIO DAS REACOES TRANSVERSAIS .....			59.594
SOMATORIO DAS FORCAS TRANSVERSAIS ATUANTES .....			-59.594
ERRO PERCENTUAL .....			-0.000192 %

ESFORÇOS AO LONGO DAS BARRAS

BARRA	REL X/L	CORTANTE	M FLETOR	M TORCOR
1	0/10	-50.000	-.005	.000
1	1/10	-50.237	-476.132	.000
1	2/10	-50.475	-954.515	.000
1	3/10	-50.712	-1435.154	.000
1	4/10	-50.950	-1918.049	.000
1	5/10	-51.187	-2403.201	.000
1	6/10	-51.425	-2890.609	.000
1	7/10	-51.662	-3380.273	.000
1	8/10	-51.900	-3872.194	.000
1	9/10	-52.137	-4366.370	.000
1	10/10	-52.375	-4862.803	.000
2	0/10	59.594	-9237.424	4862.807
2	1/10	58.872	-8260.082	4862.807
2	2/10	58.150	-7294.651	4862.807
2	3/10	57.428	-6341.132	4862.807
2	4/10	56.706	-5399.523	4862.807
2	5/10	55.984	-4469.825	4862.807
2	6/10	55.263	-3552.038	4862.807
2	7/10	54.541	-2646.162	4862.807
2	8/10	53.819	-1752.197	4862.807
2	9/10	53.097	-870.142	4862.807
2	10/10	52.375	.001	4862.807

- Analise completa - fim do processamento

## B2) EXEMPLO 2 – VIGA V1

ESCOLA DE ENGENHARIA DE SAO CARLOS  
 SISTEMA ANSER - ANALISE DE SISTEMAS ESTRUTURAIS RETICULADOS  
 PROGRAMA PPLAN4 - ANALISE DE PORTICOS PLANOS - VERSAO FEV/92

PROJETO: UNESP - DISC. CONCRETO II  
 CLIENTE: EXEMPLO 2

PORTICO: V1 (19 x 40)

=====  
 COORDENADAS E RESTRICOES NODAIS

NO	COORD X	COORD Y	RESTR X	RESTR Y	RESTR R
1	.000	.000	.10000E+38	.10000E+38	.55062E+07
2	191.500	.000	0	0	0
3	383.000	.000	1	1	1

 =====  
 CARACTERISTICAS DAS BARRAS

BARRA	NO INIC	ROT INIC	NO FIN	ROT FIN	PROP	COMPRIMENTO	COSSENO DIRETOR
1	1	0	2	0	1	191.500	1.0000
2	2	0	3	0	1	191.500	1.0000

 =====  
 PROPRIEDADES DAS BARRAS

PROP	MAT	AREA	I FLEXAO	ALTURA	TEMP
1	1	.76000E+03	.10133E+06	40.00	.00

 =====  
 PROPRIEDADES DOS MATERIAIS

MAT	MOD LONG	PESO ESP	COEF TERM
1	.289800E+04	.00000E+00	.00000E+00

 -----  
 GERACAO DE CARGAS EM BARRAS

BARRA	TIPO	INTENSIDADE	REL C/L	REL I/L	IDENT
1	1	-.2152	1.000	.000	CBRG
2	1	-.2152	1.000	.000	CBRG

 -----  
 ESTATISTICA DOS DADOS DO CARREGAMENTO
 -----

NUMERO DE NOS CARREGADOS.....	0
NUMERO DE NOS DESCARREGADOS.....	3
NUMERO DE BARRAS CARREGADAS (EXCETO PESO PROPRIO) .....	2
NUMERO DE BARRAS DESCARREGADAS (EXCETO PESO PROPRIO) .....	0

SOMATORIO DAS FORÇAS SEGUNDO O EIXO X..... .000  
 SOMATORIO DAS FORÇAS SEGUNDO O EIXO Y..... -82.422

=====

DESLOCAMENTOS NODAIS

NO	DESLOC X	DESLOC Y	ROTACAO
1	.0000000	.0000000	.0003068
2	.0000000	-.0557537	-.0000767
3	.0000000	.0000000	.0000000

=====

ESFORÇOS NAS EXTREMIDADES DAS BARRAS

BARRA	NO	NORMAL	CORTANTE	M FLETOR
1	1	.000	37.525	-1689.541
	2	.000	-3.686	1550.582
2	2	.000	-3.686	1550.582
	3	.000	-44.896	-3101.163

=====

RESULTANTES NODAIS

NO	RESULT X	RESULT Y	MOMENTO
1	.000	37.525	-1689.541
2	.000	.000	.000
3	.000	44.896	3101.163

SOMATORIO DAS REACOES SEGUNDO O EIXO Y..... 82.422  
 SOMATORIO DAS FORÇAS ATUANTES SEGUNDO O EIXO Y..... -82.422  
 ERRO PERCENTUAL ..... .0000000 %

=====

ESFORÇOS AO LONGO DAS BARRAS

BARRA	REL X/L	NORMAL	CORTANTE	M FLETOR
1	0/10	.000	37.525	-1689.541
1	1/10	.000	33.404	-1010.395
1	2/10	.000	29.283	-410.167
1	3/10	.000	25.162	111.142
1	4/10	.000	21.041	553.532
1	5/10	.000	16.920	917.004
1	6/10	.000	12.799	1201.557
1	7/10	.000	8.678	1407.191
1	8/10	.000	4.556	1533.907
1	9/10	.000	.435	1581.704
1	10/10	.000	-3.686	1550.582

2	0/10	.000	-3.686	1550.582
2	1/10	.000	-7.807	1440.541
2	2/10	.000	-11.928	1251.582
2	3/10	.000	-16.049	983.704
2	4/10	.000	-20.170	636.908
2	5/10	.000	-24.291	211.193
2	6/10	.000	-28.412	-293.441
2	7/10	.000	-32.533	-876.994
2	8/10	.000	-36.654	-1539.465
2	9/10	.000	-40.775	-2280.855
2	10/10	.000	-44.896	-3101.164

- Analise completa - fim do processamento -

### B3) GRELHA DO EXEMPLO 3

ESCOLA DE ENGENHARIA DE SAO CARLOS - USP  
 SISTEMA ANSER - ANALISE DE SISTEMAS ESTRUTURAIIS RETICULADOS  
 PROGRAMA GPLAN4 - ANALISE DE GRELHAS - VERSAO FEV/92

PROJETO: UNESP - BAURU. TORÇÃO EM VIGAS  
 CLIENTE: EXEMPLO 3

=====  
 GRELHA: GRELHA PAV.  
 =====

=====  
 COORDENADAS E RESTRICOES NODAIS

NO	COORD X	COORD Y	RESTR Z	RESTR X	RESTR Y
1	.000	.000	.10000E+38	.20434E+07	.20434E+07
2	359.500	.000	0	0	0
3	719.000	.000	.10000E+38	.80438E+07	.00000E+00
4	1078.500	.000	0	0	0
5	1438.000	.000	.10000E+38	.20434E+07	.20434E+07
6	.000	523.000	.10000E+38	.00000E+00	.32266E+07
7	359.500	523.000	0	0	0
8	719.000	523.000	1	0	0
9	1078.500	523.000	0	0	0
10	1438.000	523.000	.10000E+38	.00000E+00	.32266E+07
11	1438.000	807.000	0	0	0
12	1243.500	926.500	0	0	0
13	.000	1046.000	.10000E+38	.20434E+07	.20434E+07
14	359.500	1046.000	0	0	0
15	719.000	1046.000	.10000E+38	.80438E+07	.00000E+00
16	1049.000	1046.000	1	0	0

=====  
 CARACTERISTICAS DAS BARRAS

BARRA	NO INIC	ROT INIC	NO FIN	ROT FIN	PROP	COMPRIMENTO	COSSENO DIRETOR
1	1	0	2	0	1	359.500	1.0000
2	2	0	3	0	1	359.500	1.0000
3	3	0	4	0	1	359.500	1.0000
4	4	0	5	0	1	359.500	1.0000
5	6	0	7	0	2	359.500	1.0000
6	7	0	8	0	2	359.500	1.0000
7	8	0	9	0	2	359.500	1.0000
8	9	0	10	0	2	359.500	1.0000
9	13	0	14	0	1	359.500	1.0000
10	14	0	15	0	1	359.500	1.0000
11	15	0	16	0	1	330.000	1.0000
12	16	0	12	0	3	228.277	.8520
13	12	0	11	0	3	228.277	.8520
14	11	0	10	0	3	284.000	.0000
15	10	0	5	0	1	523.000	.0000
16	1	0	6	0	4	523.000	.0000
17	6	0	13	0	4	523.000	.0000
18	3	0	8	0	4	523.000	.0000
19	8	0	15	0	4	523.000	.0000

=====

PROPRIEDADES DAS BARRAS

PROP	MAT	AREA	I FLEXAO	I TORCAO	ALTURA
1	1	.11400E+04	.34200E+06	.10000E+03	60.00
2	1	.13300E+04	.54308E+06	.10000E+03	70.00
3	1	.11400E+04	.34200E+06	.10947E+06	60.00
4	1	.85500E+03	.14428E+06	.10000E+03	45.00

=====

PROPRIEDADES DOS MATERIAIS

MAT	MOD LONG	MOD TRANS	PESO ESP	COEF TERM
1	.352800E+04	.147000E+04	.00000E+00	.0000E+00

-----

GERACAO DO CARREGAMENTO: CARR1 ( GRELHA: GRELHA PAV. )

-----

-----

GERACAO DE CARGAS EM BARRAS

BARRA	TIPO	CARGA I	CARGA F	REL C/L	REL I/L	IDENT
1	1	-.2504	-.2504	1.000	.000	CBRG
2	1	-.2504	-.2504	1.000	.000	CBRG
3	1	-.2504	-.2504	1.000	.000	CBRG
4	1	-.2504	-.2504	1.000	.000	CBRG
5	1	-.4003	-.4003	1.000	.000	CBRG
6	1	-.4003	-.4003	1.000	.000	CBRG

7	1	-.4003	-.4003	1.000	.000	CBRG
8	1	-.4003	-.4003	1.000	.000	CBRG
9	1	-.2504	-.2504	1.000	.000	CBRG
10	1	-.2504	-.2504	1.000	.000	CBRG
11	1	-.2504	-.2504	1.000	.000	CBRG
14	1	-.1217	-.1217	1.000	.000	CBRG
15	1	-.1217	-.1217	1.000	.000	CBRG
16	1	-.1194	-.1194	1.000	.000	CBRG
17	1	-.1194	-.1194	1.000	.000	CBRG
18	1	-.1357	-.1357	1.000	.000	CBRG
19	1	-.1357	-.1357	1.000	.000	CBRG
12	1	-.2372	-.2372	1.000	.000	CBR
13	1	-.2009	-.2009	1.000	.000	CBR

-----  
 ESTATISTICA DOS DADOS DO CARREGAMENTO  
 -----

NUMERO DE NOS CARREGADOS.....	0
NUMERO DE NOS DESCARREGADOS.....	16
NUMERO DE BARRAS CARREGADAS (EXCETO PESO PROPRIO) .....	19
NUMERO DE BARRAS DESCARREGADAS (EXCETO PESO PROPRIO) .....	0
SOMATORIO DAS FORÇAS TRANSVERSAIS ATUANTES.....	-1663.431

=====

DESLOCAMENTOS NODAIS

NO	DESLOC Z	ROTACAO X	ROTACAO Y
1	.0000000	-.0004584	.0012320
2	-.2551578	-.0003588	-.0003080
3	.0000000	-.0002591	.0000000
4	-.2551569	-.0000186	.0003080
5	.0000000	.0002218	-.0012320
6	.0000000	.0000000	.0012551
7	-.2612892	.0000000	-.0003052
8	.0000000	-.0000001	-.0000343
9	-.2427865	-.0005716	.0002880
10	.0000000	-.0011432	-.0011179
11	-.5397304	-.0020637	.0015996
12	-.3743881	.0004008	.0012330
13	.0000000	.0004584	.0015373
14	-.3541721	.0003588	-.0001852
15	.0000000	.0002592	-.0007964
16	.0000000	.0026120	.0004540

=====

ESFORÇOS NAS EXTREMIDADES DAS BARRAS

BARRA	NO	CORTANTE	M FLETOR	M TORCOR
1	1	72.766	-2517.474	.041
	2	-17.253	7461.077	.041
2	2	-17.253	7461.076	.041
	3	-107.271	-14922.130	.041

3	3	107.271	-14922.140	.098
	4	17.253	7461.058	.098
4	4	17.253	7461.059	.098
	5	-72.766	-2517.499	.098
5	6	116.761	-4049.563	.000
	7	-27.147	12058.500	.000
6	7	-27.147	12058.500	.000
	8	-171.055	-23568.300	.000
7	8	169.529	-23568.500	-.234
	9	25.622	11509.900	-.234
8	9	25.622	11509.900	-.234
	10	-118.286	-5146.579	-.234
9	13	79.644	-3141.349	-.041
	14	-10.375	9309.855	-.041
10	14	-10.375	9309.856	-.041
	15	-100.393	-10600.700	-.041
11	15	64.081	-10600.480	1.048
	16	-18.551	-3087.902	1.048
12	16	63.972	-2631.553	-1615.580
	12	9.825	5791.522	-1615.580
13	12	9.825	5791.515	-1615.579
	11	-36.036	2799.781	-1615.579
14	11	-36.036	2842.176	1539.775
	10	-70.599	-12300.030	1539.775
15	10	56.209	-12299.790	.032
	5	-7.440	453.422	.032
16	1	26.104	-936.837	.006
	6	-36.342	-3614.002	.006
17	6	36.342	-3614.002	.079
	13	-26.104	-936.837	.079
18	3	32.592	-2084.299	-.010
	8	-38.379	-3597.758	-.010
19	8	38.379	-3597.524	-.214
	15	-32.592	-2084.080	-.214

=====

RESULTANTES NODAIS

NO	FORÇA Z	MOMENTO X	MOMENTO Y
1	98.870	936.796	-2517.480
2	.000	.000	.000
3	247.135	2084.242	.000

=====



4	.000	.000	.000
5	80.206	-453.324	2517.467
6	189.445	.000	-4049.636
7	.000	.000	.000
8	417.343	.000	-.002
9	.000	.000	.000
10	245.095	.002	3606.835
11	.000	.000	.000
12	.000	-.005	-.006
13	105.748	-936.796	-3141.269
14	.000	.000	.000
15	197.067	-2085.169	.004
16	82.523	-.004	-.006

SOMATORIO DAS REACOES TRANSVERSAIS .....	1663.431
SOMATORIO DAS FORCAS TRANSVERSAIS ATUANTES .....	-1663.431
ERRO PERCENTUAL .....	-.0000367 %

=====

ESFORCOS AO LONGO DAS BARRAS

BARRA	REL X/L	CORTANTE	M FLETOR	M TORCOR
=====				
1	0/10	72.766	-2517.474	.041
1	1/10	63.764	-63.339	.041
1	2/10	54.762	2067.177	.041
1	3/10	45.761	3874.076	.041
1	4/10	36.759	5357.357	.041
1	5/10	27.757	6517.021	.041
1	6/10	18.755	7353.068	.041
1	7/10	9.753	7865.497	.041
1	8/10	.751	8054.308	.041
1	9/10	-8.251	7919.502	.041
1	10/10	-17.253	7461.078	.041
2	0/10	-17.253	7461.076	.041
2	1/10	-26.255	6679.035	.041
2	2/10	-35.256	5573.375	.041
2	3/10	-44.258	4144.098	.041
2	4/10	-53.260	2391.204	.041
2	5/10	-62.262	314.692	.041
2	6/10	-71.264	-2085.438	.041
2	7/10	-80.266	-4809.186	.041
2	8/10	-89.268	-7856.551	.041
2	9/10	-98.270	-11227.530	.041
2	10/10	-107.271	-14922.130	.041
3	0/10	107.271	-14922.140	.098
3	1/10	98.270	-11227.540	.098
3	2/10	89.268	-7856.560	.098
3	3/10	80.266	-4809.196	.098
3	4/10	71.264	-2085.450	.098
3	5/10	62.262	314.678	.098
3	6/10	53.260	2391.190	.098
3	7/10	44.258	4144.084	.098
3	8/10	35.256	5573.360	.098
3	9/10	26.255	6679.020	.098
3	10/10	17.253	7461.060	.098

4	0/10	17.253	7461.059	.098
4	1/10	8.251	7919.482	.098
4	2/10	-.751	8054.288	.098
4	3/10	-9.753	7865.476	.098
4	4/10	-18.755	7353.046	.098
4	5/10	-27.757	6517.000	.098
4	6/10	-36.759	5357.335	.098
4	7/10	-45.761	3874.053	.098
4	8/10	-54.762	2067.153	.098
4	9/10	-63.764	-63.364	.098
4	10/10	-72.766	-2517.500	.098
5	0/10	116.761	-4049.563	.000
5	1/10	102.370	-110.687	.000
5	2/10	87.979	3310.841	.000
5	3/10	73.588	6215.019	.000
5	4/10	59.198	8601.849	.000
5	5/10	44.807	10471.330	.000
5	6/10	30.416	11823.460	.000
5	7/10	16.025	12658.250	.000
5	8/10	1.635	12975.680	.000
5	9/10	-12.756	12775.770	.000
5	10/10	-27.147	12058.510	.000
6	0/10	-27.147	12058.500	.000
6	1/10	-41.538	10823.890	.000
6	2/10	-55.929	9071.935	.000
6	3/10	-70.319	6802.625	.000
6	4/10	-84.710	4015.969	.000
6	5/10	-99.101	711.963	.000
6	6/10	-113.492	-3109.392	.000
6	7/10	-127.883	-7448.096	.000
6	8/10	-142.273	-12304.150	.000
6	9/10	-156.664	-17677.550	.000
6	10/10	-171.055	-23568.300	.000
7	0/10	169.529	-23568.500	-.234
7	1/10	155.139	-17732.590	-.234
7	2/10	140.748	-12414.030	-.234
7	3/10	126.357	-7612.821	-.234
7	4/10	111.966	-3328.958	-.234
7	5/10	97.576	437.556	-.234
7	6/10	83.185	3686.723	-.234
7	7/10	68.794	6418.541	-.234
7	8/10	54.403	8633.010	-.234
7	9/10	40.012	10330.130	-.234
7	10/10	25.622	11509.900	-.234
8	0/10	25.622	11509.900	-.234
8	1/10	11.231	12172.320	-.234
8	2/10	-3.160	12317.390	-.234
8	3/10	-17.551	11945.120	-.234
8	4/10	-31.942	11055.490	-.234
8	5/10	-46.332	9648.519	-.234
8	6/10	-60.723	7724.196	-.234
8	7/10	-75.114	5282.525	-.234
8	8/10	-89.505	2323.505	-.234
8	9/10	-103.895	-1152.863	-.234
8	10/10	-118.286	-5146.581	-.234
9	0/10	79.644	-3141.349	-.041
9	1/10	70.642	-439.949	-.041
9	2/10	61.640	1937.833	-.041

9	3/10	52.639	3991.997	-.041
9	4/10	43.637	5722.544	-.041
9	5/10	34.635	7129.473	-.041
9	6/10	25.633	8212.785	-.041
9	7/10	16.631	8972.479	-.041
9	8/10	7.629	9408.556	-.041
9	9/10	-1.373	9521.016	-.041
9	10/10	-10.375	9309.857	-.041
10	0/10	-10.375	9309.856	-.041
10	1/10	-19.377	8775.080	-.041
10	2/10	-28.378	7916.686	-.041
10	3/10	-37.380	6734.674	-.041
10	4/10	-46.382	5229.044	-.041
10	5/10	-55.384	3399.798	-.041
10	6/10	-64.386	1246.933	-.041
10	7/10	-73.388	-1229.550	-.041
10	8/10	-82.390	-4029.650	-.041
10	9/10	-91.392	-7153.367	-.041
10	10/10	-100.393	-10600.700	-.041
11	0/10	64.081	-10600.480	1.048
11	1/10	55.818	-8622.139	1.048
11	2/10	47.555	-6916.481	1.048
11	3/10	39.292	-5483.509	1.048
11	4/10	31.029	-4323.223	1.048
11	5/10	22.765	-3435.622	1.048
11	6/10	14.502	-2820.707	1.048
11	7/10	6.239	-2478.477	1.048
11	8/10	-2.024	-2408.932	1.048
11	9/10	-10.287	-2612.074	1.048
11	10/10	-18.551	-3087.901	1.048
12	0/10	63.972	-2631.553	-1615.580
12	1/10	58.557	-1233.018	-1615.580
12	2/10	53.143	41.911	-1615.580
12	3/10	47.728	1193.233	-1615.580
12	4/10	42.313	2220.950	-1615.580
12	5/10	36.898	3125.061	-1615.580
12	6/10	31.484	3905.565	-1615.580
12	7/10	26.069	4562.464	-1615.580
12	8/10	20.654	5095.756	-1615.580
12	9/10	15.240	5505.443	-1615.580
12	10/10	9.825	5791.523	-1615.580
13	0/10	9.825	5791.515	-1615.579
13	1/10	5.239	5963.446	-1615.579
13	2/10	.653	6030.688	-1615.579
13	3/10	-3.934	5993.239	-1615.579
13	4/10	-8.520	5851.101	-1615.579
13	5/10	-13.106	5604.272	-1615.579
13	6/10	-17.692	5252.754	-1615.579
13	7/10	-22.278	4796.546	-1615.579
13	8/10	-26.864	4235.647	-1615.579
13	9/10	-31.450	3570.059	-1615.579
13	10/10	-36.036	2799.781	-1615.579
14	0/10	-36.036	2842.176	1539.775
14	1/10	-39.493	1769.668	1539.775
14	2/10	-42.949	599.002	1539.775
14	3/10	-46.405	-669.823	1539.775
14	4/10	-49.861	-2036.806	1539.775
14	5/10	-53.318	-3501.947	1539.775

14	6/10	-56.774	-5065.247	1539.775
14	7/10	-60.230	-6726.705	1539.775
14	8/10	-63.686	-8486.321	1539.775
14	9/10	-67.143	-10344.100	1539.775
14	10/10	-70.599	-12300.030	1539.775
15	0/10	56.209	-12299.790	.032
15	1/10	49.844	-9526.490	.032
15	2/10	43.479	-7086.072	.032
15	3/10	37.115	-4978.538	.032
15	4/10	30.750	-3203.889	.032
15	5/10	24.385	-1762.126	.032
15	6/10	18.020	-653.246	.032
15	7/10	11.655	122.748	.032
15	8/10	5.290	565.858	.032
15	9/10	-1.075	676.083	.032
15	10/10	-7.440	453.424	.032
16	0/10	26.104	-936.837	.006
16	1/10	19.860	265.118	.006
16	2/10	13.615	1140.479	.006
16	3/10	7.370	1689.247	.006
16	4/10	1.126	1911.421	.006
16	5/10	-5.119	1807.001	.006
16	6/10	-11.363	1375.988	.006
16	7/10	-17.608	618.380	.006
16	8/10	-23.853	-465.820	.006
16	9/10	-30.097	-1876.615	.006
16	10/10	-36.342	-3614.002	.006
17	0/10	36.342	-3614.002	.079
17	1/10	30.097	-1876.614	.079
17	2/10	23.853	-465.820	.079
17	3/10	17.608	618.381	.079
17	4/10	11.363	1375.988	.079
17	5/10	5.119	1807.001	.079
17	6/10	-1.126	1911.421	.079
17	7/10	-7.370	1689.247	.079
17	8/10	-13.615	1140.480	.079
17	9/10	-19.860	265.118	.079
17	10/10	-26.104	-936.836	.079
18	0/10	32.592	-2084.299	-.010
18	1/10	25.495	-565.340	-.010
18	2/10	18.398	582.440	-.010
18	3/10	11.300	1359.041	-.010
18	4/10	4.203	1764.463	-.010
18	5/10	-2.894	1798.707	-.010
18	6/10	-9.991	1461.772	-.010
18	7/10	-17.088	753.658	-.010
18	8/10	-24.185	-325.635	-.010
18	9/10	-31.282	-1776.108	-.010
18	10/10	-38.379	-3597.758	-.010
19	0/10	38.379	-3597.524	-.214
19	1/10	31.282	-1775.875	-.214
19	2/10	24.185	-325.405	-.214
19	3/10	17.088	753.887	-.214
19	4/10	9.991	1462.000	-.214
19	5/10	2.894	1798.934	-.214
19	6/10	-4.203	1764.689	-.214
19	7/10	-11.300	1359.265	-.214
19	8/10	-18.398	582.662	-.214

19	9/10	-25.495	-565.120	-.214
19	10/10	-32.592	-2084.080	-.214

- Analise completa - fim do processamento

### B4) EXEMPLO 3 - VIGA VS1 ENTRE OS PILARES P2 E P3

ESCOLA DE ENGENHARIA DE SAO CARLOS  
SISTEMA ANSER - ANALISE DE SISTEMAS ESTRUTURAIIS RETICULADOS  
PROGRAMA PPLAN4 - ANALISE DE PORTICOS PLANOS - VERSAO FEV/92

PROJETO: UNESP, BAURU/SP - DISC. CONCRETO II - TORÇÃO  
CLIENTE: MOMENTO POSITIVO ENTRE OS PILARES P2 E P3, COM ENGASTE NO PI

=====  
PORTICO: VS1 (19 x 60)  
=====

=====  
COORDENADAS E RESTRICOES NODAIS  
=====

NO	COORD X	COORD Y	RESTR X	RESTR Y	RESTR R
1	.000	.000	1	1	1
2	330.000	.000	1	1	0

=====  
CARACTERISTICAS DAS BARRAS  
=====

BARRA	NO INIC	ROT INIC	NO FIN	ROT FIN	PROP	COMPRIMENTO	COSSENO DIRETOR
1	1	0	2	0	1	330.000	1.0000

=====  
PROPRIEDADES DAS BARRAS  
=====

PROP	MAT	AREA	I FLEXAO	ALTURA	TEMP
1	1	.11400E+04	.34200E+06	60.00	.00

=====  
PROPRIEDADES DOS MATERIAIS  
=====

MAT	MOD LONG	PESO ESP	COEF TERM
1	.352800E+04	.00000E+00	.00000E+00

-----  
 GERACAO DE CARGAS EM BARRAS

BARRA	TIPO	INTENSIDADE	REL C/L	REL I/L	IDENT
1	1	-.2504	1.000	.000	CBR

 -----  
 ESTATISTICA DOS DADOS DO CARREGAMENTO
 -----

NUMERO DE NOS CARREGADOS.....	0
NUMERO DE NOS DESCARREGADOS.....	2
NUMERO DE BARRAS CARREGADAS (EXCETO PESO PROPRIO) .....	1
NUMERO DE BARRAS DESCARREGADAS (EXCETO PESO PROPRIO) .....	0
SOMATORIO DAS FORCAS SEGUNDO O EIXO X.....	.000
SOMATORIO DAS FORCAS SEGUNDO O EIXO Y.....	-82.632

 =====  
 DESLOCAMENTOS NODAIS

NO	DESLOC X	DESLOC Y	ROTACAO
1	.0000000	.0000000	.0000000
2	.0000000	.0000000	-.0001554

 =====  
 ESFORCOS NAS EXTREMIDADES DAS BARRAS

BARRA	NO	NORMAL	CORTANTE	M FLETOR
1	1	.000	51.645	-3408.570
	2	.000	-30.987	.000

 =====  
 RESULTANTES NODAIS

NO	RESULT X	RESULT Y	MOMENTO
1	.000	51.645	-3408.570
2	.000	30.987	.000

SOMATORIO DAS REACOES SEGUNDO O EIXO Y.....	82.632
SOMATORIO DAS FORCAS ATUANTES SEGUNDO O EIXO Y.....	-82.632
ERRO PERCENTUAL .....	.0000000 %

 =====  
 ESFORCOS AO LONGO DAS BARRAS

BARRA	REL X/L	NORMAL	CORTANTE	M FLETOR
1	0/10	.000	51.645	-3408.570
1	1/10	.000	43.382	-1840.628
1	2/10	.000	35.119	-545.371
1	3/10	.000	26.855	477.200
1	4/10	.000	18.592	1227.085
1	5/10	.000	10.329	1704.285
1	6/10	.000	2.066	1908.799
1	7/10	.000	-6.197	1840.628
1	8/10	.000	-14.461	1499.771
1	9/10	.000	-22.724	886.229
1	10/10	.000	-30.987	.000

- Analise completa - fim do processamento -

### B5) EXEMPLO 3 - VIGA VS6 ENTRE OS PILARES P9 E P6

ESCOLA DE ENGENHARIA DE SAO CARLOS  
 SISTEMA ANSER - ANALISE DE SISTEMAS ESTRUTURAIIS RETICULADOS  
 PROGRAMA PPLAN4 - ANALISE DE PORTICOS PLANOS - VERSAO FEV/92

PROJETO: UNESP, BAURU/SP - DISC. CONCRETO II - TORÇÃO  
 CLIENTE: MOMENTO POSITIVO ENTRE OS PILARES P9 E P6

=====  
 PORTICO: VS6 (19 x 60)  
 =====

=====  
 COORDENADAS E RESTRICOES NODAIS

NO	COORD X	COORD Y	RESTR X	RESTR Y	RESTR R
1	.000	.000	.10000E+38	.10000E+38	.20434E+07
2	523.000	.000	1	1	1

=====  
 CARACTERISTICAS DAS BARRAS

BARRA	NO INIC	ROT INIC	NO FIN	ROT FIN	PROP	COMPRIMENTO	COSSENO DIRETOR
1	1	0	2	0	1	523.000	1.0000

=====  
 PROPRIEDADES DAS BARRAS

PROP	MAT	AREA	I FLEXAO	ALTURA	TEMP
1	1	.11400E+04	.34200E+06	60.00	.00

PROPRIEDADES DOS MATERIAIS

MAT	MOD LONG	PESO ESP	COEF TERM
1	.352800E+04	.00000E+00	.00000E+00

GERACAO DO CARREGAMENTO: CARR1 ( PORTICO: VS6 (19 x 60) )

GERACAO DE CARGAS EM BARRAS

BARRA	TIPO	INTENSIDADE	REL C/L	REL I/L	IDENT
1	1	-.1217	1.000	.000	CBR

ESTATISTICA DOS DADOS DO CARREGAMENTO

NUMERO DE NOS CARREGADOS.....	0
NUMERO DE NOS DESCARREGADOS.....	2
NUMERO DE BARRAS CARREGADAS (EXCETO PESO PROPRIO) .....	1
NUMERO DE BARRAS DESCARREGADAS (EXCETO PESO PROPRIO) .....	0
SOMATORIO DAS FORCAS SEGUNDO O EIXO X.....	.000
SOMATORIO DAS FORCAS SEGUNDO O EIXO Y.....	-63.649

CARREGAMENTO: CARR1 (PORTICO: VS6 (19 x 60) )

DESLOCAMENTOS NODAIS

NO	DESLOC X	DESLOC Y	ROTACAO
1	.0000000	.0000000	.0002461
2	.0000000	.0000000	.0000000

ESFORCOS NAS EXTREMIDADES DAS BARRAS

BARRA	NO	NORMAL	CORTANTE	M FLETOR
-------	----	--------	----------	----------



1	1	.000	25.311	-502.906
	2	.000	-38.338	-3909.607

=====

RESULTANTES NODAIS

NO	RESULT X	RESULT Y	MOMENTO
1	.000	25.311	-502.906
2	.000	38.338	3909.607
SOMATORIO DAS REACOES SEGUNDO O EIXO Y.....			63.649
SOMATORIO DAS FORCAS ATUANTES SEGUNDO O EIXO Y.....			-63.649
ERRO PERCENTUAL .....			.0000000 %

=====

ESFORCOS AO LONGO DAS BARRAS

BARRA	REL X/L	NORMAL	CORTANTE	M FLETOR
1	0/10	.000	25.311	-502.906
1	1/10	.000	18.946	654.405
1	2/10	.000	12.581	1478.832
1	3/10	.000	6.216	1970.374
1	4/10	.000	-.149	2129.031
1	5/10	.000	-6.514	1954.803
1	6/10	.000	-12.879	1447.691
1	7/10	.000	-19.244	607.693
1	8/10	.000	-25.608	-565.188
1	9/10	.000	-31.973	-2070.956
1	10/10	.000	-38.338	-3909.607

- Analise completa - fim do processamento -